están conectados. Los sistemas biológicos, entre ellos el corazón, funcionan como fuentes de fuerza electromotriz.

La *fuerza electromotriz* puede definirse como *trabajo por unidad de carga*. Se representa por el símbolo ε y se escribe abreviadamente *fem* *(el empleo de la palabra fuerza no es afortunado, pues la fem no es una fuerza).* Si *dq* es la *carga* que atraviesa una *sección* del *generador* durante el *tiempo dt* y *dW* es la *energía transformada* en este tiempo, la *fem* será:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{dW}{dq}} \qquad (105)$$

Puesto que la *fuerza electromotriz* es *trabajo por unidad de carga* (julio por culombio), igual que el *potencial*, la unidad SI de *fem* es también el *voltio* (1 *V* = 1 *J/C*). No obstante, se aclara que aunque la *fem* y el *potencial* pueden expresarse en la *misma unidad*, se refieren a *conceptos distintos*, como se verá con mayor claridad más adelante.

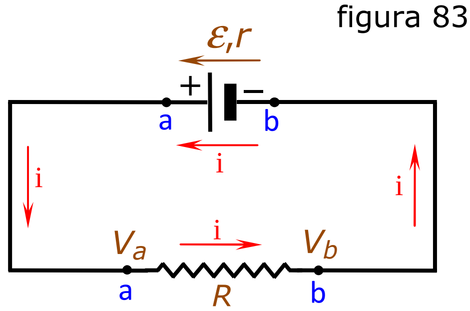
El *trabajo* realizado por el *generador* en el *tiempo dt* es $\Rightarrow$ $dW = \varepsilon\, dq$

y el efectuado en la unidad de tiempo, o sea la *potencia*:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon\, i} \qquad (106)$$

Ecuación del Circuito:

figura 83



Generador conectado en serie con una resistencia, por medio de hilos conductores sin resistencia.

Consideremos un circuito sencillo como el de la *figura 83*, donde una *resistencia R* está conectada, mediante conductores de *resistencia despreciable*, a los terminales de un *generador* constituido por una *batería*.

No existe ninguna diferencia de potencial entre los extremos de los tramos aa ni de los tramos bb correspondientes a los conductores de conexión, ya que hemos supuesto que los mismos poseen una resistencia despreciable. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia R también es ε.

Si el sentido de la corriente en la *resistencia R* es de *a* hacia *b*, el *potencial* V_a es superior al *potencial* V_b. El *signo* **+** sobre el *borne a* de la *batería* indica esta circunstancia.

Aunque en rigor *la fem no es magnitud vectorial*, es útil asignarle un *sentido*. Se considera arbitrariamente que el *sentido de la fem* es *de* − *a* **+** *dentro del generador*, como se indica con una *flecha* en la *figura 83*.

En la *resistencia exterior R* se produce calor a razón de $dQ_R/dt = R\,i^2$ *julios por segundo (vatios)*. Además, como es de esperar, todo generador tiene una *resistencia interna*, que representaremos por *r*. Por consiguiente, la proporción en que se produce calor en la *batería* es $dQ_r/dt = r\,i^2$. La suma de $R\,i^2$ y $r\,i^2$ es la cantidad de energía cedida por segundo, en forma de calor, por la carga circulante. Como el *generador* ha de *suministrar energía* en la *misma proporción*, en virtud de la *ecuación (106)* se tiene:

$$\boxed{\varepsilon\, i = R\, i^2 + r\, i^2} \qquad (107)$$

Simplificando y despejando i, obtenemos:

$$\boxed{i = \frac{\varepsilon}{(R + r)}} \qquad (108)$$

El principio de conservación de la energía conduce así a una relación extraordinariamente útil, que podemos denominar *ecuación del circuito*.

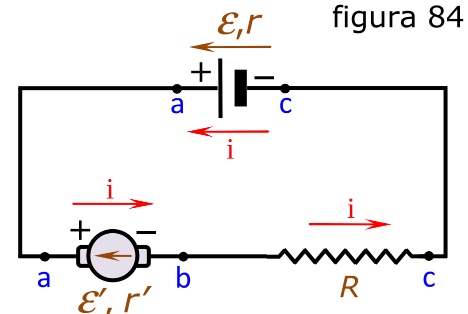


figura 84
Circuito en serie con una fuerza electromotriz y otra contraelectromotriz

Consideremos ahora un circuito dentro del cual *se realiza trabajo por la carga circulante*. La *figura 84* representa un circuito en el cual hay un *motor* que es *accionado* por una *batería*. Para generalizar se ha introducido una *resistencia R*.

La *corriente* en el *motor* se dirige de *izquierda* a *derecha*, o sea de *a* ⇒ *b*. Puesto que la carga circulante cede energía al pasar por el motor, el *potencial* V_a tiene que ser *mayor* que el *potencial* V_b . Por consiguiente, se asigna al *borne a* del *motor* el signo positivo y el *sentido* de su *fem* es de *b* ⇒ *a*.

