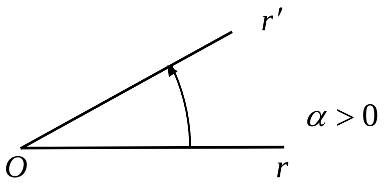
Capítulo 5: TRIGONOMETRÍA

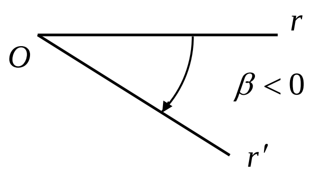
ÁNGULOS ORIENTADOS EN EL PLANO

Definición de ángulo:

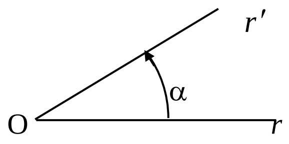
Un ángulo está definido por una semirrecta r, que gira alrededor de su origen O (punto fijo), desde la posición inicial r hasta la posición final r'.

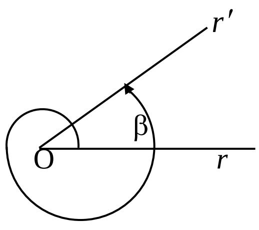
Si la rotación es en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj), el ángulo generado es positivo. Si la rotación es en sentido horario el ángulo generado es negativo. A continuación mostramos ambos casos.





Observemos que la semirrecta puede pasar a la posición final *r´* directamente, o después de dar 1, 2, 3, ó *k* giros completos en sentido positivo o negativo. Como los lados de estos ángulos coinciden auque no son iguales, pues difieren en uno o mas giros, se llaman congruente respecto de los giros.





Los ángulos α y β son congruentes respecto de giros porque difieren un giro.

En general, se puede expresar β como $\beta = \alpha + k$ giros

Sistemas de medición

Los sistemas de medición de ángulos más frecuentemente usados son el Sistema ***sexagesimal*** y el sistema *radial* o ***circular***.

Sistema *sexagesimal*.

La unidad de medida de éste sistema es el grado (º), definido como la noventa avas partes de un ángulo recto.

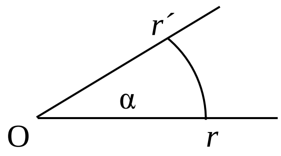
Así $1^{\circ} = \dfrac{R}{90}$ siendo *R* la medida del ángulo recto.

En éste sistema los submúltiplos de la unidad, son el minuto (‘) y el segundo en (‘’) definidos como la sesenta avas partes y 3600 avas partes respectivamente de la unidad. Es decir.

$$1' = \frac{1^{\circ}}{60} \qquad \text{y} \qquad 1'' = \frac{1^{\circ}}{3600} = \frac{1'}{60}$$

<u>Sistema *radial* o *circular*</u>

Este sistema se basa en la medición de los arcos de circunferencia, que se describe al girar la semirrecta *r* hasta *r´*.
Observemos la siguiente figura, la semirrecta *r* gira en torno a O hasta r´ generando el ángulo $\alpha = r\hat{O}r'$ y el arco de circunferencia $\overset{\frown}{r\,r'}$.



En el sistema radial o circular se define como la unidad de medida al radián, que es la medida del arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la circunferencia, a la que pertenece.
O sea, si la longitud de la semirecta $\overline{Or}$ es igual a la longitud del arco $\overset{\frown}{r\,r'}$, entonces el ángulo α se llama ***ángulo correspondiente a*** 1 ***radián***.

<u>Equivalencias entre el Sistema Sexagesimal y el Radial</u>

Dado que un giro completo en grados es 360º y medido en radianes es 2π entonces podemos escribir para cada ángulo medido en grados la siguiente correspondencia en radianes.

$\alpha = 360º \longrightarrow 2\pi$ radianes.

$\beta = 180º \longrightarrow \pi$ radianes.

$\gamma = 90º \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ radianes

Luego, para saber cualquier otra medida aplicamos regla de tres simple y obtenemos los resultados. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo ¿A cuántos grados sexagesimales equivale 1 radián?

<u>Solución</u>: Por regla de tres simple obtenemos:

π radianes $\longrightarrow$ 180º

1 radian $\longrightarrow$ $x = \dfrac{1\,\cancel{radián}\cdot 180º}{\pi\,\cancel{radián}} = \dfrac{180º}{3{,}14159} = 57{,}296º = 57º\ 17'\ 45{,}6''$

Ejercicio 1: Expresar las siguientes medidas en radianes.

