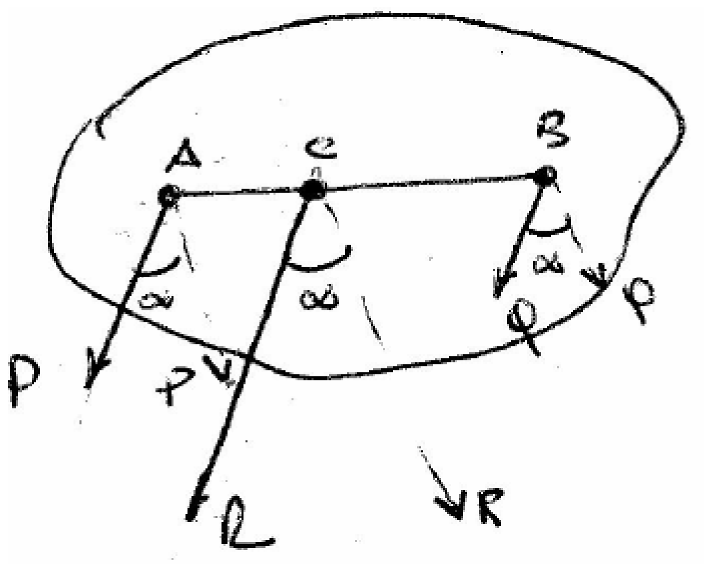
CENTRO DE FUERZAS PARALELAS

Sean P y Q dos fuerzas paralelas (figura), aplicadas a un cuerpo rígido en los puntos A y B su resultante R será, por lo tanto, paralela a las fuerzas dadas, igual a su suma algebraica y su recta de acción cortará a la recta AB en un punto C tal que:



El momento de la Resultante respecto de su punto de aplicación es cero, ya que la resultante pasa por ese punto y no hay distancia de momento.

Entonces el MR = 0

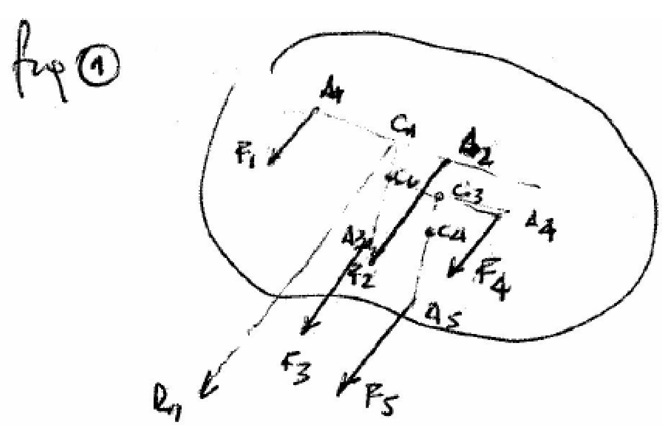
Por Varignon

$$MR = Q \times BC - P \times AC$$

Por lo tanto $Q \times BC = P \times AC = 0$ y $\dfrac{Q}{P} = \dfrac{AC}{BC}$

Si las fuerzas P y Q giran alrededor de sus puntos de aplicación, cualquier ángulo $\propto$ en su plano de acción, la resultante R girará el mismo ángulo $\propto$ y su recta de acción pasará nuevamente por el punto C. De esta manera, vemos que el punto “C” es el único punto por el cual pasa la resultante de las fuerzas P y Q, aplicadas en los puntos A y B, cualquiera sea la dirección dada a estas fuerzas. Se denomina a este punto el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS para el caso de dos fuerzas paralelas.

Consideremos ahora el caso de un sistema de fuerzas paralelas sean A1, A2, A3... An cualquier sistema de puntos dados en un cuerpo rígido, figura 1.



