III. Capacidad y Capacitores

Capacidad de un Conductor Aislado:

Oportunamente hemos visto *(ver página 58)* que, en el vacío, el *potencial V* de una *esfera conductora cargada* está dado por: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$ *(74)*

O sea que $q = 4\pi\,\varepsilon_0\,R\,V$, siendo *q* la *carga* de la esfera y *R* su *radio*. Por consiguiente, la *carga* de la esfera es *proporcional* a su *potencial*. Puede demostrarse que la carga sobre un conductor aislado de forma cualquiera es también directamente proporcional a su potencial. Por lo tanto, para cualquier conductor cargado puede escribirse: $q \propto V \quad \rightarrow \quad q = C\,V$

o sea,

$$\boxed{C = \frac{q}{V}} \qquad (75)$$

donde *C* es una *constante de proporcionalidad*, llamada *CAPACIDAD*, que depende del *tamaño* y de la *forma* del *conductor*. *La capacidad de un conductor es la razón de su carga a su potencial (se supone el potencial de referencia en el infinito)*.

La unidad SI de *capacidad* es el *culombio por voltio* y se denomina *faradio* *(1 F = 1 C/V)*, en honor del físico inglés Michael Faraday.

Según las ecuaciones *(74)* y *(75)*, la capacidad de un conductor esférico aislado es: $C = q/V = 4\,\pi\,\varepsilon_0\,R$. Por lo tanto, la *capacidad* de una *esfera* es directamente *proporcional* a su *radio*.

El término "capacidad" no tiene el mismo significado que puede atribuirse a la capacidad de un recipiente. Esta última representa el máximo volumen de líquido que puede contener, mientras que la cantidad de carga que un conductor soporta puede aumentar indefinidamente elevando su potencial, salvo el límite impuesto por el problema de aislamiento. Sabemos que la máxima densidad superficial de carga sobre un conductor situado en el aire, está limitada por la máxima intensidad del campo eléctrico que el aire puede soportar sin volverse conductor.

Condensadores o Capacitores:

Si un cierto número de *conductores cargados* están *próximos* unos a otros, el *potencial* de cada uno de ellos está determinado no sólo por su *propia carga*, sino por el valor y signo de las *cargas* de los *otros conductores*, como así también por su *forma*, *tamaño* y *posición*. *Por ejemplo, el potencial de una esfera cargada positivamente disminuye, si se le aproxima una segunda esfera cargada negativamente. La capacidad de la primera esfera ($C = q/V$) aumenta por la presencia de la segunda. De igual modo, la capacidad de la segunda resulta incrementada por la presencia de la primera.*

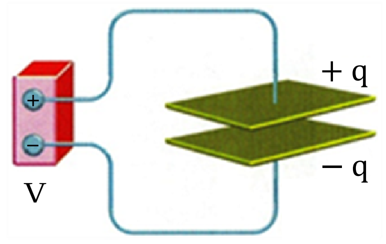


figura 60

Un caso especial importante se presenta en la práctica cuando dos conductores próximos reciben cargas del mismo valor y signo contrario. Esto se consigue corrientemente conectando ambos conductores, descargados inicialmente, a los bornes de una batería eléctrica, lo que ocasiona el paso de carga de un conductor al otro (figura 60). Este dispositivo de dos conductores se denomina *CAPACITOR o CONDENSADOR. El hecho de que cada conductor esté próximo a otro que lleva una carga de signo opuesto, hace posible el paso de cantidades relativamente grandes de carga de uno a otro conductor, con diferencias de potencial relativamente pequeñas.*

Se define la *capacidad de un condensador* como la razón de la carga de cualquiera de los conductores a la diferencia de potencial entre ellos:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_{ab}}} \qquad (76)$$

La *carga neta* del condensador en conjunto es, obviamente, *nula*.

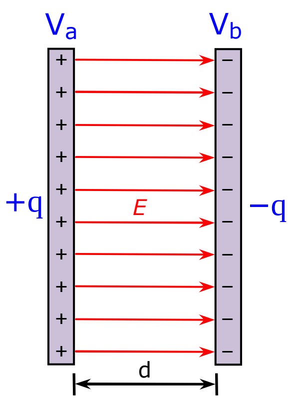
La *carga de un condensador* se define como *la carga de cualquiera de los conductores sin tener en cuenta el signo*. La capacidad es de *un faradio* si, para una diferencia de potencial entre los dos conductores de *un voltio*, la carga transmitida de uno a otro es de *un culombio*.