1. 25º
2. 60º
3. 30º
4. 240,5º

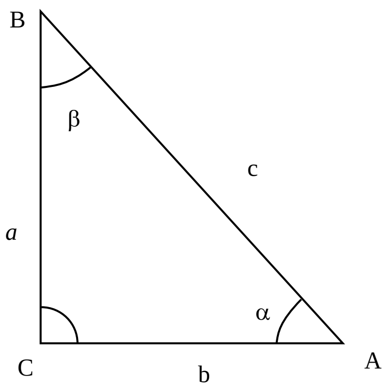
Ejercicio 2: Expresar las siguientes medidas en grados.

1. 1,5
2. 0,017453292
3. 15,84
4. 2

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

La geometría realiza un estudio de las distintas figuras geométricas reconociendo y estudiando los elementos que componen dicha figura, aunque no establece una relación estricta entre esos elementos.
La trigonometría hace un estudio exhaustivo de la relación entre los elementos fundamentales (lados y ángulos) de las figuras geométricas. De estas figuras consideramos una de las más simples como es el triángulo rectángulo (uno de sus ángulos es de 90º) relacionando sus lados y ángulos mediante "***las definiciones fundamentales de la Trigonometría***".

Sea el triángulo rectángulo $A\hat{B}C$
α = Uno de sus ángulos agudos.
a = Cateto opuesto al ángulo α
b = Cateto adyacente al ángulo α.
c = Hipotenusa del triángulo rectángulo.
$\alpha + \beta + 90º = 180º$ (suma de los ángulos interiores del triángulo rectángulo).
$\beta = 90º - \alpha$



Relacionemos el cateto opuesto al ángulo α, (a) la hipotenusa (c) y el ángulo α mediante la definición de la función.

1- $$sen\,a = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Relacionemos el cateto adyacente al ángulo α (b) con la hipotenusa (c) y el ángulo α, mediante la definición de la función.

2- $$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Relacionemos los catetos del triángulo rectángulo (a) y (b) mediante la definición de la función.

3- $$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Las relaciones recíprocas (no inversas) de las anteriores definen las siguientes funciones.

4- $$cosec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$

5- $\quad sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$

6- $\quad cotg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Además podemos relacionar los tres lados entre sí por el teorema de Pitágoras.

$a^2 + b^2 = c^2$ dividiendo por c^2 en ambos miembros $\left(\dfrac{a}{\epsilon}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c}\right)^2 = 1$ reemplazando en el primer miembro por la funciones sen y cos nos queda

7- $\quad (sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$

Notemos también que $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ (8), y podemos escribir, que conocida la función trigonométrica seno podemos calcular las cinco funciones restantes.

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$ la obtenemos de (7).

$tg\alpha = \pm\dfrac{sen\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\alpha}}$ la obtenemos de (7) y (8)

Y las tres restantes haciendo las recíprocas del seno α, coseno α y tangente α

Ejercicio 3: Hallar las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos.

1. $\dfrac{3}{2}\pi$ **2.** $\dfrac{\pi}{6}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Resolución de Triángulos Rectángulos

Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones, en parte porque son muchas las situaciones en el mundo real que los comprenden. Antes de resolver algunos problemas, observemos que hay seis medidas asociadas con cada triángulo rectángulo; la medida de sus tres ángulos en grados y las medidas de sus tres lados. Debido a que el triángulo es rectángulo siempre conocemos una de esas medias (uno de los ángulos es de 90º). Si se dan "dos" de las cinco medidas restantes, incluyendo la medida de por lo menos un lado, entonces podemos calcular las otras tres por medio de:

a- Las funciones trigonométricas sen α, cos α y tg α.

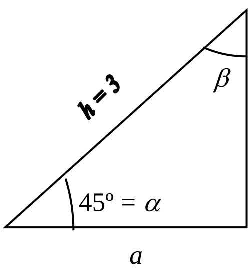
b- La suma de los ángulos internos.

c- El teorema de Pitágoras.

Después de haber determinado las seis medidas, decimos que el triángulo rectángulo esta resuelto.

