UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA
TECNICATURA SUPERIOR EN MECATRÓNICA

Docente: Ing. Dolzani Guillermo Ezequiel
Alumno: ………..

En el presente trabajo práctico se establecen conceptos teóricos y técnicos, los cuales ayudarán al alumno para poder resolver los ejercicios y así comprender y entender los conceptos básicos del algebra lineal.

Definición: Se llama VECTOR EN EL PLANO a un segmento de recta dirigido.
El punto inicial de la flecha (a) se llama "cola" del vector, y el punto terminal (b) se llama "cabeza" del vector.

Definición: Dos vectores **u** y **v** son IGUALES si y sólo si, tienen la misma dirección, magnitud y sentido.

Definición: Se llama NORMA de un vector **v** a la longitud del segmento que lo define. Se denota $||\mathbf{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Definición: Se llama VECTOR NULO al vector cuya norma es cero.

Se denota $o = (0 , 0) \Rightarrow \| o \| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$

Definición: Se llama VECTOR OPUESTO de **v** al vector que tiene la misma magnitud y dirección de **v** pero diferente sentido. Se denota **-v** (figura 4.6)
Si $\mathbf{v} = (x, y)$ entonces $-\mathbf{v} = (-x, -y)$

Definición: Se llama VECTOR NORMADO o UNITARIO de **v** al vector de longitud uno que está sobre la misma recta que contiene a **v**.

1. Para cada uno de los vectores dados, hacer la representación geométrica en el plano cartesiano y hallar: la norma, el ángulo direccional, el vector opuesto y el correspondiente vector normado.

   a = (3, 2)
   b = (-2, 1)
   c = (-1, -3)
   d = (2, -2)

Definición: Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ se define la SUMA de **u** y **v**.

Como $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2\, , y_1 + y_2) = (w_1, w_2) = \mathbf{w}$.

2. Un bote viaja con una rapidez de 10 millas por hora hacia el este y sopla un viento cruzado de sur a norte de 20 millas por hora. ¿Cuál es el vector velocidad del bote? Indique su rapidez y dirección?

3. Encuentre la magnitud y dirección de cada uno de los vectores dados:
   a) **u** = (-5, 8).
   b) **v** = $(1,-\sqrt{3})$
   c) **w** = $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right)$,

Definición: Dado un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ y $r \in \Re$ se define la MULTIPLICACIÓN ESCALAR de **v** por r como:

$$r\,\mathbf{v} = (rx\, , ry) = (w_1, w_2) = \mathbf{w}$$

4. Expresar los vectores **a** = $\left(-\frac{2}{5}, 1\right)$ y **b** = (0, -3) como combinación lineal de los vectores **i** y **j**. Efectuar la suma de **a** y **b**. Expresar el resultado de la suma en coordenadas.

5. Si **u** = (1, -2), **v** = (-3, -1), **w** = (2, 0) , encuentre un vector **x** tal que 2 (**u** + **v**) –3 **x** = **w**.

6. Si **a** = (4, -3) y **b** = (2, 0) calcular |**a**| **b** - |**b**| **a**

Teorema: Las siguientes afirmaciones para dos vectores **u** y **v** en el plano son equivalentes:

(1) **u** es múltiplo escalar de **v** ,o, **v** es múltiplo escalar de **u**.
(2) **u** y **v** son linealmente dependientes (L.D.).
(3) **u** y **v** son paralelos (**u** || **b**).

7. Si **u** = (1, -2) y **v** = (3, 1) encuentre un vector **w** $\in \Re_2$ normado (de longitud 1) y paralelo a 2**u** – **v**.

8. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no, linealmente dependientes:

   a) **u** = (2, -3) y **v** = (-1, $\frac{3}{2}$).

   b) b) **u** = (-2, 4) y **v** = (- $\sqrt{2}$, 2).

Definición: Sean **u** y **v** vectores en $\Re^2$, tales que **u** = (u_1, u_2) y **v** = (v_1, v_2) ,se define el PRODUCTO ESCALAR entre **u** y **v** como la suma de los productos de las respectivas coordenadas:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

Definición: Sean **u** y **v** vectores en $\Re^2$, tales que **u** = (u_1, u_2) y **v** = (v_1, v_2) ,se define el PRODUCTO ESCALAR entre **u** y **v** como la suma de los productos de las respectivas coordenadas:

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2.$$

9. Si **u** = (-1, 1) y v = (2, -1) hallar:

   a) El producto escalar entre **u** y **v.**

   b) El ángulo 〈 entre **u** y **v.**

Definición: Se define el COSENO del ángulo α entre los vectores **u** y **v** , como el producto escalar de sus vectores normados.

Se denota: $\cos(\alpha) = \dfrac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \dfrac{u}{\|u\|} \bullet \dfrac{v}{\|v\|}$

Teorema: El producto escalar de dos vectores **u** y **v** en $\Re^2$ es cero, si y solamente si, alguno de los vectores es el vector nulo o si los vectores son ortogonales.

$$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \text{o} \quad \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

10. Decidir si los siguientes pares de vectores son o no ortogonales:

    a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j}$
    b) $\mathbf{z} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

11. Encuentre un vector **x** que sea unitario y ortogonal al vector $\mathbf{z} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

12. Encuentre un vector **x** de longitud 2 en la dirección del vector $\mathbf{v} = (-1, 2)$.

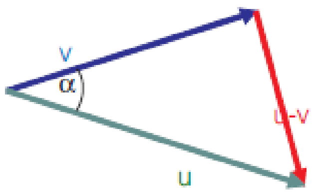
13. Si $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = c\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ encuentre valores de la constante c para que:

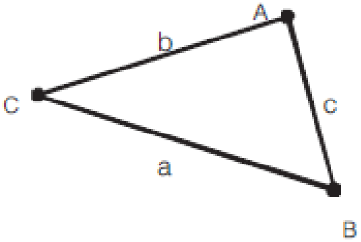
    a) $\mathbf{u} \,||\, \mathbf{v}$ b) $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$

TEOREMA DEL COSENO

Teorema: Si **u** y **v** son vectores en $\Re^2$,entonces:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$$





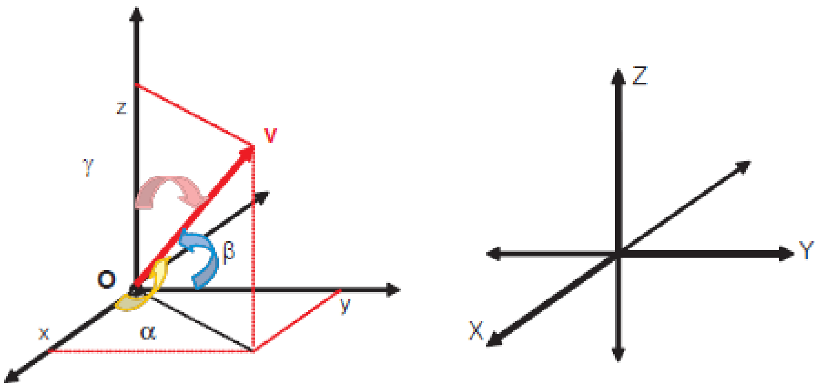
$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C}$ **(Teorema del Coseno)**

Si el ángulo en C es de 90º se tiene:

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ **(Teorema de Pitágoras)**

Vectores en $\Re_3$

Definición: Un vector v en $\Re^3$ queda definido por **v** = (x, y, z) donde x, y, z son las COORDENADAS CARTESIANAS. Los ángulos α, β y γ se llaman ANGULOS DIRECTORES y son los que forma el vector **v** con los ejes X, Y y Z respectivamente; considerando el sentido positivo desde la parte positiva del eje hacia el vector. (Figura 4.34 a)



Orientación de los ángulos directores
(a)

Representación convencional de los ejes
(b)

Fig. 4.34.

1. Hacer la representación gráfica de cada uno de los siguientes vectores:
a = (2, 0, 0) ; **b** = (0, -2, 0) ; **c** = (0, 0, 3) (sobre los ejes coordenados)
d = (2, 2, 0) ; **e** = (-2, 0, 3) ; **f** = (0, 3, -1) (sobre los planos coordenados)
g = (2, 4, 4) ; **h** = (1, 2, -2)

Operaciones con vectores en $\Re_3$

Definición: Si **u** y **v** $\in \Re^3$, **u** $= (x_1, y_1, z_1)$ y **v** $= (x_2, y_2, z_2)$ se define

u + **v** $= (x_1+x_2 \,,\, y_1+y_2 \,,\, z_1+z_2) = (w_1, w_2, w_3) =$ **w** $\in \Re^3$

Propiedades:

1. Conmutativa: **u** + **v** = **v** + **u**.

2. Asociativa: [**u** + **v**] + **w** = **u** + [**v** + **w**] = **u** + **v** + **w**.

3. Modulativa: **u** + **o** = **u** = **o** + **u**, **o** = (0, 0, 0) es el VECTOR NULO en $\Re^3$.

4. Invertiva: **u** + [-**u**] = **o** = [-**u**] + **u**
–**u** $= (-x, -y, -z)$ es el VECTOR OPUESTO de **u** $= (x, y, z)$.

Definición: Si A y B son dos puntos en $\Re^3$ de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respectivamente, se define el vector $\overrightarrow{AB}$ como:

$\overrightarrow{AB}$ = **A** – **B** $= (\, b_1\text{-}a_1 \,,\, b_2\text{-}a_2 \,,\, b_3\text{-}a_3 \,)$.

Teorema: Dados **i** = (1, 0, 0), **j** = (0, 1, 0) y **k** = (0, 0, 1), los 3 vectores unitarios en $\Re^3$ sobre los ejes coordenados X, Y y Z respectivamente, todo vector **v** $\in \Re^3$ se puede expresar en forma única, como COMBINACIÓN LINEAL (C.L.) de los vectores **i** , **j** y **k** , es decir, si **v** $= (v_1, v_2, v_3)$ entonces **v** $= v_1$**i** + v_2**j** + v_3**k**.

2. Dados los vectores **u** = (-1, 0, 2) y **v** = (2, 4, 3):
   - **a)** Expresar **u** y v en términos de la base canónica y hallar **u** + **v**:
   - **b)** Hallar las coordenadas de un vector **x** tal que 2**u** + **x** = **v**.

3. Hallar un vector **y** de longitud 2, que sea paralelo al vector **w** = (1, 2,-3)

Definición: Dados **u** y **v** $\in \Re^3$, si **u** $= (u_1, u_2, u_3)$ y **v** $= (v_1, v_2, v_3)$,

se define el PRODUCTO ESCALAR, **u•v** $= u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 = r \in \Re$

Definición: Dados 2 vectores en $\Re^3$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se define el PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ de **u** y **v** como:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2 \,,\, u_3v_1 - u_1v_3 \,,\, u_1v_2 - u_2v_1) = \mathbf{w} \in \Re^3$$

Este vector también queda definido por:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \mathbf{w}$$

Teorema: Si α es el ángulo entre dos vectores **u** y **v** en $\Re^3$, entonces:

$$\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \| = \| \mathbf{u} \| \cdot \| \mathbf{v} \| \operatorname{sen}\alpha.$$

4. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores **u** = 2**i** – **j** + **k** y **v** = 2**j** – **k**.