Al cual se le aplican las fuerzas paralelas F1, F2,….Fn. F1 y F2 son reemplazadas por su resultante R1, aplicado en C1 situado sobre la recta de acción A1 A2, de manera tal que se cumpla la relación

$$\frac{F2}{F1} = \frac{A1C1}{A2C1}$$

De la misma manera, componiendo la resultante parcial R1 aplicada en C1, con la fuerza R3 aplicada en A3, llegamos a la conclusión de que el centro C2 de las tres fuerzas paralelas F1, F2, F3, aplicadas respectivamente en los puntos A, A2 y A3 cae sobre la recta C1 A3 en una posición tal que:

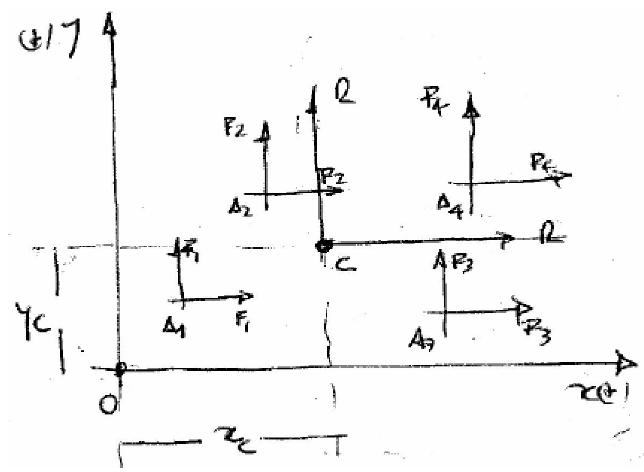
$$\frac{F3}{(F1 + F2)} = \frac{C1C2}{C2A3}$$

Puede continuarse este procedimiento hasta que se haya encontrado el centro de “n” fuerzas paralelas aplicadas en los “n” puntos dados.

Vemos que hay UN PUNTO Y SÓLO UNO, POR EL CUAL PASA SIEMPRE LA RESULTANTE, CUALQUIERA SEA LA DIRECCIÓN SEGÚN LA CUAL ACTÚAN LAS FUERZAS PARALELAS. A ESTE PUNTO SE LO DENOMINA “CENTRO DE FUERZAS PARALELAS”, para el sistema dado de fuerzas, aplicado en el sistema de puntos dados.

DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE FUERZAS EN FORMA ANALÍTICA

Sean A1 A2 A3… An cualquier sistema de puntos pertenecientes al mismo plano de un cuerpo rígido y sean X1, X2, X3, …, Xn e Y1, Y2, Y3, …, Yn las coordenadas de estos puntos con referencia a los ejes ortogonales x e y, tomados en el plano de los puntos. Para hallar el CENTRO C de las fuerzas paralelas, para un sistema de fuerzas F1, F2, F3, …, Fn aplicadas a esos puntos y actuando en cualquier dirección, imaginemos, en primer lugar, que las fuerzas actúan PARALELAMENTE AL EJE DE LAS Y. En ese caso, tenemos un sistema de fuerzas en un plano y el brazo XC de su resultante puede hallarse de la siguiente manera:



$$Xc = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Fi\,.\,xi)}{\sum_{i=1}^{n}Fi}$$

Siendo $\sum_{i=1}^{n}Fi$ la resultante (R) del sistema de fuerzas paralelas

Hagamos girar todas las fuerzas en el plano de la figura hasta actuar PARALELAMENTE AL EJE DE LAS X, en este caso el brazo YC puede hallarse de la siguiente manera:

$$Yc = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Fi\,.\,yi)}{\sum_{i=1}^{n}Fi}$$

el centro de fuerzas paralelas, de cualquier número de fuerzas aplicadas a un sistema de puntos dados, es INDEPENDIENTE DE LA DIRECCIÓN SEGÚN LA CUAL ACTÚAN LAS FUERZAS. Se concluye que los BRAZOS DE MOMENTOS X_C e Y_C representan LAS COORDENADAS DEL CENTRO C de fuerzas PARALELAS.