Ejemplos: A continuación damos cuatro los cuatro casos que se pueden dar en trigonometría

1er caso) **<u>Datos</u>**: Un ángulo y la hipotenusa



<u>Hallamos</u>: Un ángulo y los dos lados

b

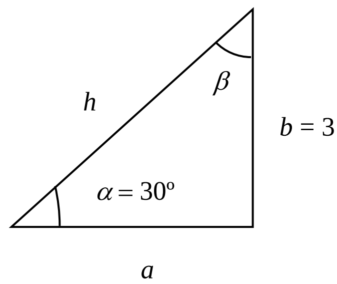
$\beta = 90º - \alpha = 45º$

$a = h \cos 45º = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$b = h \operatorname{sen} 45º = 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2do caso) **<u>Datos</u>**: Un ángulo y un lado

<u>Hallamos</u>: Un ángulo, un lado y la hipotenusa



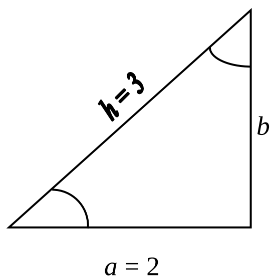
$\beta = 90º - \alpha = 60º$

$\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg} 30º \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{b}{\operatorname{tg} 30º} = 2\sqrt{3} = 3{,}464$

$\dfrac{b}{h} = \operatorname{sen} 30º \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{b}{\operatorname{sen} 30º} = 2b = 4$

3er caso) **<u>Datos</u>**: La hipotenusa y un lado

<u>Hallamos</u>: Un lado y los dos ángulos



$b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2{,}236$

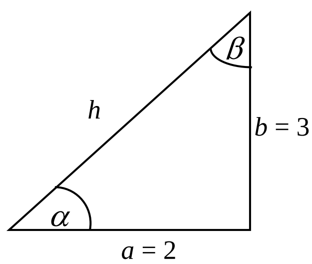
$\cos \alpha = \dfrac{a}{h} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc}\cos \left(2/3\right) =$

$\alpha = 48º{,}19 = 48º\ 11'\ 24''$

$\beta = 90º - 48º11'\ 24'' = 41º48'36''$

4to caso) **<u>Datos</u>**: Dos lados.

<u>Hallamos</u>: Los dos ángulos y la hipotenusa.

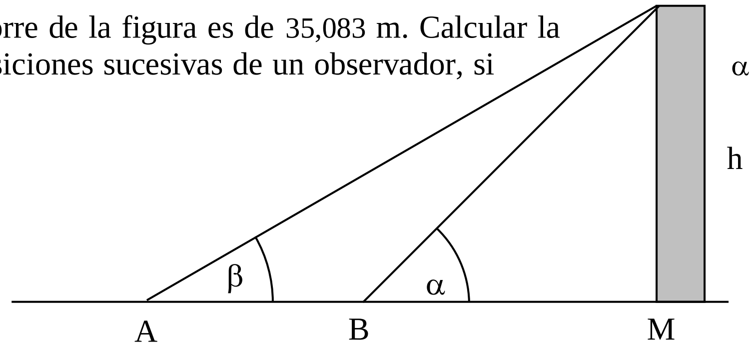


$h = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{9+4} = 3{,}6$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\left(3/2\right) = 56º , 31 = 56º\ 18’\ 36’’$$

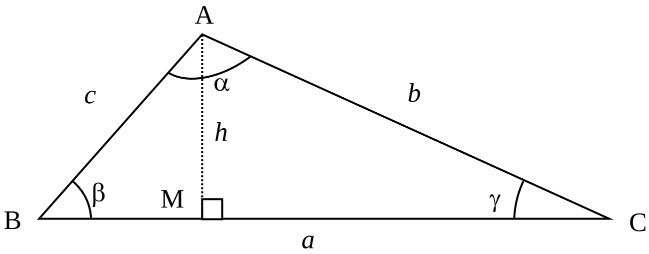
$$\beta = 90º - 56º18'36'' = 33º41'24''$$

Ejercicio 6: La altura de la torre de la figura es de 35,083 m. Calcular la distancia BD entre las dos posiciones sucesivas de un observador, si α = 50º 12’ y β = 32º 54’



Teorema del seno y teorema del coseno

Si tenemos un triángulo del cuál conocemos tres datos (entre los cuales figura la longitud de un lado) podemos calcular todas las medidas de sus elementos.
Estableceremos dos fórmulas generales.
Consideremos un triángulo de vértices A, B, C. Notemos con α, β y γ a los ángulos correspondientes a los tres vértices, y con *a*, *b* y *c* a las longitudes de los lados opuestos a A, B y C (ver Figura siguiente)