Representemos por ε' la *fem* del *motor* y por *r′* su *resistencia interna*. En virtud de la definición de *fem*, la *cantidad de energía* convertida por segundo en *energía mecánica* por el *motor* es $\varepsilon' \, i$ y la *cantidad de energía* convertida por segundo en *calor* dentro del *motor* es $r' \, i^2$. Las *cantidades de energía* transformadas en *calor*, por segundo, en la *resistencia exterior* y en la *batería* son $R \, i^2$ y $r \, i^2$. La *cantidad de trabajo* realizado por segundo en la *batería* *sobre la carga circulante* es $\varepsilon \, i$. Por consiguiente:

$$\varepsilon \, i = \varepsilon' \, i + r' \, i^2 + R \, i^2 + r \, i^2$$

de donde
$$i = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'} \qquad (109)$$

o bien
$$\boxed{i = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R}} \qquad (110)$$

Esta ecuación es una *generalización de la ecuación (108)* y puede enunciarse: *"La intensidad de corriente en un circuito en serie, es igual a la suma algebraica de las fem del circuito, dividida por la suma de las resistencias del mismo".*

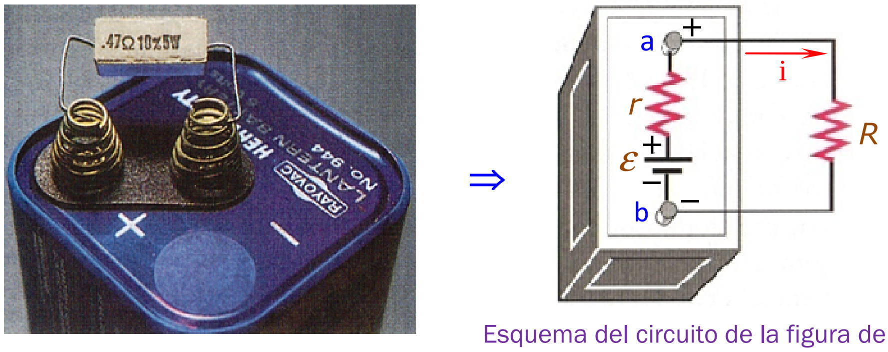
Cuando se utiliza la *ecuación (110)*, es necesario adoptar un *convenio de signos*. La regla más sencilla es considerar el *sentido de la corriente* como *sentido positivo* en el circuito. Entonces *las fem* son *positivas* si tienen el *mismo sentido* que la *corriente* y *negativas* si tienen *sentido contrario*. Las *resistencias* se consideran siempre *positivas* [*los signos de la ecuación (109) están de acuerdo con este convenio*].

Los sentidos relativos de la corriente y la fem en los dos dispositivos de la *figura 84*, conducen a las siguientes generalizaciones. Cuando la *corriente* tiene el *mismo sentido* que la *fem*, como en el caso de la *batería*, *se realiza trabajo sobre la carga circulante* y *existe consumo de energía en alguna otra forma* (*calor*). Cuando la *corriente* tiene *sentido contrario* a la *fem*, como en el caso del *motor*, *el trabajo es realizado por la carga circulante* y *aparece energía en alguna otra forma* (*mecánica*). En este último caso, la fem se denomina frecuentemente *fuerza contraelectromotriz*.

OTRA DEFINICIÓN DE FUERZA ELECTROMOTRIZ: Se puede demostrar que *"la fem de un circuito es igual a la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo del circuito"*:

$$\boxed{\varepsilon = \oint E \cos\theta \, ds} \quad \underset{\text{vectorial}}{\text{forma}} \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = \oint \vec{E} \, d\vec{l}} \qquad (111)$$

Esta ecuación se toma a veces como definición de la fem de un circuito. Nosotros la utilizaremos al deducir la expresión de la *velocidad de las ondas electromagnéticas*.



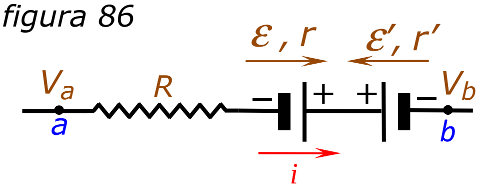
Fotografía de un circuito simple formado por una batería real, una resistencia y cables de conexión.

Esquema del circuito de la figura de la izquierda. Una batería real puede representarse por una batería ideal de fem $\mathcal{E}$ y resistencia interna r.

figura 85

Diferencia de Potencial entre Puntos de un Circuito:

figura 86



Porción de circuito con dos fem.

La *figura 86* representa una *porción* de un *circuito en serie*, en la cual el *sentido* de la *corriente* i es de *a* hacia *b*. La *cantidad de energía* cedida por la *carga circulante* a la *porción de circuito* comprendida entre *a* y *b*, *por segundo*, es $i\,V_{ab}$. Es decir, ésta es la *potencia suministrada* a dicha porción del circuito por el *generador* o *generadores* de *fem* que hay en el resto del circuito *(no representado)*. Puesto que i y ε son del *mismo sentido*, el *primer dispositivo* *suministra energía* en la proporción $\varepsilon\, i$. Al *segundo dispositivo* *se le suministra energía* en la proporción $\varepsilon' i$, puesto que i y ε' son de *sentido contrario*. En la *resistencia* y en los dispositivos de *fem* ε y ε' se produce, por segundo, una cantidad total de *calor* $(R + r + r')\, i^2$. Igualando la potencia suministrada a esta *porción del circuito* a la *potencia desarrollada en ella*, se tiene:

$$i\,V_{ab} + \varepsilon\, i = \varepsilon' i + (R + r + r')\, i^2$$

$$V_{ab} = (R + r + r')\, i - (\varepsilon - \varepsilon') \qquad (112)$$

$$\boxed{V_{ab} = \sum R\, i - \sum \varepsilon} \qquad (113)$$

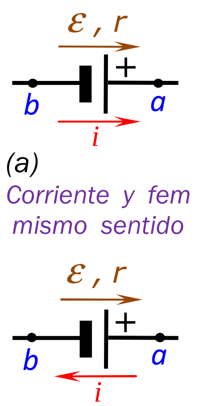
Esta es la expresión general de la *diferencia de potencial* $V_{ab} = V_a - V_b$ *entre dos puntos cualesquiera* *a* y *b* de un *circuito en serie*.