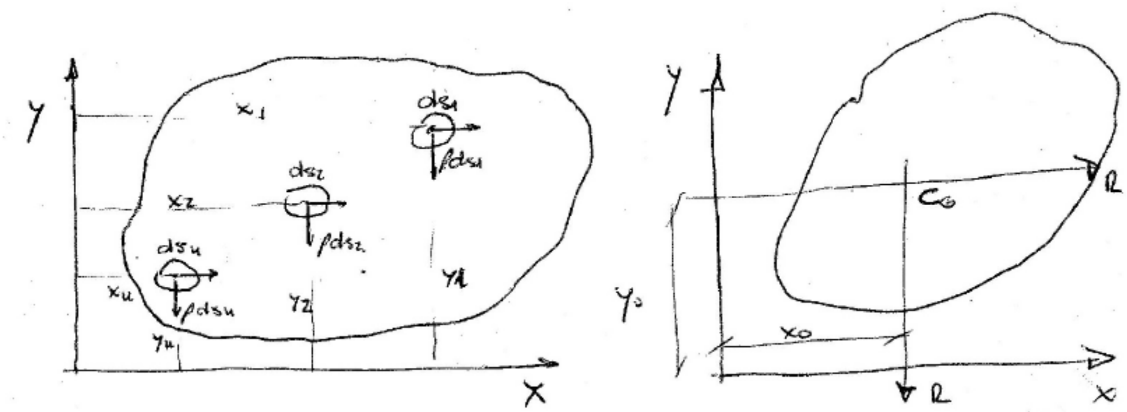
Todas las fuerzas Fi debe ser consideradas como POSITIVAS O NEGATIVAS, SEGÚN ACTÚEN EN LA DIRECCIÓN POSITIVA O NEGATIVA DEL EJE AL CUAL SEA PARALELA.

De las expresiones A y B se deduce que el CENTRO DE FUERZAS PARALELAS, PARA CUALQUIER SISTEMA DADO DE FUERZAS, APLICADAS A UN SISTEMA DE PUNTOS DADO EN UN PLANO, DEPENDE SOLO DE LAS “POSICIONES DE LOS PUNTOS” Y DE LAS “MAGNITUDES RELATIVAS DE LAS FUERZAS”.

CENTRO DE GRAVEDAD

Hasta aquí, nada se dijo de la naturaleza de las fuerzas que también pueden ser cualquiera, pero en el caso de que estas fuerzas SEAN GRAVITATORIAS, el CENTRO DE FUERZAS RECIBE EL NOMBRE DE “CENTRO DE GRAVEDAD”.
Todos los métodos gráficos estudiados para determinar el CENTRO DE FUERZAS SON VALIDOS PARA DETERMINAR EL CENTRO DE GRAVEDAD.

- DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GRAVEDAD
Supongamos que queremos determinar el centro de gravedad de una SUPERFICIE MATERIAL PLANA, que suponemos de ESPESOR CONSTANTE E INFINITAMENTE PEQUEÑO, HOMOGÉNEO, cuyo peso por unidad de superficie sea p [9/cm2] y que referimos a un par de ejes x e y.-



Si consideramos dividido, la superficie en un gran número de superficies más pequeñas, el peso de cada uno de esos elementos de superficie también pequeño será:

$$Pi = \rho \times dSi$$

Si tomamos momentos estáticos de todas esas fuerzas con respecto al eje “y” y aplicamos Varignon, obtenemos:

$$\rho \times dS1 \times x1 + \rho \times dS2 \times x2 + \cdots + \rho \times dSu \times xu =$$

$$= \underbrace{(\rho \times dS1 + \rho \times dS2 + \cdots + \rho \times dSu)}_{P} \times x0$$

Si sacamos ρ como factor común

$$\sum_{i=1}^{u} dSi \times xi \ = S \times x0$$

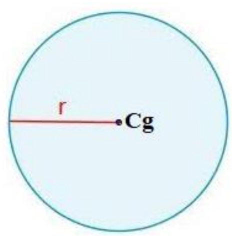
$$x0 = \frac{\sum_{i=1}^{u} dSi \times xi}{S}$$