Trazamos la altura correspondiente a un vértice, por ejemplo al vértice A, y sea *h* la longitud de esta altura. Analizando los dos triángulos rectángulos producidos: el AMB y el AMC tenemos lo siguiente:

$$sen\,\beta = \frac{h}{c} \qquad\qquad sen\,\gamma = \frac{h}{b}$$

luego

$$\textbf{(I)} \quad h = c \cdot sen\,\beta \qquad \text{y} \qquad \textbf{(II)} \quad h = c \cdot sen\,\beta$$

Igualando **(I)** y **(II)** y pasando *b* y *c* como denominadores tenemos

$$\textbf{(III)} \quad \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\gamma}{c}$$

Igualmente, si ahora consideramos la altura correspondiente al vértice C, obtenemos,

$$\textbf{(IV)} \quad h = a \cdot sen\,\beta \qquad \text{y} \qquad \textbf{(V)} \quad h = b \cdot sen\,\alpha$$

Igualando **(IV)** y **(V)** y pasando *a* y *b* como denominadores tenemos

$$\textbf{(VI)} \quad \frac{sen\,\beta}{b} = \frac{sen\,\alpha}{a}$$

Igualando **(VI)** y **(III)** tenemos

$$\frac{sen\,\alpha}{a} = \frac{sen\,\gamma}{b} = \frac{sen\,\beta}{c} \qquad \textbf{(*)}$$

Este resultado es conocido como:

<u>**Teorema del seno**</u>: *En todo triángulo, las razones obtenidas al dividir la longitud de cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales*.

Utilizando la Figura anterior podemos deducir otra fórmula que podrá sernos muy útil en la búsqueda de los elementos de un triángulo.
Llamemos *x* a la longitud del segmento MB e *y* a la longitud del segmento MC; aplicando Pitágoras a los triángulos rectángulos AMB y AMC, obtenemos:

Por Pitágoras

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + y^2 = h^2 + (a - x)^2 = \\ &= h^2 + a^2 + x^2 - 2ax = \\ &= (h^2 + x^2) + a^2 - 2ax \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ax \qquad \textbf{(VII)} \end{aligned}$$

pero, como $\frac{x}{c} = \cos\beta \quad \Rightarrow \quad x = c \cdot \cos\beta$ y reemplazando *x* en **(VII)** resulta:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad \textbf{(**)}$$

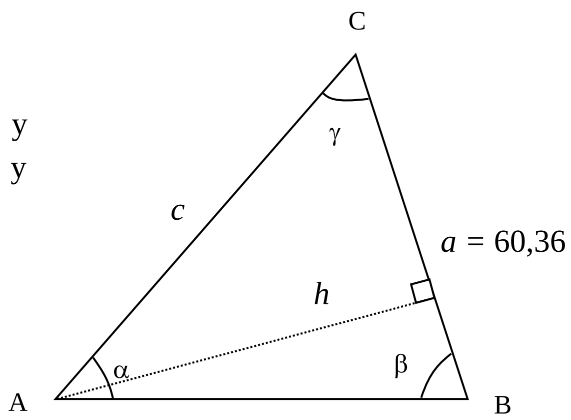
La fórmula **(**)** se denomina:

<u>Teorema del Coseno</u>: *En todo triángulo, la longitud de uno de sus lados elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo que forman.*

Al tratar de resolver un triángulo pueden servir tanto la fórmula (*) como la (**), pero una buena elección puede ahorrar mucho trabajo y producir menores errores de cálculo.
Además la elección de la fórmula depende mucho de los datos del triángulo que tengamos.

Ejemplo 1.

Sabiendo que el lado $a = 60{,}36\,\text{cm}$, $\beta = 62º26'$ y $\gamma = 70º24'$ calcular las longitudes de los otros lados y el área del triángulo (ver figura siguiente)



<u>Solución</u>:
Como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tenemos que $\alpha = 47º10'$ y luego, usando (*), despejando y resolviendo:

$$b = \frac{a\ sen\beta}{sen\alpha} = 60{,}36.\frac{0{,}8865}{0{,}7333} \cong 72{,}96cm$$

y

$$c = \frac{a\ sen\gamma}{sen\alpha} = 60{,}36.\frac{0{,}94}{0{,}7333} \cong 77{,}54cm$$

Para calcular el área, si tomamos como base el lado *a*, entonces la altura es:

$$h = b \cdot sen\,\gamma$$

y luego

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot sen\gamma = \frac{1}{2}.60{,}36 \cdot 72{,}96 \cdot 0{,}94 \cong 2070cm^2$$

Ejemplo 2. Dados $a = 20$, $b = 30$ y $\gamma = 11º$, hallar los demás elementos del triángulo.