Debe prestarse especial atención a los signos algebraicos. La regla más sencilla es considerar el *sentido* de *a* hacia *b* como *positivo*. Entonces, las *corrientes* y las *fem* son *positivas* si su *sentido* es el de *a* hacia *b* y *negativas* si su *sentido* es el de *b* hacia *a*. Las *resistencias* son siempre *positivas*. La *diferencia de potencial* V_{ab} es siempre *positiva* si *a* se encuentra a un *potencial superior* al de *b* y *negativa* en caso *contrario*. *[los signos de la ecuación (112) coinciden con estos convenios]*.

La *ecuación (113)* se reduce a la relación $V_{ab} = R\, i$ en el caso particular en que *a* y *b* sean los bornes de una *resistencia pura*. También contiene implícitamente la *ecuación general del circuito* [*ecuación (110)*], ya que si los puntos *a* y *b* coinciden:

$$V_{ab} = 0 = \sum R\, i - \sum \varepsilon \qquad \text{e} \qquad i = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R}$$

Diferencia de Potencial entre los Bornes de un Generador:



(a) Corriente y fem mismo sentido

(b) Corriente y fem sentido contrario

figura 87

Resulta oportuno aplicar la forma especial de la *ecuación (113)* cuando los *puntos a* y *b* son los *bornes* de un *generador*. Entonces hay dos posibilidades, representadas en la figura *87*, que la *corriente* y la *fem* sean de *sentidos iguales* u *opuestos*. Convengamos en que el *punto a* corresponda siempre al *borne positivo* y el *punto b* al *borne negativo* del *generador*. Entonces, en la figura *87a*, de acuerdo con el convenio de signos que hemos establecido en el tema precedente, tanto ε como i son *negativas*. Luego:

$$V_{ab} = V_{+-} = \sum R\, i - \sum \varepsilon = -r\, i - (-\varepsilon) = \varepsilon - r\, i$$

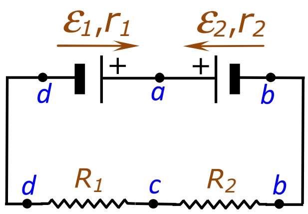
En la figura *87b*, ε es *negativa* pero i es *positiva*. Por tanto:

$$V_{ab} = V_{+-} = \sum R\, i - \sum \varepsilon = r\, i - (-\varepsilon) = \varepsilon + r\, i$$

Por consiguiente, la *diferencia de potencial* entre los *bornes* de un *generador* es igual:

a) a la *fem* del generador *disminuida* en el *producto* de la *resistencia interior* por la *intensidad de corriente*, cuando la *fem* y la *corriente* son del *mismo sentido*; b) *aumentada* en dicho *producto*, cuando *ambas* son de *sentidos opuestos* *(en este último caso tenemos una fuerza contraelectromotriz)*. Cuando la *corriente* en un *generador* es *nula*, el *voltaje* en los *bornes* es igual a la *fuerza electromotriz*. Por tanto, la *fem* de un *generador* puede determinarse experimentalmente midiendo el *voltaje* entre sus bornes en *circuito abierto*.

Ejercicio Nº 60: Los datos numéricos correspondientes a la figura son:
$\varepsilon_1 = 12$ V; $r_1 = 0{,}2\ \Omega$; $\varepsilon_2 = 6$ V; $r_2 = 0{,}1\ \Omega$; $R_1 = 2{,}3\ \Omega$; $R_2 = 1{,}4\ \Omega$.
Calcular: a) la intensidad de corriente en el circuito, en magnitud y sentido; b) la diferencia de potencial V_{ac}.



a) Parece evidente que la corriente debe tener el sentido de las agujas del reloj, puesto que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Sin embargo, para demostrar que no es necesario apoyarse en la intuición para encontrar el sentido de la corriente, vamos a suponer que es contrario a las agujas del reloj. Entonces, de acuerdo con el convenio de signos oportunamente establecido:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \mathcal{E} = -12 + 6 = -6\,V \\ \sum R = 0{,}2 + 0{,}1 + 2{,}3 + 1{,}4 = 4\,\Omega\end{array}\right\} \quad i = \frac{\sum \mathcal{E}}{\sum R} = \frac{-6}{4} = -1{,}5\,A$$

El significado del signo negativo es sencillamente que se adoptó una hipótesis incorrecta con respecto al sentido de la corriente. Si se hubiera adoptado el sentido contrario, se tendría:

$$\left.\begin{array}{l}\sum \mathcal{E} = 12 - 6 = 6\,V \\ \sum R = 4\,\Omega\end{array}\right\} \quad i = \frac{\sum \mathcal{E}}{\sum R} = \frac{6}{4} = 1{,}5\,A$$

Vemos que se obtiene en ambos casos el mismo valor numérico y que no es necesario conocer previamente el sentido de la corriente.

b) La diferencia de potencial entre *a* y *c* es $V_{ac} = \sum R\,i - \sum \varepsilon$. Se puede llegar desde *a* hasta *c* por dos recorridos que permiten calcular V_{ac}. Comenzamos primero por la trayectoria *abc* *(hemos demostrado que la corriente tiene el sentido de las agujas del reloj)*. El sentido de la corriente en la trayectoria *abc* es de *a* hacia *c*; por consiguiente, i es positivo. Luego:

$$\sum R\,i = (0{,}1 + 1{,}4)\ 1{,}5 = 2{,}25\,V$$

El sentido de $\mathcal{E}_2$ es de *b* hacia *a*. Luego: $\sum \mathcal{E} = -6\,V$

Por lo tanto: $V_{ac} = 2{,}25 - (-6) = 8{,}25\ V$

Además, siendo: $V_{ac} = V_a - V_c = 8{,}25\ V \quad es \quad V_a = V_c + 8{,}25\ V$

Es decir, el potencial del punto *a* excede en 8,25 *V* al potencial del punto *c*.