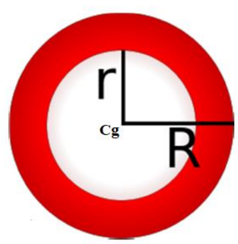
Si ahora giramos las fuerzas 90º y planteamos la misma ecuación de momentos pero que será respecto al eje x obtendremos la otra coordenada del CENTRO DE GRAVEDAD, lo que por analogía estará dada por la expresión:

$$y0 = \frac{\sum_{i=1}^{u} dSi \times yi}{S}$$

Como conclusión podemos decir que, cuando tenemos una figura compuesta (conjunto de figuras geométricas conocidas), las coordenadas del centro de gravedad de las misma se pueden determinar considerando las superficies de cada una de esas figuras geométricas conocidas y las distancias desde los centros de gravedad de esas figuras geométricas a los ejes “x”, “y”.
Cabe destacar que el centro de gravedad de una figura puede ser un punto material o inmaterial. Por ejemplo: el centro de gravedad de una superficie circular coincide con el centro geométrico de dicha superficie, siendo este un punto material (es parte de la materia componente de la superficie). En el caso de una corona circular, el centro de gravedad coincide con su centro geométrico; pero en este caso el punto es inmaterial, porque no existe materia en dicho punto.

Círculo





Corona Circular

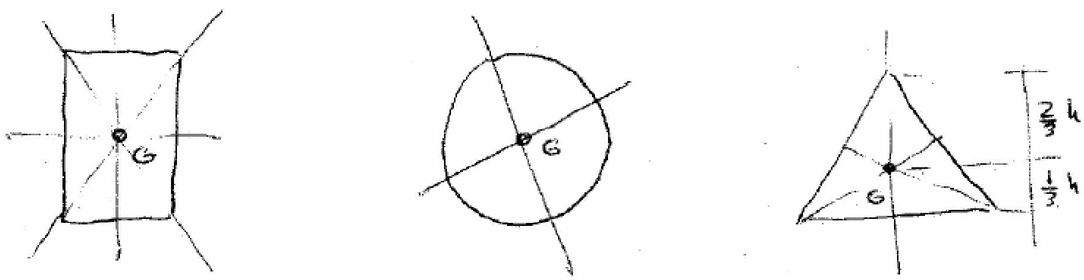
<u>Consideración para las figuras geométricas con ejes de simetría</u>:

- Una superficie que admita un eje de simetría tiene su centro de gravedad sobre dicho eje de simetría.

- Por extensión del razonamiento si la superficie admite dos ejes de simetría el centro de gravedad deberá pertenecer a ambas, lo que significa que se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría.

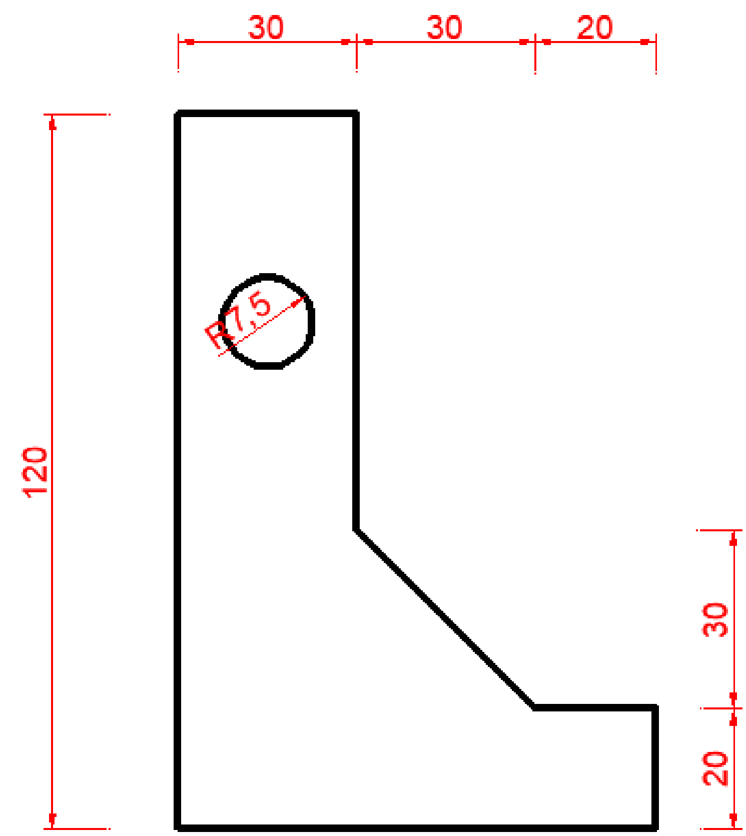
***Eje de simetría**: Línea imaginaria que divide una figura, un cuerpo u otra cosa en dos partes iguales y simétricas.*