Un capacitor se representa por el símbolo —|├—

Los capacitores tienen múltiples aplicaciones prácticas en los circuitos eléctricos y electrónicos: aumento del rendimiento en el transporte de la energía en corriente *alterna, arranque de los motores monofásicos, encendido del automóvil, nivelado de la corriente alterna rectificada, generación de destellos electrónicos para fotografía, sintonización de radio y televisión, etc.*

Capacitores de Láminas o Placas Paralelas:

El tipo de capacitor más frecuente se compone de dos láminas conductoras paralelas y separadas por una distancia que es pequeña comparada con las dimensiones lineales de las láminas *(figura 61)*. Prácticamente, todo el campo de este capacitor está localizado en el espacio comprendido entre las láminas, como se representa en la figura. Hay una ligera dispersión del campo hacia el exterior, pero se hace relativamente menor a medida que disminuye la separación entre las láminas. *Si las láminas están suficientemente próximas*, *la dispersión puede despreciarse*, *el campo entre las láminas es uniforme y las cargas de las mismas están uniformemente repartidas entre las superficies opuestas*. Este dispositivo se denomina *capacitor de láminas o placas paralelas* o *capacitor plano*.



CAPACITOR PLANO
figura 61

Supongamos en primer lugar que las placas se encuentran en el *vacío*. Hemos demostrado que la intensidad del campo eléctrico entre un par de láminas paralelas muy próximas y en el vacío es:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{A}$$

siendo A el área de las láminas y q la carga de cada una. Puesto que la intensidad del campo eléctrico o gradiente de potencial es uniforme entre las placas, la diferencia de potencial entre ellas será:

$$V_{ab} = E\,d = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{A}d$$

siendo d la separación de las láminas. Por consiguiente, la *capacidad de un condensador plano en el vacío* es:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_{ab}} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}} \qquad (77)$$

Debido a que A, d y ε_0 son *constantes* para un *condensador dado*, la *capacidad* es una *constante independiente de la carga del condensador*, *directamente proporcional al área de las láminas e inversamente proporcional a su separación*.

De la ecuación (77) se deduce que la permitividad ε, que tiene las mismas dimensiones que ε_0, puede expresarse también en faradios por metro (F/m).

Como ejemplo, calculemos el área de las placas de un condensador plano de un faradio, cuando la separación entre ellas es de un milímetro y se encuentran en el vacío:

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1 \times 10^{-3}}{8{,}85 \times 10^{-12}} = 1{,}13 \times 10^8 \, m^2$$

Esto corresponde a un cuadrado de más de 10 km de lado !!!

Puesto que el Faradio es una unidad de capacidad muy grande, normalmente se utilizan el microfaradio ($1 \mu F = 10^{-6}$ F) y el picofaradio (1 pF $= 10^{-12}$ F). Un equipo normal de radio AM contiene en sus circuitos de potencia capacitores del orden de 10 a 100 μF, mientras que la capacidad de los condensadores de sintonía es del orden de 10 a 100 pF.

Ahora calcularemos la *capacidad* de un *condensador plano* cuando el espacio comprendido *entre las láminas* está ocupado por una *sustancia* cuya *permitividad relativa* es *K*. La intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0} = \frac{1}{K\varepsilon_0}\frac{q}{A} \qquad (78)$$

En consecuencia, la diferencia de potencial entre las placas será:

$$V_{ab} = E\, d = \frac{1}{K\varepsilon_0}\frac{q}{A} d$$

y la capacidad:

$$C = \frac{q}{V_{ab}} = K\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{A}{d} \qquad (79)$$

Si representamos por C_0 la capacidad del mismo capacitor en el *vacío*:

$$\boxed{C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

encontramos que *la capacidad resulta multiplicada por el factor K*, *cuando se introduce un dieléctrico entre las láminas*. Dividiendo las dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$\boxed{\frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K} \qquad (80)$$

Esta relación se toma habitualmente como *definición de la permitividad relativa*. *Es decir, la permitividad relativa de una sustancia puede definirse como la razón de la capacidad de un condensador dado que tenga dicha sustancia entre las placas, a la capacidad del mismo condensador en el vacío.*

Ejercicio Nº 40: Las láminas de un capacitor plano están separadas 5 mm, tienen 2 m^2 de área y se encuentran en el vacío. Se aplica al capacitor una diferencia de potencial de 10.000 V. Calcular: a) la capacidad; b) la carga de cada lámina; c) la densidad superficial de carga; d) la intensidad del campo eléctrico; e) el desplazamiento en el espacio comprendido entre las láminas.

a) $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \times 10^{-12}) \times \frac{2}{5 \times 10^{-3}} = 3.540\ pF$

b) $q = C\,V_{ab} = 3.540 \times 10^{-12} \times 10^4 = 3{,}54 \times 10^{-5}\ C$

c) $\sigma = \frac{q}{A} = \frac{3{,}54 \times 10^{-5}}{2} = 1{,}77 \times 10^{-5}\ C/m^2$

d) $E = E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{8{,}85 \times 10^{-12}} = 20 \times 10^5\ V/m$

$también \Rightarrow E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{10^4}{5 \times 10^{-3}} = 20 \times 10^5\ V/m$

e) $D = \varepsilon_0\, E = (8{,}85 \times 10^{-12}) \times (20 \times 10^5) = 1{,}77 \times 10^{-5}\ C/m^2$