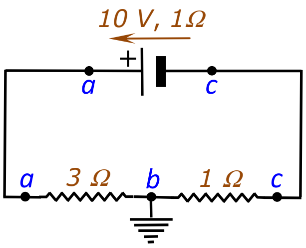
Si ahora pasamos desde *a* hasta *c* por el recorrido *adc*, el término correspondiente a la intensidad de corriente tiene signo negativo, puesto que su sentido es de *c* hacia *a*. Entonces:

$$\sum R\ i = (0{,}2 + 2{,}3)\ (-1{,}5) = -\ 3{,}75\ V$$

El sentido de $\mathcal{E}_1$ es de *d* hacia *a*. Luego: $\sum \mathcal{E} = -\ 12\ V$

Por lo tanto: $V_{ac} = -3{,}75 - (-12) = 8{,}25\ V$

Vemos que se obtiene la misma solución, cualquiera que sea el recorrido utilizado.



Ejercicio Nº 61: *En casi todos los circuitos eléctricos o electrónicos, hay uno o más puntos del circuito conectados a tierra. En tales casos se supone que el potencial de los puntos conectados a tierra es nulo y que el potencial de cualquier otro punto del sistema se expresa con relación a este potencial de referencia*. Consideremos el circuito sencillo de la figura, que comunica con tierra en el punto *b*. Calcular los potenciales de los puntos *a* y *c*.

La corriente en el circuito es: $i = \dfrac{10}{5} = 2\ A$

Su sentido es contrario a las agujas del reloj. Las diferencias de potencial V_{ab} y V_{bc} son:

$$V_{ab} = R\ i = 3 \times 2 = 6\ V = V_a - V_b$$

$$V_{bc} = R\ i = 1 \times 2 = 2\ V = V_b - V_c$$

Puesto que $V_b = 0$, se deduce que:

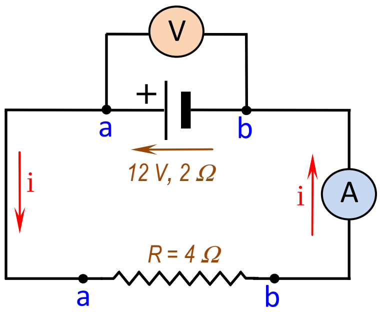
$$V_a = 6\ V \qquad ; \qquad V_c = -2\ V$$

El punto *a* está a 6 *V* por encima del potencial de tierra. El punto *c* está a 2 *V* por debajo del potencial de tierra. La diferencia de potencial V_{ac} puede encontrarse ahora por sustracción:

$$V_{ac} = V_a - V_c = 6 - (-2) = 8\ V$$

Como comprobación, podemos pasar de *a* a *c* a través de la pila, obteniendo:

$$V_{ac} = \sum R\ i - \sum \mathcal{E} = -1 \times 2 - (-10) = 8\ V$$



Ejercicio Nº 62: En el circuito de la figura: a) ¿Cuáles son las lecturas del voltímetro y del amperímetro, si ambos son instrumentos idealizados?; b) ¿Cuáles serán las lecturas de estos medidores, si sustituimos la resistencia R = 4 Ω por R = 0 Ω?

a) $i = \dfrac{\varepsilon}{R + r} = \dfrac{12}{4 + 2} = 2\ A$

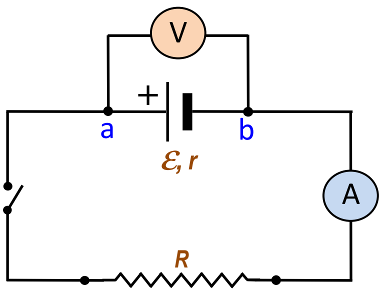
$V_{ab} = \varepsilon - i\,r = 12 - (2 \times 2) = 8\ V$

$también: \quad V_{ab} = i\,R = 2 \times 4 = 8\ V$

b) $V_{ab} = i\,R = i \times 0 = 0\ V$

$V_{ab} = \varepsilon - i\,r = 0\ V$

$i = \dfrac{\varepsilon}{r} = \dfrac{12}{2} = 6\ A$ *(situación de cortocircuito entre los bornes de la batería)*



Ejercicio Nº 63: Cuando el interruptor de la figura está abierto, la lectura del voltímetro de la batería es de 12,55 V. Cuando se cierra el interruptor, la lectura del voltímetro baja a 11,84 V y la lectura del amperímetro es de 2,25 A. Hallar la fem, la resistencia interna de la batería y la resistencia R del circuito. Suponer que los instrumentos de medición son ideales.

$\varepsilon = 12{,}55\ V$

$V_r = 12{,}55 - 11{,}84 = 0{,}71\ V \quad \Longrightarrow \quad r = \dfrac{V_r}{i} = \dfrac{0{,}71}{2{,}25} = 0{,}3155\ \Omega$

$V_R = 11{,}84\ V = i\,R \quad \Longrightarrow \quad R = \dfrac{V_R}{i} = \dfrac{11{,}84}{2{,}25} = 5{,}262\ \Omega$