<u>Solución</u>.

En este caso, conviene aplicar la fórmula (**), y obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 400 + 900 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 11^{o} = 122{,}05$$

$$c = \sqrt{122{,}05} \cong 11$$

Para obtener las medidas de α y β empleamos nuevamente la ecuación (**):

$$\cos\alpha = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2bc} = \frac{(900 + 121 - 400)}{660} = 0{,}94$$

Como $\cos\alpha > 0$, esto nos dice que α es un ángulo del primer cuadrante y por lo tanto, $\alpha \cong 19^{o}47'42''$ con lo cual:

$$\beta = 180^{o} - \left(19^{o}47'42'' + 11^{o}\right) = 149^{o}12'18''$$

Para calcular β podríamos también usar:

$$\cos\beta = \frac{\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{2ac} = \frac{(400 + 121 - 900)}{440} \cong -0{,}86$$

$$\arccos\beta \cong 149^{o}\ 12'\ 18''$$

que confirma nuestro cálculo anterior de β

Práctica Capítulo 5

Ejercicio 1: Complete el siguiente cuadro

Grados sexagesimales.	0			60		180	270	360
Radianes		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$			

Ejercicio 2: ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a $\frac{3}{10}\pi$?

a) 93º

b) –27º

c) 27º

d) 54º

e) –56º

Ejercicio 3: ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a $\frac{\pi}{9}$ radiales?

a) 10º

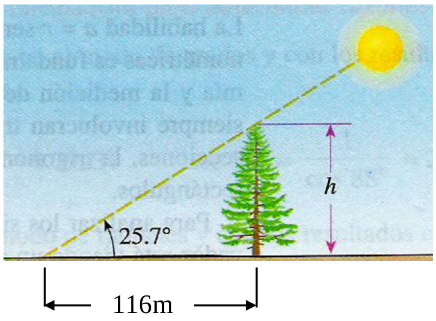
b) 20º

c) 30º

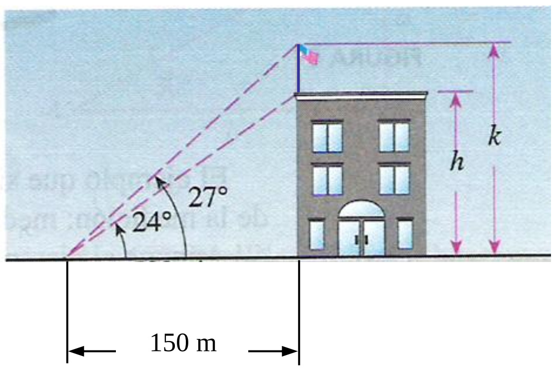
d) 57,3º

e) 45º

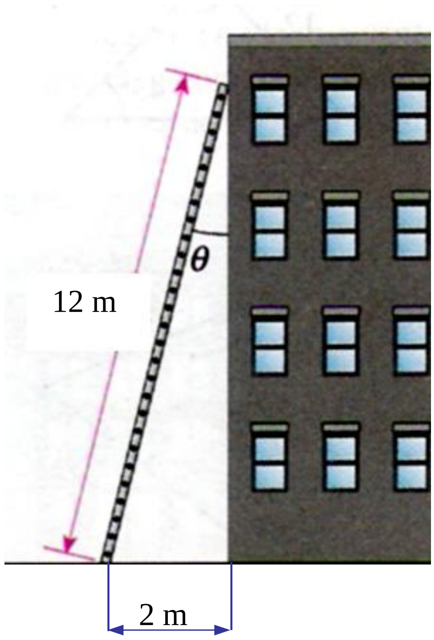
Ejercicio 4: Un pino gigante proyecta una sombra de 160 m de largo. Determine la altura del árbol si el ángulo de elevación de Sol es de 25.7º. Como muestra la siguiente figura.