$(como\ sabemos, es\ igual\ a\ la\ densidad\ superficial\ de\ carga)$

Ejercicio Nº 41: Se desconecta de la tensión de carga el capacitor cargado del ejercicio anterior y se mantiene aislado de modo que la carga de sus láminas permanezca constante. Se introduce entre las láminas una capa de dieléctrico de 5 mm de espesor y permitividad relativa 5. Calcular: a) el desplazamiento en el dieléctrico; b) la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico; c) la diferencia de potencial entre las láminas del capacitor; d) la capacidad del capacitor.

a) $D = \sigma = 1{,}77 \times 10^{-5}\ C/m^2$

b) $E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{K\,\varepsilon_0} = \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{5 \times (8{,}85 \times 10^{-12})} = 4 \times 10^5\ V/m$

c) $V_{ab} = E\ d = (4 \times 10^5) \times (5 \times 10^{-3}) = 2.000\ V$

d) $C = \dfrac{q}{V_{ab}} = \dfrac{3{,}54 \times 10^{-5}}{2.000} = 17.700\ \ pF$

$$también \Rightarrow C = \varepsilon\ \frac{A}{d} = K\ \varepsilon_0\ \frac{A}{d} = 5 \times (8{,}85 \times 10^{-12}) \times \frac{2}{5 \times 10^{-3}} = 17.700\ \ pF$$

$$(obviamente, la\ capacidad\ es\ 5\ veces\ mayor\ que\ su\ valor\ en\ el\ vacío{:}\ 3.540\ pF)$$

Ejercicio Nº 42: Se elimina la capa de dieléctrico del ejercicio anterior y se sustituye por dos láminas, una de espesor 2 mm y permitividad relativa 5, otra de espesor 3 mm y permitividad relativa 2. Calcular: a) el desplazamiento en cada dieléctrico; b) el campo eléctrico en cada dieléctrico; c) la diferencia de potencial entre las láminas del capacitor; d) la capacidad del capacitor.

a) $D = \sigma = 1{,}77 \times 10^{-5}\ \ C/m^2$

$$(como\ la\ carga\ libre\ se\ mantiene\ constante, el\ desplazamiento\ no\ se\ altera)$$

b) $E_1 = \dfrac{D}{K_1\ \varepsilon_0} = \dfrac{1{,}77 \times 10^{-5}}{5 \times (8{,}85 \times 10^{-12})} = 4 \times 10^5\ \ V/m$

$$E_2 = \frac{D}{K_2\ \varepsilon_0} = \frac{1{,}77 \times 10^{-5}}{2 \times (8{,}85 \times 10^{-12})} = 10 \times 10^5\ \ V/m$$

c) $V_{ax} = E_1\ d_1 = (4 \times 10^5) \times (2 \times 10^{-3}) = 800\ V$

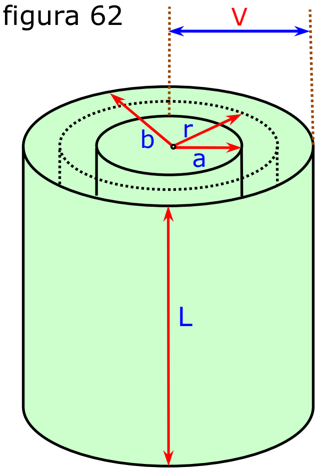
$$V_{xb} = E_2\ d_2 = (10 \times 10^5) \times (3 \times 10^{-3}) = 3.000\ V$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xb} = 800 + 3.000 = 3.800\ V$$

d) $C = \dfrac{q}{V_{ab}} = \dfrac{3{,}54 \times 10^{-5}}{3.800} = 9.316\ \ pF$

Capacitores Cilíndricos:

Los condensadores cilíndricos y esféricos suelen utilizarse como patrones, porque sus capacidades pueden calcularse con precisión a partir de sus dimensiones. Consideremos dos cilindros coaxiales de radios *a* y *b* y longitud *L* *(figura 62)*, que poseen cargas iguales y opuestas $+q$ y $-q$. Tomemos como *superficie gaussiana* un cilindro de radio *r*, comprendido entre *a* y *b*, de longitud *L*. Si despreciamos los efectos en los extremos, las líneas de desplafigura 62



CONDENSADOR CILÍNDRICO

zamiento sólo cortan a esta superficie a través de la superficie curva de área $2\pi rL$. Representando por D el desplazamiento a la distancia r del eje, se tiene:

$$\int D\cos\varphi\, dA = 2\pi rL\, D = q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{q}{2\pi rL}$$

Si el espacio comprendido entre los cilindros contiene un dieléctrico de *permitividad* ε :

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{2\pi\varepsilon L}\,\frac{1}{r}$$

La *diferencia de potencial* entre los cilindros es:

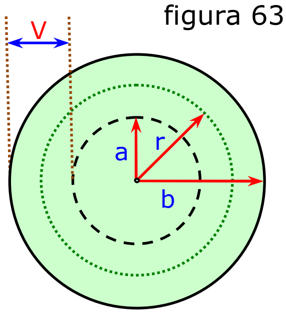
$$V_{ab} = \int_a^b E\, dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon L}\, ln\,\frac{b}{a}$$