Esta conclusión nos permite ubicar en "forma rápida la posición del centro de gravedad" en todas aquellas superficies cuyas formas se corresponden con superficies geométricas simples y muchas de las secciones de los materiales que se usan en la práctica responden a esta forma de superficie.



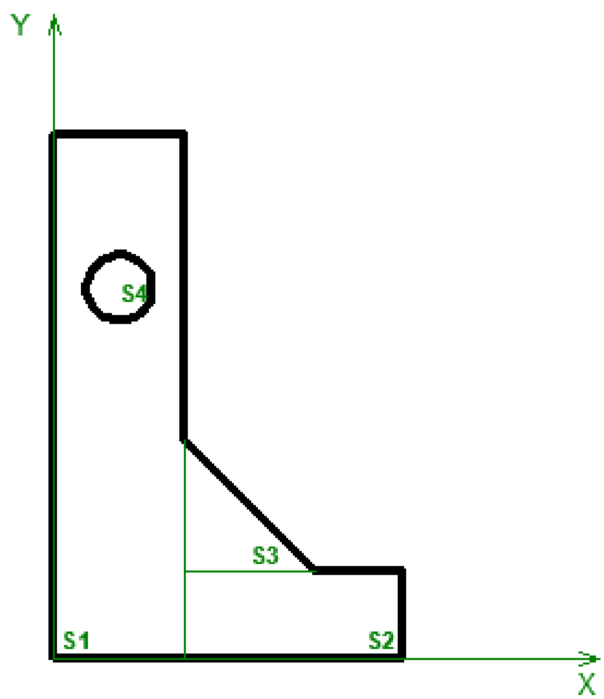
Ejemplo numérico:

Dada la siguiente figura compuesta, con sus dimensiones, determinar las coordenadas del centro de gravedad (X_G e Y_G). Las medidas están dadas en centímetros.



Pasos a seguir

1) Referir la figura compuesta a ejes coordenados (X, Y). Conviene ubicar los ejes de tal manera que la figura total se encuentre en el primer cuadrante
2) Dividir la figura compuesta en distintas figuras geométricas conocidas

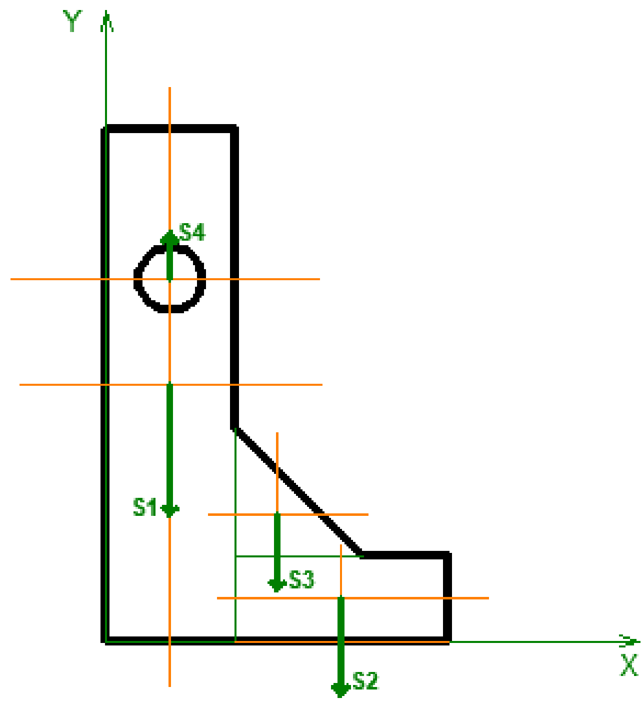


3) Determinar las superficies de las figuras geométricas simples en que se ha dividido la figura total