Ejercicio Nº 64: En base a la figura y a los resultados del ejercicio Nº 62, hallar: a) la velocidad de conversión de energía *(química en eléctrica)* en la batería; b) la velocidad de disipación de energía en la batería; c) la potencia útil neta de la batería.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \varepsilon\ i = 12\ V \times 2\ A = 24\ W \\ \text{b)} & r\ i^2 = 2\ \Omega \times (2\ A)^2 = 8\ W \\ \text{c)} & \varepsilon\ i - r\ i^2 = 24\ W - 8\ W = 16\ W \\ & V_{ab}\ i = 8\ V \times 2\ A = 16\ W \\ & R\ i^2 = 4\ \Omega \times (2\ A)^2 = 16\ W \end{array}\right\}\ R = 4\ \Omega$$

a) $\varepsilon\, i = 12\, V \times 6\, A = 72\ W$

b) $r\, i^2 = 2\,\Omega \times (6\, A)^2 = 72\ W$

c) $V_{ab}\, i = 0\, V \times 2\, A = 0\, W$

$R = 0\,\Omega$

Ejercicio Nº 65: Una estufa eléctrica de 540 W ha sido proyectada para funcionar con 120 V. a) ¿Cuál es su resistencia? b) ¿Cuánta intensidad de corriente toma? c) Si la tensión de la línea cae a 110 V, ¿Qué potencia toma la estufa? *(Supondremos que la resistencia es constante y que no varía con la temperatura)*. d) Las resistencias de la estufa son metálicas; por lo tanto, aumentan al subir la temperatura y disminuyen al bajar la misma. Si se tiene en cuenta el cambio de resistencia con la temperatura, ¿es la potencia eléctrica consumida por la estufa mayor o menor que la calculada anteriormente?

a) $P = \dfrac{V^2}{R} \quad \Longrightarrow \quad R = \dfrac{V^2}{P} = \dfrac{120^2}{540} = 26{,}7\,\Omega$

b) $i = \dfrac{V}{R} = \dfrac{120}{26{,}7} = 4{,}5\ A$

c) $i = \dfrac{V}{R} = \dfrac{110}{26{,}7} = 4{,}12\ A \quad \Longrightarrow \quad P = V\, i = 110 \times 4{,}12 = 453\ W$

$también\!: \quad P = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{110^2}{26{,}7} = 453\ W$

d) Mayor. Al disminuir la tensión, disminuyen la temperatura y la resistencia, con lo cual aumenta la corriente y consecuentemente la potencia. Por ejemplo, si la resistencia baja un 5 % (R = 25,36 Ω), i = 4,34 A (mayor que 4,12 A) y P = 477 W (mayor que 453 W).

Ejercicio Nº 66: Una batería de automóvil cuya fem es de 12 V y su resistencia interna de 0,1 Ω *(en realidad, las resistencias internas de estas baterías son de sólo unas milésimas de ohmio)*, ha de cargarse de un manantial de corriente continua de 112 V. a) ¿Cuál de los bornes *(positivo o negativo)* de la batería ha de conectarse al hilo positivo de la línea? b) ¿Cuál sería la intensidad de la corriente de carga si la batería se conectase directamente a la línea? c) Calcular la resistencia en serie que se requiere para limitar la corriente de carga a 10 A. Con esta resistencia en el circuito, hallar: d) la diferencia de potencial entre los bornes de la batería; e) la potencia absorbida de la línea; f) la potencia disipada en forma de calor en la resistencia en serie; g) la potencia útil absorbida por la batería.

a) El borne positivo.

b) $i = \dfrac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \dfrac{112 - 12}{0{,}1} = 1.000\ A$

c) $i = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R} = \frac{112 - 12}{R + 0{,}1} = 10\ A \quad \Longrightarrow \quad R = \frac{100}{10} - 0{,}1 = 9{,}9\ \Omega$

d) $V_{batería} = \varepsilon + i\, r = 12 + 10 \times 0{,}1 = 13\ V$

e) $P_{línea} = V_{línea}\, i = 112 \times 10 = 1.120\ W$

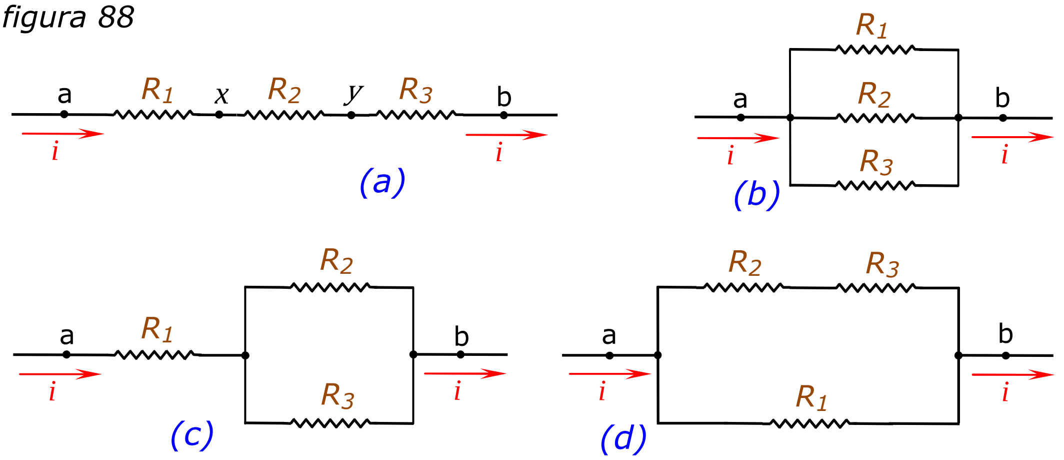
f) $P_R = R\, i^2 = 9{,}9 \times 10^2 = 990\ W$

g) $P_{batería} = \varepsilon\, i = 12 \times 10 = 120\ W$

Resistencias en Serie y en Paralelo:

La mayoría de los circuitos eléctricos no contienen un solo generador y una sola resistencia exterior, sino que comprenden cierto número de *fem*, *resistencias* y otros elementos tales como *condensadores*, *motores*, *etc.*, conectados entre sí de un modo más o menos complejo. El término general aplicado a estos circuitos es el de *red*. A continuación veremos algunos de los tipos más sencillos.

figura 88



Cuatro formas distintas de conectar tres resistencias.