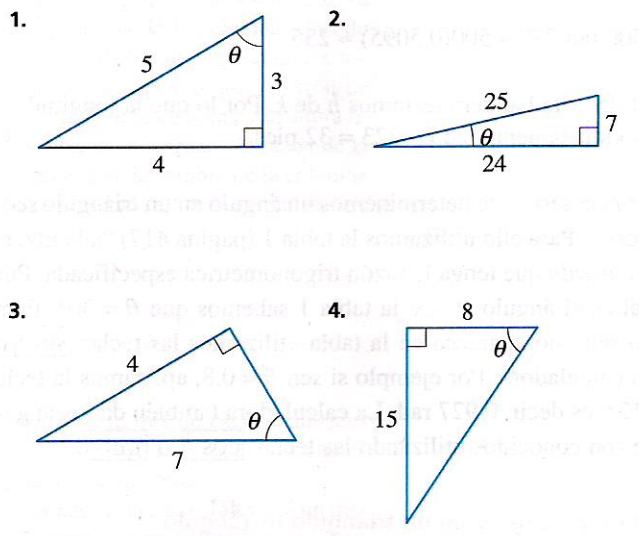
Ejercicio 5: Desde un punto sobre el suelo a 150m de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de 24º y que el ángulo de elevación hasta la parte superior de la bandera del edificio es de 27º como muestra la figura. Determine la altura del edificio y la longitud del asta de la bandera.



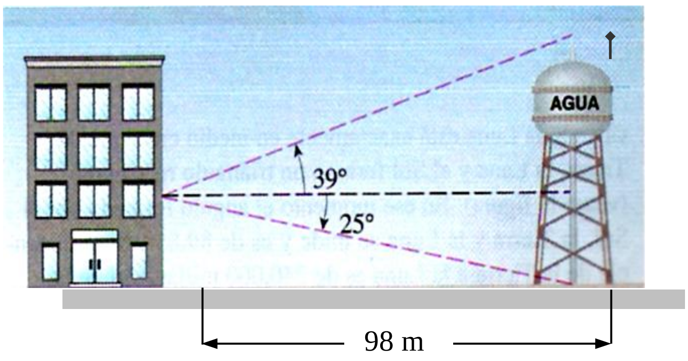
Ejercicio 6: Una escalera de 12 m de largo está apoyada contra un edificio como muestra la figura. Si la base de la escalera está a 2m de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?.



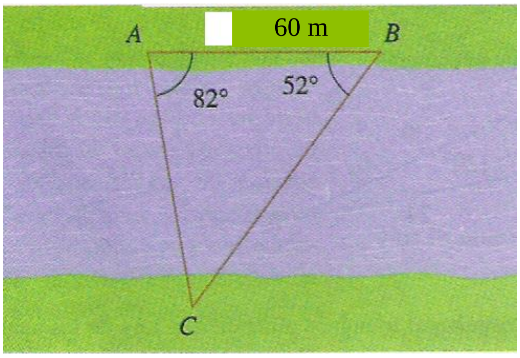
Ejercicio 7: Determine los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo θ en los triángulos siguientes.



Ejercicio 8: Un depósito de agua está a 98 m de un edificio (ver figura). Desde una ventana del edificio se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del depósito es de 39º y el ángulo de depresión a la parte inferior es de 25º.¿Cuál es la altura del depósito? ¿A qué altura está la ventana?

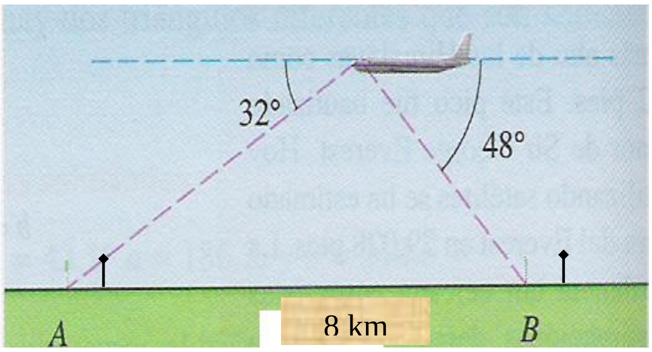


Ejercicio 9: Para encontrar la distancia de un lado al otro de un río, una topógrafa selecciona los puntos A y B que están separados 60 m de un lado del río (ver figura). Entonces ella escoge un punto de referencia C del lado opuesto del río y determina que el ángulo $BAC \cong 82º$ y el ángulo $ABC \cong 52º$. Calcule aproximadamente la distancia de A a C.