La *capacidad* es, por lo tanto:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{2\pi\varepsilon L}{ln\,\frac{b}{a}}} \qquad (81)$$

Capacitores Esféricos:

figura 63



CONDENSADOR ESFÉRICO
CORTE

Consideremos dos cáscaras conductoras esféricas y concéntricas de radios a y b *(figura 63)*, que poseen cargas iguales y opuestas $+q$ y $-q$. Tomemos como *superficie gaussiana* una esfera de radio r entre las dos esferas y concéntrica con ellas. Sabemos que el flujo eléctrico a través de esta superficie está dado por la ecuación:

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\,.\,d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Por simetría, el módulo de $\vec{E}$ es constante y su dirección es paralela a $d\vec{A}$ en todos los puntos de esta superficie. En consecuencia:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

Esta expresión de E es la misma que la correspondiente a una carga puntual q. Por lo tanto, la expresión del *potencial* se puede tomar también como la correspondiente a una carga puntual: $V = q/4\pi\varepsilon_0 r$.

La *diferencia de potencial* entre las esferas es:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{b-a}{a\,b}$$

Por último, la capacidad es:

$$\boxed{C = \frac{q}{V_{ab}} = 4\pi\varepsilon_0\,\frac{a\,b}{b-a}} \qquad (82)$$

Si existe un *dieléctrico*, se reemplazará ε_0 por la permitividad ε del mismo.

Otros Tipos de Capacitores:

figura 64

Existe una gran variedad de capacitores para distintas funciones y potencias (figura 64).

El más común es el capacitor plano, en el cual las láminas están formadas por bandas de hoja metálica muy fina y el dieléctrico es una lámina delgada de plástico (generalmente polipropileno). Enrollando estas cintas (figura 65), pueden obtenerse condensadores del orden de las decenas y centenas de micro-faradios en un volumen relativamente pequeño.

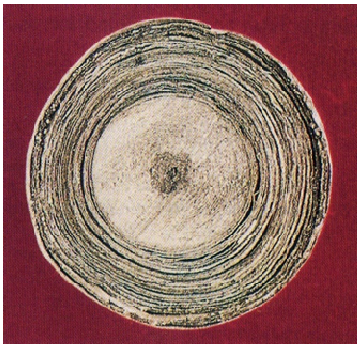
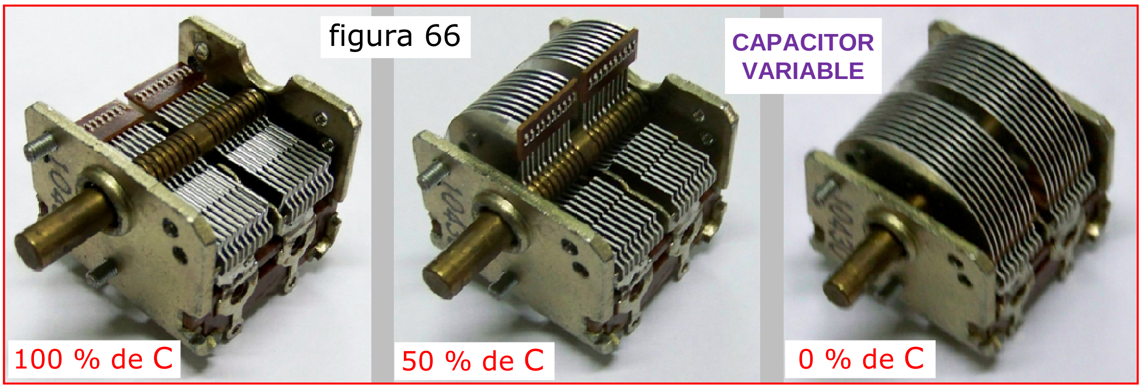


figura 65

Los condensadores variables, cuya capacidad puede modificarse a voluntad entre ciertos límites, son muy usados en los circuitos de sintonía de los receptores de radio y televisión. Generalmente son capacitores de aire (figura 66), de capacidad relativamente pequeña, y están figura 66



formados por cierto número de láminas metálicas paralelas y fijas, conectadas entre sí, que constituyen una de las armaduras del condensador, mientras que un segundo conjunto de placas móviles también conectadas entre sí forman la otra armadura. Un capacitor variable se representa por el símbolo

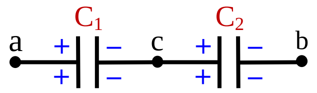
Los <u>condensadores electrolíticos</u> utilizan como dieléctrico una capa extremadamente delgada de óxido no conductor entre una lámina delgada de metal y una solución conductora. Debido al pequeño espesor del dieléctrico, se obtienen capacidades elevadas con dimensiones relativamente pequeñas de los condensadores.