La *figura 88* presenta cuatro formas distintas de conectar *tres resistencias* R_1, R_2 y R_3. En la *figura 88a*, las *resistencias* ofrecen un *recorrido único* entre *a* y *b*, por lo que se dice que están conectadas *en serie* entre esos puntos. Todos los elementos componentes de un circuito *(resistencias, motores, generadores, etc.)* que análogamente ofrezcan un recorrido único entre dos puntos, se dice que están en serie entre esos puntos.

Las *resistencias* de la *figura 88b* se dice que están *en paralelo* entre los puntos *a* y *b*. Cada resistencia ofrece un *recorrido distinto* entre dichos puntos. Todos los elementos componentes de un circuito que se hallen conectado análogamente, se dice que están en paralelo.

En la *figura 88c*, las *resistencias* R_2 y R_3 están en *paralelo* y su combinación está en *serie* con la *resistencia* R_1. En la *figura 88d*, las *resistencias* R_2 y R_3 están en *serie* y su combinación está en *paralelo* con la *resistencia* R_1.

Es siempre posible encontrar *una sola resistencia* que pueda *reemplazar* a una *combinación de resistencias* en cualquier circuito, sin modificar la diferencia de potencial entre los bornes de la combinación ni la corriente en el resto del circuito. Esta resistencia se denomina *resistencia equivalente* de la combinación. Si cualquiera de las *redes* de la *figura 88* se reemplazase por su *resistencia equivalente* R, se podría escribir $V_{ab} = R\, i$ o bien $R = V_{ab}/i$, siendo V_{ab} la *diferencia de potencial* entre los bornes de la red e i la *intensidad* en los puntos *a* y *b*. Por consiguiente, el *método* para calcular una *resistencia equivalente* es suponer una *diferencia de potencial* V_{ab} entre los bornes de la red, calcular la *corriente* i correspondiente *(o viceversa)* y hallar la *razón* ente las mismas.

Si *las resistencias están en serie* como en la *figura 88a*, la *intensidad* i que pasa por todas es la misma. Por consiguiente:

$$V_{ax} = i\, R_1 \quad ; \quad V_{xy} = i\, R_2 \quad ; \quad V_{yb} = i\, R_3$$

$$V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = i\,(R_1 + R_2 + R_3)$$

Además:

$$V_{ax} = V_a - V_x \quad ; \quad V_{xy} = V_x - V_y \quad ; \quad V_{yb} = V_y - V_b$$

$$V_{ax} + V_{xy} + V_{yb} = V_a - V_b = V_{ab}$$

Por lo tanto:

$$V_{ab} = i\,(R_1 + R_2 + R_3) \qquad y \qquad \frac{V_{ab}}{i} = R_1 + R_2 + R_3$$

Pero V_{ab}/i es, por definición, la *resistencia equivalente* R. En consecuencia:

$$\boxed{R = R_1 + R_2 + R_3} \qquad (114)$$

Si *las resistencias están en paralelo* como en la *figura 88b*, la *diferencia de potencial* entre los bornes de cada una ha de ser la misma e igual a V_{ab}. Si designamos las *intensidades* en cada resistencia por i_1, i_2, e i_3 , se tiene:

$$i_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad ; \qquad i_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad ; \qquad i_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

La carga llega al punto *a* por la corriente i y sale por las corrientes i_1, i_2, e i_3. Puesto que la carga no se acumula en *a*, se deduce que:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{i}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Pero $i/V_{ab} = 1/R$. En consecuencia:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \qquad (115)$$

Para un número cualquiera de resistencias en paralelo, la inversa de la resistencia equivalente es igual a la suma de las inversas de cada una de ellas.

Para el caso particular de *dos resistencias en paralelo*:

$$R = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2} \qquad e \qquad \frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Las resistencias equivalentes de las redes de las *figuras 88c/d* pueden encontrarse por el mismo método general, pero es más sencillo considerarlas como conjunto de agrupaciones en serie y en paralelo. Sin embargo, *no todas las redes pueden reducirse a combinaciones sencillas en serie y en paralelo*, siendo necesario emplear *métodos especiales* en tales casos.

Asociación de Fuentes Electromotrices:

La disposición de dos o más generadores de fem no queda definida únicamente diciendo que están conectados en serie o en paralelo. Consideremos los cuatro casos mostrados en la *figura 89*:

(a) conexión *serie* propiamente dicha.

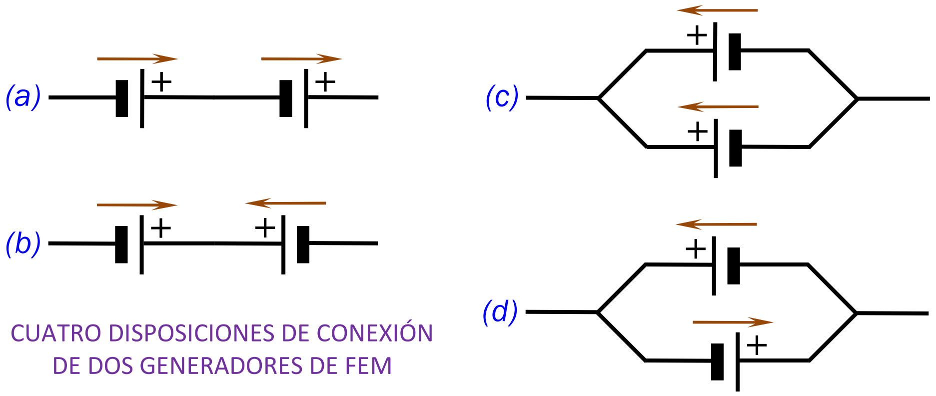


figura 89

(b) conexión serie en oposición.