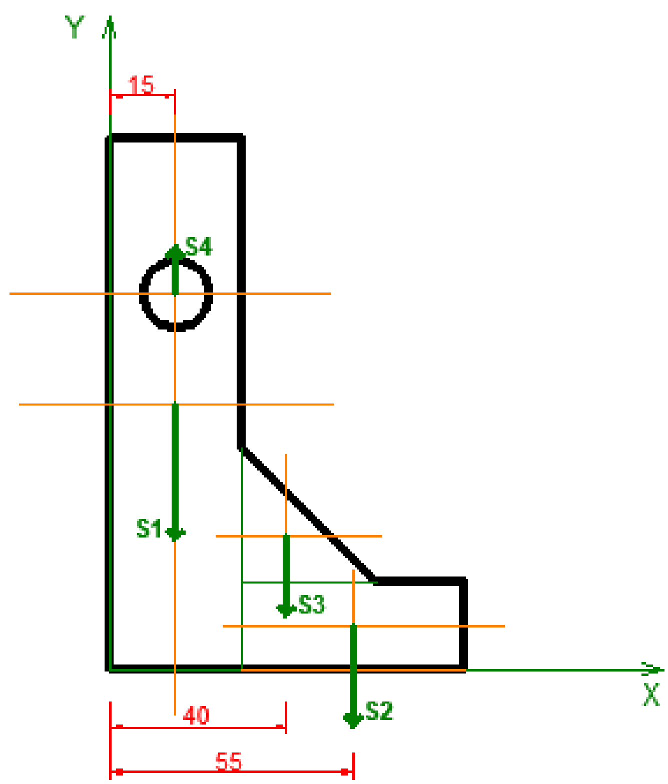
- Superficie del rectángulo 1: $S1 = b \times h = 30\ cm \times 120\ cm = 3600\ cm^2$
- Superficie del rectángulo 2: $S2 = b \times h = 50\ cm \times 20\ cm = 1000\ cm^2$
- Superficie del triángulo 3: $S3 = (b \times h)/2 = (30\ cm \times 30\ cm)/2 = 450\ cm^2$
- Superficie del círculo 4 (Agujero): $S4 = (\pi \times d^2)/4 = (\pi \times (15\ cm)^2)/4 = 176{,}71\ cm^2$
- Superficie Total de la Figura: ST = S1 + S2 + S3 - S4 = 4873,29 cm2

La superficie del círculo se resta ya que es un agujero en la superficie total

4) Colocar los vectores representativos de esas superficies en los centros de gravedad de cada una de las figuras simples.
   El vector S4 es contrario a los demás ya que es un área inmaterial, no existe en la figura total (es un agujero). Los demás vectores tienen el mismo sentido porque son áreas materiales.



5) Determinar las distancias de esos vectores al eje “Y”



Distancias al eje “Y”