◆ Capacitores en Serie y en Paralelo:

Sabemos que la capacidad de un condensador se define como la razón de la carga Q sobre cualquiera de sus placas a la diferencia de potencial entre éstas. La carga Q puede considerarse como la carga desplazada que pasa por cualquier punto del circuito exterior durante el proceso de carga.

La *<u>capacidad equivalente</u>* de una *<u>red de condensadores</u>* se define, análoga-mente, como la *<u>razón de la carga desplazada</u>* a la *<u>diferencia de potencial entre los bornes de la red</u>*. *En consecuencia, el método para calcular la capacidad equivalente de una red, consiste en suponer una diferencia de potencial entre los bornes de la misma, calcular la carga correspondiente y hallar la razón de la carga a la diferencia de potencial.*

figura 67



Supongamos dos condensadores de capacidades C_1 y C_2 conectados <u>*EN SERIE*</u> como en la *figura 67*, donde se mantienen los terminales *a* y *b* a una diferencia de potencial V_{ab}. Se tiene:

$$Q_1 = C_1\, V_{ac} \qquad ; \qquad Q_2 = C_2\, V_{cb} \qquad ; \qquad V_{ab} = V_{ac} + V_{cb}$$

Pero Q_1 ha de ser <u>*igual*</u> a Q_2, puesto que el proceso de carga *(considerando el movimiento de cargas positivas)* consiste en el paso de carga desde la placa derecha del capacitor 2 *(a través del circuito exterior)* hasta la placa izquierda del capacitor 1, y de la placa derecha del capacitor 1 *(a través del circuito interior)* hasta la placa izquierda del capacitor 2. Por lo tanto, si Q representa la carga de cada capacitor, tenemos:

$$V_{ac} = \frac{Q}{C_1} \qquad ; \qquad V_{cb} = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V_{ac} + V_{cb} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

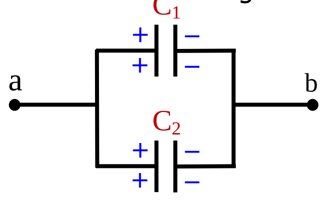
Por último, como Q/V_{ab} es, por definición, la <u>*capacidad equivalente*</u> C:

$$\frac{V_{ab}}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}} \qquad (83)$$

Es decir que, <u>*la inversa de la capacidad equivalente de un número cualquiera de condensadores en serie*</u>, <u>*es igual a la suma de las inversas de las capacidades individuales*</u>.

También, dado que: $Q = C_1\, V_1 = C_2\, V_2 = C_3\, V_3 = etc.$, <u>*las diferencias de potencial entre las placas de cada condensador son inversamente proporcionales a sus capacidades*</u>.

figura 68



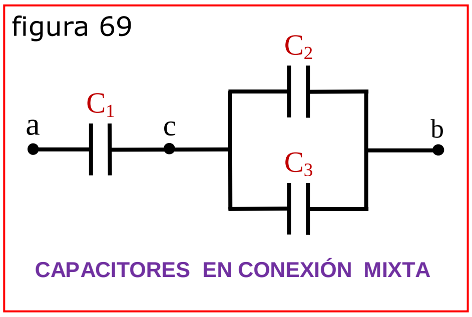
CAPACITORES EN PARALELO

Si dos capacitores están conectados <u>*EN PARALELO*</u> como en la *figura 68*, la <u>*diferencia de potencial*</u> *entre las placas de cada capacitor es la misma y la* <u>*carga total*</u> *desplazada es la suma de las cargas individuales*. Por consiguiente:

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1\, V_{ab} + C_2\, V_{ab} = V_{ab}\,(C_1 + C_2)$$

$$\frac{Q}{V_{ab}} = C = C_1 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = \sum C_i} \qquad (84)$$

O sea que, *la capacidad equivalente de un número cualquiera de condensadores en paralelo*, *es igual a la suma de las capacidades individuales*.



La figura 69 representa una red sencilla de capacitores conectados en serie y en paralelo. Primero obtenemos la capacidad equivalente C_{23} de los dos capacitores en paralelo: $C_{23} = C_2 + C_3$. Luego, para hallar la capacidad equivalente total C_T, consideramos la serie resultante: $1/C_T = (1/C_1) + (1/C_{23})$.

Ejercicio Nº 43: En la red de la figura 69, $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ y $C_3 = 2\ \mu F$. Además, el punto *b* se pone en contacto con tierra y el punto *a* se mantiene a un potencial de + 1.200 V. Calcular la carga de cada capacitor y el potencial del punto *c*.