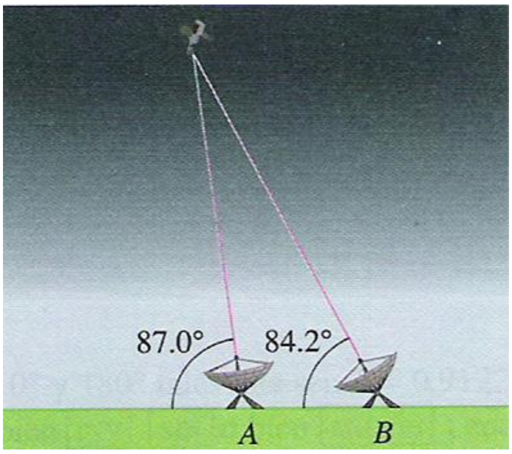
Ejercicio 10: Un piloto está volando sobre una ruta recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a dos postes indicadores de kilómetros (Km.), a 8 km. de distancia entre sí tienen los valores de 32º y 48º, según se observa en la figura.

a) Determine la distancia del aeroplano al punto *A*.
b) Determine la altitud del aeroplano.

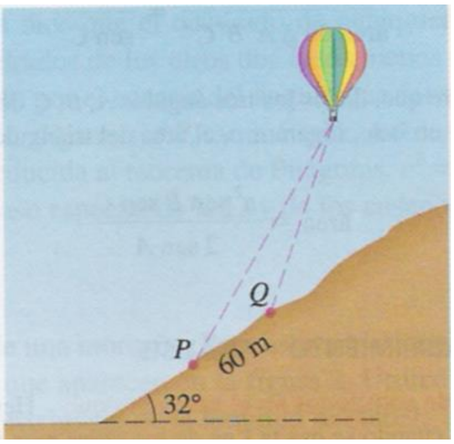


Ejercicio 11: La órbita de un satélite alrededor de la Tierra, hace que pase directamente por encima de dos estaciones de rastreo que están separadas 80.5km. Cuando el satélite está entre las dos estaciones, se miden los ángulos de elevación desde *A* y desde *B*, y éstos son de 87º y 84.2º, respectivamente.

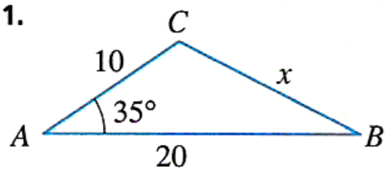
a) ¿A qué distancia está el satélite de la estación *A*?.
b) ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está el satélite?.

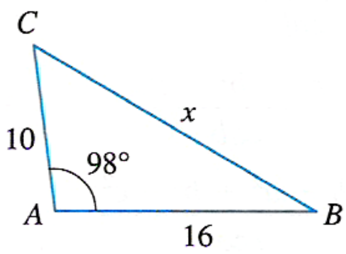


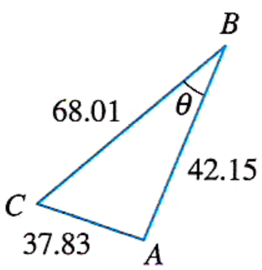
Ejercicio 12: Los observadores P y Q están en la ladera de una colina que forma un ángulo con la horizontal de 32º. El observador en P determina que su ángulo de elevación a un globo aerostático es de 62º, en el mismo momento, el observador en Q mide su ángulo de elevación al globo y es de 71º. Si P está ubicado 60m colina debajo de Q, determine la distancia de Q al globo.

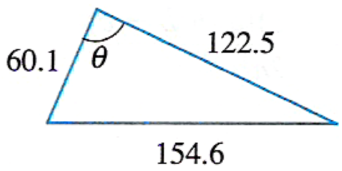


Ejercicio 13: Utilice la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ en cada uno de los siguientes triángulos