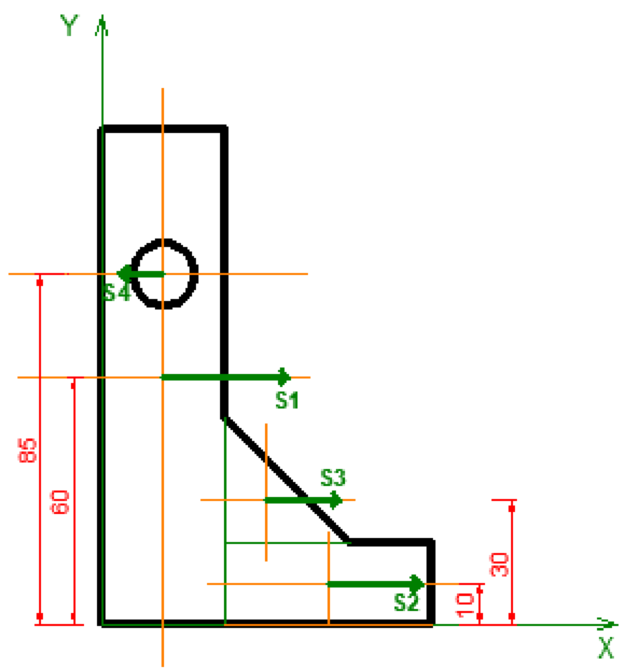
X1 = 15 cm
X2 = 55 cm
X3 = 40 cm
X4 = 15 cm

6) Cálculo de la distancia del Centro de Gravedad en dirección "X" (X_G)

$$XG = \frac{3600\ cm^2 x 15\ cm + 1000\ cm^2 x 55\ cm + 450\ cm^2 x 40\ cm - 176{,}71\ cm^2 x 15\ cm}{4873{,}29\ cm^2}$$

$$XG = 25{,}52\ cm$$

7) Repetir los pasos para determinar la coordenada en "Y" del centro de gravedad; para ello se giran los vectores 90° (en dirección horizontal) y se determinan las distancias al eje "X". (Ver figura)



Distancias al eje "X"

Y1 = 60 cm
Y2 = 10 cm
Y3 = 30 cm
Y4 = 85 cm

8) Cálculo de la distancia del Centro de Gravedad en dirección "Y" (Y_G)

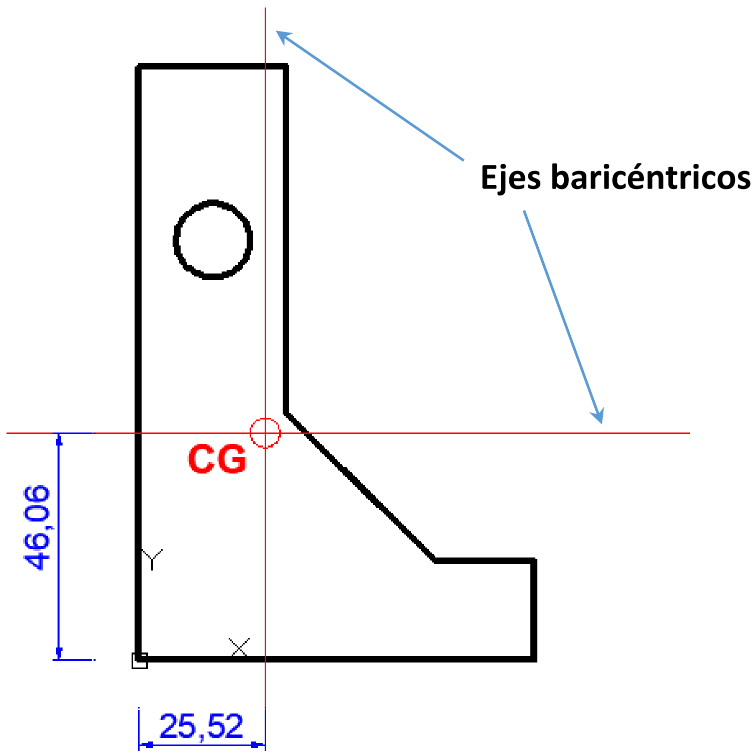
$$YG = \frac{3600\ cm^2 x 60\ cm + 1000\ cm^2 x 10\ cm + 450\ cm^2 x 30\ cm - 176{,}71\ cm^2 x 85\ cm}{4873{,}29\ cm^2}$$

$$XG = 46{,}06\ cm$$

RESULTADO FINAL

Ubicación del centro de gravedad de la figura total

CG (25,52 cm; 46,06 cm)



Ejes baricéntricos: son ejes paralelos a los ejes ortogonales originales (X, Y), pero que pasan por el baricentro o centro de gravedad de la figura.