$$C_{23} = 4 + 2 = 6\ \mu F$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C_T = 2\ \mu F$$

$$Q_T = C_T V = (2 \times 10^{-6}) \times 1.200 = 2{,}4 \times 10^{-3}\ C$$

$$Q_1 = Q_T = Q_{23} = Q_2 + Q_3 = 2{,}4 \times 10^{-3}\ C$$

$$V_{ac} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{2{,}4 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = 800\ V$$

$$V_c = V_a - V_{ac} = 1.200 - 800 = 400\ V$$

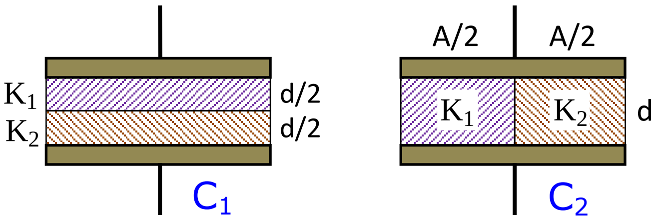
$$V_{cb} = V_c - V_b = 400 - 0 = 400\ V$$

$$Q_2 = C_2\, V_{cb} = (4 \times 10^{-6}) \times 400 = 1{,}6 \times 10^{-3}\ C$$

$$Q_3 = C_3\, V_{cb} = (2 \times 10^{-6}) \times 400 = 0{,}8 \times 10^{-3}\ C$$

$$Q_2 + Q_3 = (1{,}6 + 0{,}8) \times 10^{-3} = 2{,}4 \times 10^{-3}\ C$$

Ejercicio Nº 44: Los espacios entre las placas de dos capacitores de placas paralelas, están ocupados cada uno por dos placas de dieléctrico según se ilustra en la figura. Hallar la capacidad de cada capacitor.



$$\frac{1}{C_1} = \frac{d/2}{\varepsilon_1\ A} + \frac{d/2}{\varepsilon_2\ A} = \frac{d/2}{K_1\ \varepsilon_0\ A} + \frac{d/2}{K_2\ \varepsilon_0\ A} = \frac{d}{2\ \varepsilon_0\ A}\left(\frac{K_1 + K_2}{K_1\ K_2}\right)$$

$$C_1 = \frac{2\ \varepsilon_0\ A}{d}\left(\frac{K_1\ K_2}{K_1 +\ K_2}\right)$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_1\ A/2}{d} + \frac{\varepsilon_2\ A/2}{d} = \frac{K_1\ \varepsilon_0\ A/2}{d} + \frac{K_2\ \varepsilon_0\ A/2}{d} = \frac{\varepsilon_0\ A}{2\ d}(K_1 + K_2)$$

Rigidez o Resistencia Dieléctrica:

Un aislador o dieléctrico es un sustancia dentro de la cual no hay *(o al menos hay relativamente pocas)* partículas cargadas capaces de moverse bajo la influencia de un campo eléctrico. Sin embargo, existe, para cada dieléctrico, cierto límite de la intensidad del campo eléctrico, por encima del cual la sustancia pierde sus propiedades aisladoras y se convierte en un conductor. *Esto sucede cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca electrones de las moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse repentinamente.*

Debido a la ruptura del dieléctrico, los capacitores siempre tienen voltajes máximos nominales. *Cuando se somete a un capacitor a un voltaje excesivo, se puede formar, a través del dieléctrico, un arco que produce un orificio por combustión o fusión. Este arco crea un camino conductor (un cortocircuito) entre los conductores. Si queda una trayectoria conductora después que el arco se ha extinguido, el dispositivo queda inutilizado permanentemente como capacitor.*

La magnitud máxima de campo eléctrico que un material puede soportar sin que ocurra una ruptura, se conoce como RIGIDEZ DIELÉCTRICA o RESISTENCIA DIELÉCTRICA. *En esta magnitud influyen de manera importante la temperatura, las impurezas en pequeñas cantidades, las pequeñas irregularidades de los electrodos metálicos y otros factores que son difíciles de controlar. Por esta razón, sólo se pueden citar cifras aproximadas de resistencias dieléctricas. En la tabla siguiente se muestran algunos valores representativos de resistencias dieléctricas de materiales aislantes comunes.*

RIGIDEZ DIELÉCTRICA DE ALGUNAS SUSTANCIAS			
MATERIAL	$E_{máx}$ (V/m)	MATERIAL	$E_{máx}$ (V/m)
Policarbonato	30×10^6	Poliestireno	20×10^6
Poliéster	60×10^6	Vidrio Pyrex	10×10^6
Polipropileno	70×10^6	Aire	3×10^6

Ejercicio Nº 45: Para un capacitor de placas paralelas se va a utilizar un dieléctrico cuya permitividad relativa es de 3,6 y su rigidez dieléctrica de 16×10^6 V/m. El condensador debe tener una capacidad de 1,25 nF y debe ser capaz de soportar una diferencia de potencial máxima de 5.500 V. ¿Cuál será el área mínima que deberán tener las placas del capacitor?

$$E_{máx} = \frac{V_{máx}}{d_{mín}} \quad \Rightarrow \quad d_{mín} = \frac{V_{máx}}{E_{máx}} = \frac{5.500}{16 \times 10^6} = 0{,}3437 \times 10^{-3}\, m = 0{,}3437\, mm$$

$$C = \frac{K\, \varepsilon_0\, A_{mín}}{d_{mín}} \quad \Rightarrow \quad A_{mín} = \frac{C\, d_{mín}}{K\, \varepsilon_0} = \frac{(1{,}25 \times 10^{-9}) \times (0{,}3437 \times 10^{-3})}{3{,}6 \times (8{,}85 \times 10^{-12})}$$

$$A_{mín} = 0{,}0135\, m^2 = 135\, cm^2$$

Energía Potencial almacenada en un Capacitor:

El proceso de *carga de un capacitor* consiste en el paso de carga desde la placa de menor potencial a la placa de mayor potencial, por lo que requiere *consumo de energía*. Imaginemos que, estando ambas placas completamente descargadas, iniciamos la carga sacando repetidamente pequeñas cargas de una placa y pasándola a la otra. En cierta etapa de este proceso, cuando la cantidad total de carga transportada ha alcanzado el valor q, la diferencia de potencial entre las placas será: $V = q/C$ y el trabajo dW necesario para transportar la pequeña carga siguiente dq, es:

$$dW = V\, dq = \frac{1}{C}\, q\, dq$$

El *trabajo total* realizado en el *proceso de carga*, mientras la carga aumenta desde *cero* hasta su valor final Q, será:

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq$$

de donde: $$W = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$$

Pero siendo $V = q/C$, podemos expresar esta energía en distintas formas:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,Q\,V = \frac{1}{2}\,C\,V^2} \qquad (85)$$

Densidad de Energía del Campo Eléctrico:

Es razonable suponer que la *energía almacenada* en un condensador *reside* en el *campo eléctrico*. Cuando aumenta Q o V en las ecuaciones *(85)*, aumenta también el campo eléctrico E. Cuando Q y V valen cero, también E vale cero.

El campo eléctrico en un condensador de placas paralelas es uniforme, por lo que la *densidad de energía* también debe ser *uniforme*.

La *densidad de energía* es igual a la *energía por unidad de volumen del campo eléctrico*. El volumen del campo está dado por el producto del área A de las láminas del capacitor por la distancia d de separación. Por lo tanto:

$$w = densidad\ de\ energía = \frac{(1/2)\,Q\,V}{A\,d}$$

Pero: $$\frac{Q}{A} = \sigma = D = \varepsilon\,E \qquad y \qquad \frac{V}{d} = E$$

Por consiguiente:

$$\boxed{w = \frac{E\,D}{2} = \frac{D^2}{2\,\varepsilon} = \frac{\varepsilon\,E^2}{2}} \qquad (86)$$

Aunque las ecuaciones *(86)* se han deducido para el caso especial de un campo uniforme, pueden utilizarse para la densidad de energía en un punto cualquiera de un *campo no uniforme*, refiriéndose D y E al punto particular en cuestión.

Fuerza entre las Placas de un Capacitor:

Entre las cargas positivas y negativas localizadas sobre las placas de un capacitor, existe obviamente una fuerza de atracción. Esta fuerza puede calcularse aplicando la ley de Coulomb a un par de cargas infinitesimales situadas sobre las placas y realizando una doble integración para ambas placas. Si las placas se encuentran en equilibrio mecánico, la fuerza eléctrica ha de ser equilibrada por una fuerza mecánica. Esta última es proporcionada por las monturas o soportes de las placas en el caso de un capacitor de aire o por el propio dieléctrico en el caso de un capacitor con dieléctrico. La fuerza eléctrica entre las cargas situadas sobre las placas, es exactamente igual si está vacío el espacio entre las mismas o si está ocupado por un dieléctrico. Pero, si existe un dieléctrico entre las placas, queda sometido a un esfuerzo por el campo eléctrico, fenómeno que se denomina "electroestricción". Como consecuencia del esfuerzo en el dieléctrico, éste ejercerá fuerzas mecánicas sobre las placas. En definitiva, las placas están en equilibrio bajo la acción de un sistema en cual intervienen simultáneamente fuerzas electrostáticas y fuerzas elásticas, lo cual hace que el problema general resulte por demás complicado. El aspecto elástico se reduce al caso más sencillo si el dieléctrico es un fluido (líquido o gas), puesto que el único tipo de esfuerzo que puede existir en un fluido en reposo es una presión hidrostática.

Consideremos un *capacitor* compuesto de *dos placas* sumergidas en un *líquido*. Cada placa se encuentra en equilibrio bajo la acción de: a) las fuerzas de atracción electrostática, b) la fuerza ejercida por el líquido situado entre las placas, c) la fuerza ejercida por el líquido exterior a las placas y d) la fuerza ejercida por los apoyos.

Una forma de simplificar considerablemente los cálculos, es la de utilizar *consideraciones energéticas*. Para ello, carguemos las placas y desconectémoslas del circuito exterior, de modo que la *carga* Q sobre cada placa permanezca *constante*. Imaginemos que *se tira de las placas para separarlas ligeramente* y calculemos la *fuerza* *igualando el trabajo realizado al incremento de energía del sistema*.