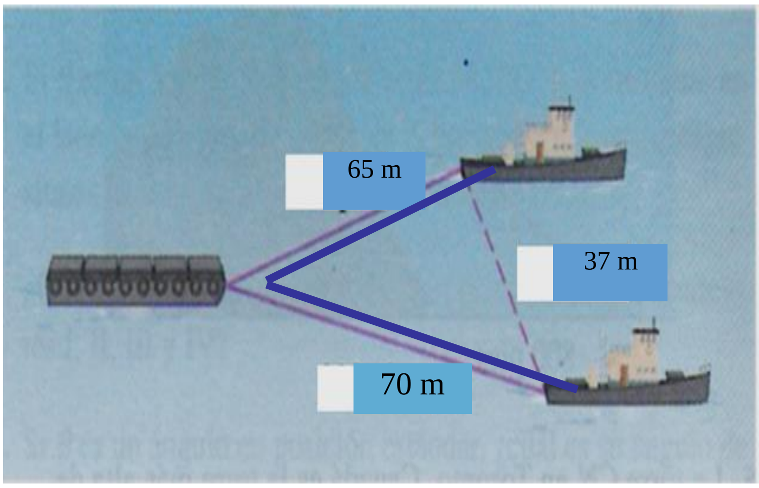
1.


2.


3.


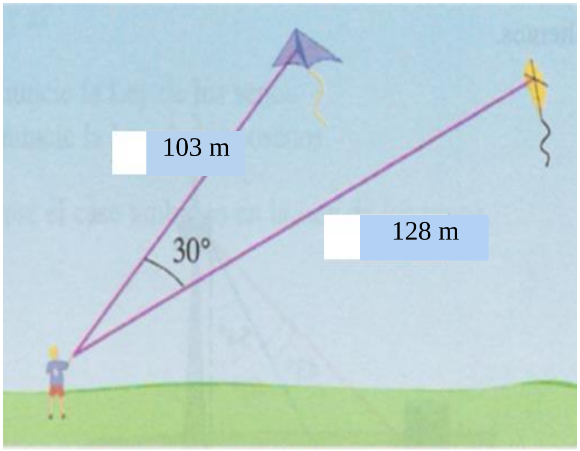
4.


Ejercicio 14: Dos remolcadores que están separados 37 m tiran de una barcaza, como se muestra. Si la longitud de un cable es de 65m y la del otro es de 70m, determine cuál es el ángulo que forman los cables.



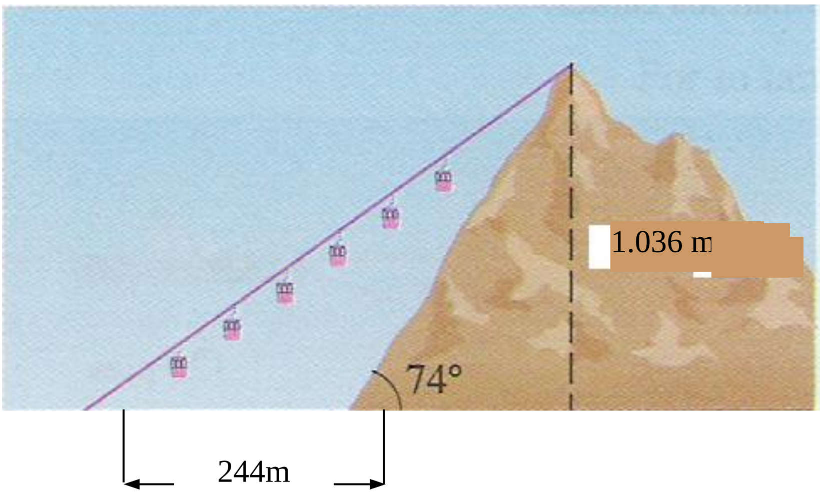
Ejercicio 15: Un niño está haciendo volar dos barriletes simultáneamente. Una de ellas tiene 103 m de cordón y la otra 128 m. Se supone que el ángulo entre los dos cables es de 30º.

Estime la distancia entre los barriletes.



Ejercicio 16: Una montaña muy abrupta tiene una inclinación de 74º con la horizontal y se eleva 1.036 m por encima del terreno circundante. Se debe instalar un funicular desde un punto a 244 m de la base hasta la cima de la montaña tal y como se muestra.

Determine cuál es la longitud más corta de cable necesario.



Ejercicio 17: La torre CN en Toronto, Canadá es la torre más alta del mundo. Una señora en la plataforma de observación a 350 m sobre el nivel del piso desea determinar la distancia entre dos marcas sobresalientes sobre el piso. Observa que el ángulo entre las líneas de visión a estas marcas, es de 43º, también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de visión de una de las marcas es de 62º, y a la otra es de 54º. Determine la distancia entre las dos marcas sobresalientes.