(c) conexión en paralelo con los polos iguales unidos.

(d) conexión en paralelo con los polos distintos unidos.

Observemos que aunque las fem de los casos *(c)* y *(d)* están en paralelo en cuanto concierne al resto del circuito, *cada una de estas agrupaciones en sí misma forma un circuito cerrado*, con las *fem en oposición* en el *primer caso* y *en serie propiamente dicha* en el *segundo*. Por lo tanto, las expresiones en serie y en paralelo no se excluyen mutuamente ni determinan por completo la red.

• El cálculo de la *intensidad* de la corriente en un *circuito serie* que contiene cierto número de generadores, incluidos los casos *(a)* y *(b)*, no presenta inconvenientes de acuerdo a lo visto con anterioridad *(fórmula 110)*.

• Si cierto número de generadores, cuyas *fem* son *iguales*, se conectan *en paralelo* con los *polos iguales unidos* como en el caso *(c)*, la *fem equivalente* es *igual* a la de *un solo generador* y la resistencia interna equivalente se calcula por el método corriente para las resistencias en paralelo.

• Cuando los generadores tienen *fem distintas* o están *conectados* como se indica en el *caso (d)*, el problema se complica y su resolución requiere de *métodos más generales*.

Reglas de Kirchhoff:

Hemos visto que las redes en las cuales las resistencias no forman agrupaciones sencillas o hay generadores de fem en paralelo, no pueden en general resolverse por el método de la resistencia equivalente. El físico alemán Gustav R. Kirchhoff *(1824/*

1887), desarrolló dos reglas que permiten resolver tales problemas sistemáticamente. Primeramente, definiremos dos conceptos:

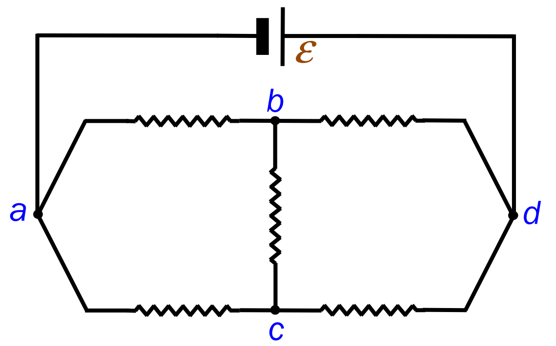


figura 90

- Un *NUDO* es un punto de la red en el cual se unen tres o más conductores *(en la figura 90, los puntos a, b, c, y d son nudos)*.
- Una *MALLA* es cualquier recorrido conductor cerrado de la red *(en la figura 90, las trayectorias abca, abdca, abcdεa, etc., son mallas)*.

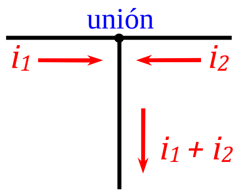
Las *REGLAS DE KIRCHHOFF* pueden enunciarse como sigue:

Regla de los NUDOS: La suma algebraica de las corrientes en cualquier nudo es cero.

$$\boxed{\sum i = 0} \qquad (116)$$

Regla de las MALLAS: La suma algebraica de las fem en una malla cualquiera de una red es igual a la suma algebraica de los productos $R\,i$ de la misma malla.

$$\boxed{\sum \varepsilon = \sum R\,i} \qquad (117)$$



La *primera regla* expresa simplemente que *la carga eléctrica no se acumula en ningún nudo de la red*. La carga total que entra en un nudo por unidad de tiempo, debe ser igual a la carga total que sale del mismo por unidad de tiempo.

La *segunda regla* se deduce de la expresión generalizada de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito: $V_{ab} = \sum R\,i - \sum \varepsilon$. Esta ecuación fue deducida para un circuito sencillo en serie, en el cual la intensidad de la corriente es la misma en todos los puntos. Las intensidades en las distintas partes de una malla, en general diferirán entre sí. *El término $\sum R\,i$ ha de interpretarse como la suma de los productos de cada resistencia por la intensidad de la corriente en dicha resistencia*. Entonces, si se recorre la malla completamente de modo que el segundo punto coincida con el primero, la diferencia de potencial es nula y $\sum \varepsilon = \sum R\,i$.

APLICACIÓN DE LAS REGLAS DE KIRCHHOFF:

- El primer paso consiste en asignar un sentido de la corriente en cada ramal del circuito. Si luego la *solución* de las ecuaciones atribuye *valor negativo* a una intensidad de corriente, su *verdadero sentido* es opuesto al que le habíamos asignado.
- Cuando se aplica la regla de los nudos, se considera positiva la intensidad de una corriente si se dirige hacia el nudo y negativa si se aleja del mismo *(puede utilizarse el convenio contrario)*.
- Cuando se aplica la regla de las mallas, se elige como positivo un sentido de recorrido de las mallas *(sea el de las agujas de un reloj o el opuesto)*. Todas las corrientes y fem que tengan este sentido son positivas y las que tengan sentido contrario negativas *(ver figura 91)*.