Sea A el área de cada lámina, x la distancia entre ellas y F la fuerza ejercida sobre cada una por sus soportes. El trabajo dW realizado al producir un pequeño incremento dx en la distancia que las separa, es:

$$dW = F\, dx$$

Según las ecuaciones *(86)*, la densidad de energía en el fluido es:

$$w = \frac{D^2}{2\,\varepsilon}$$

siendo ε la permitividad del fluido. El volumen de fluido comprendido entre las láminas es $A\,x$, de modo que la *energía* W en el campo eléctrico será:

$$W = \frac{D^2}{2\,\varepsilon}\,A\,x$$

La *variación de energía* cuando x se incrementa en dx, es:

$$dW = \frac{D^2}{2\,\varepsilon}\,A\,dx$$

Igualando el trabajo realizado al incremento de energía, se tiene:

$$F\,dx = \frac{D^2}{2\,\varepsilon}\,A\,dx$$

y por lo tanto:

$$F = \frac{D^2}{2\,\varepsilon}\,A$$

Puesto que $D = \sigma = \frac{Q}{A}$, la *fuerza ejercida sobre cada placa* puede escribirse:

$$\boxed{F = \frac{Q^2}{2\,\varepsilon\,A}} \qquad (87)$$

Ejercicio Nº 46: Un condensador de 1 μF se carga a 100 V y un condensador de 2 μF se carga a 200 V. Luego se conectan en paralelo, uniendo entre sí las láminas positivas. Determinar las energías inicial y final.

$$(W_1)_i = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1\times10^{-6}\times100^2}{2} = 0{,}005 \ \ julios$$

$$(W_2)_i = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{2\times10^{-6}\times200^2}{2} = 0{,}04 \ \ julios$$

$$W_i = (W_1)_i + (W_2)_i = 0{,}005 + 0{,}04 = 0{,}045 \ \ julios$$

$$Q_f = Q_1 + Q_2 = C_1V_1 + C_2V_2 = 1\times10^{-6}\times100 + 2\times10^{-6}\times200 = 5\times10^{-4} \ \ culombios$$

$$W_f = \frac{1}{2}\frac{Q_f^2}{C_f} = \frac{(5\times10^{-4})^2}{2\times(1+2)\times10^{-6}} = 0{,}042 \ \ julios$$

Se observa que la energía final es menor que la inicial, siendo la diferencia la energía convertida en otras formas, como energía térmica (en el dieléctrico, en los hilos conductores, etc.) o de radiación (ondas electromagnéticas).

Ejercicio Nº 47: Al conectar un condensador sin dieléctrico de 360 nF a una fuente de energía eléctrica, se almacena en el mismo una energía de 1,85 x 10^{-5} J. Manteniendo conectado el condensador a la fuente de energía, se inserta una lámina de dieléctrico que ocupa totalmente el espacio entre las placas. Esto incrementa la energía almacenada en 2,32 x 10^{-5} J. Calcular: a) la diferencia de potencial entre las placas del condensador; b) la constante dieléctrica de la lámina insertada.

$$W_0 = \frac{1}{2}\, C_0\, V^2 \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{2\, W_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{2\,(1{,}85 \times 10^{-5})}{(360 \times 10^{-9})}} = 10{,}14\ V$$

$$W = \frac{1}{2}\, K C_0\, V^2 \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{2\, W}{C_0\, V^2} = \frac{2\,(1{,}85 \times 10^{-5} + 2{,}32 \times 10^{-5})}{(360 \times 10^{-9})\,(10{,}14)^2} = 2{,}25$$

Ejercicio Nº 48: Un capacitor plano sin dieléctrico de 5,8 μF tiene una separación de 5 mm entre sus placas y está cargado con una diferencia de potencial de 400 V. Calcular la densidad de energía en la región comprendida entre las placas.

$$E = V/d = 400/(5 \times 10^{-3}) = 8 \times 10^4\ \ V/m$$

$$w = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0\, E^2 = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12})\,(8 \times 10^4)^2}{2} = 0{,}0283\ \ J/m^3$$

Ejercicio Nº 49: La superficie de cada placa de un capacitor plano sin dieléctrico es de 2,6 x 10^{-3} m^2. La magnitud de la carga de cada placa es de 8,2 pC y la diferencia de potencial entre las mismas es de 2,4 V. Calcular la densidad de energía del campo eléctrico en el volumen comprendido entre las placas.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{8{,}2 \times 10^{-12}}{2{,}4} = 3{,}417\ \ pF$$

$$C = \varepsilon_0\, \frac{A}{d} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\varepsilon_0\, A}{C} = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12})\,(2{,}6 \times 10^{-3})}{3{,}417 \times 10^{-12}} = 6{,}734 \times 10^{-3}\ \ m$$

$$w = \frac{1}{2}\, \frac{C\, V^2}{A\, d} = \frac{(3{,}417 \times 10^{-12})\,(2{,}4)^2}{2\,(2{,}6 \times 10^{-3})\,(6{,}734 \times 10^{-3})} = 5{,}62 \times 10^{-7}\ \ J/m^3$$