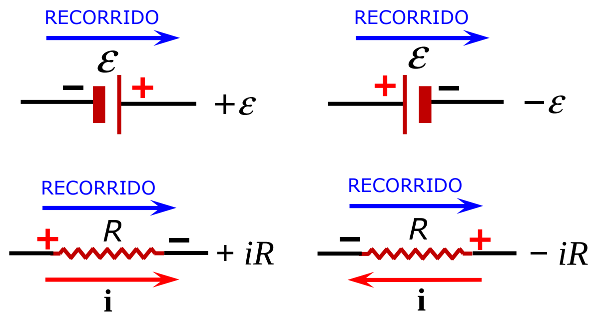


figura 91

- Para *resolver un circuito* a partir de las reglas de Kirchhoff, siempre debemos obtener un número de *ecuaciones independientes* igual al *número de incógnitas*. Si hay *n* nudos en la red, aplicamos la *regla de los nudos* a *n−1* nudos y obtenemos *n−1* ecuaciones. Luego, descomponemos la red en un cierto número de mallas sencillas *(ver ejemplo siguiente)* – como las piezas de un rompecabezas – y aplicamos a cada una de ellas la *regla de las mallas*, obteniendo así las ecuaciones restantes.

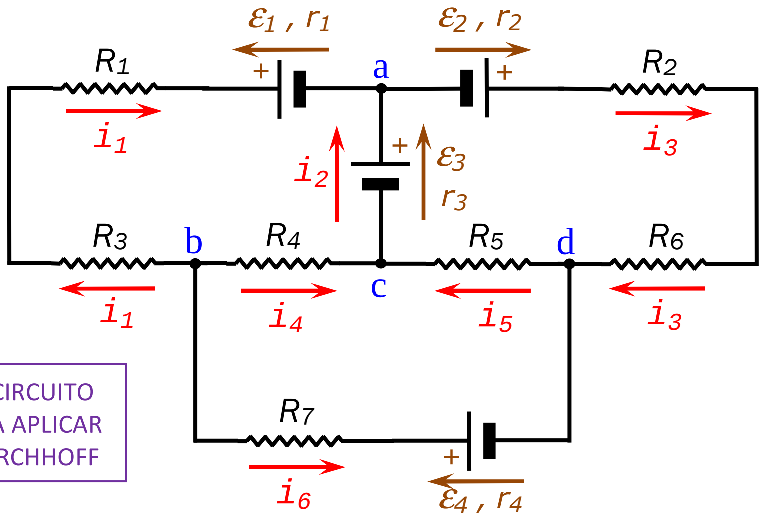
NOTA: Algunos libros de Física definen la regla de las mallas como $\sum V = 0$. En tal caso, en la ecuación (117) el segundo miembro pasa al primer miembro cambiado de signo $\Rightarrow$ $\sum \varepsilon - \sum R\, i = 0$, con lo cual todos los términos $i\,R$ cambian de signo.

EJEMPLO:

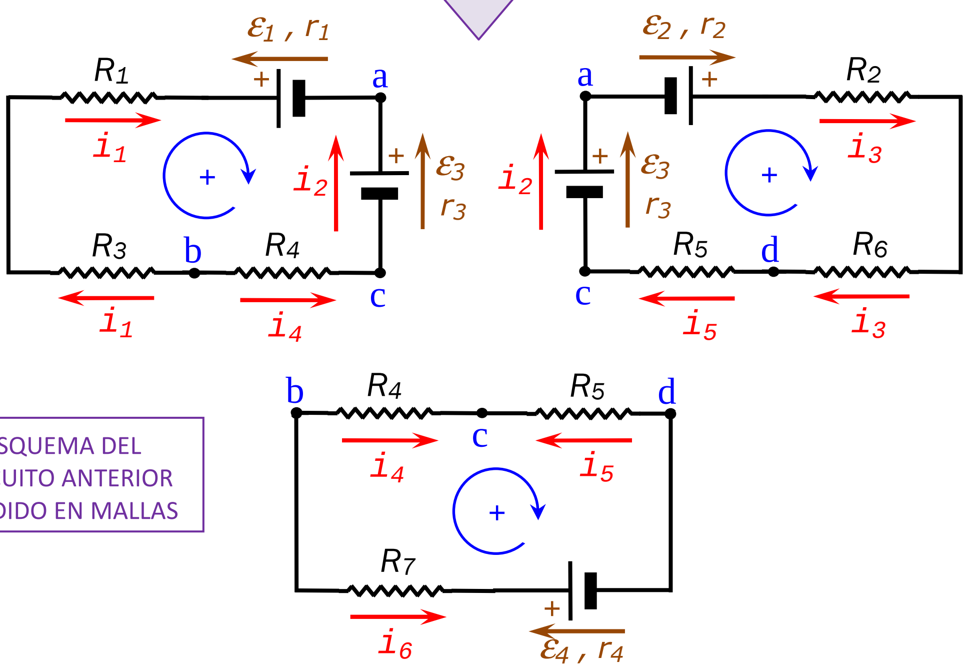
En la figura siguiente se indican los valores y sentidos de las fem y los valores de las resistencias. Determinar la *intensidad de la corriente* en cada *rama* de la red.

Primeramente asignamos un sentido y una denominación a cada una de las corrientes desconocidas, siendo absolutamente arbitrarios los sentidos supuestos. Obviamente, la intensidad de la corriente es la misma en R_3, R_1 y ε_1. Ídem para ε_2, r_2 y R_6.

ESQUEMA DEL CIRCUITO DISPUESTO PARA APLICAR LAS LEYES DE KIRCHHOFF



ESQUEMA DEL CIRCUITO ANTERIOR DIVIDIDO EN MALLAS



Los nudos se designan con las letras a, b, c y d.

En el nudo a: $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

En el nudo b: $-i_1 - i_4 - i_6 = 0$

En el nudo c: $i_4 + i_5 - i_2 = 0$

Dado que hay cuatro nudos, sólo existen tres ecuaciones independientes.
Si aplicamos la regla al cuarto nudo, se encuentra:

$$i_6 + i_3 - i_5 = 0$$

Pero si sumamos las tres primeras ecuaciones:

$$-i_6 - i_3 + i_5 = 0$$

que es la ecuación anterior. Por lo tanto, no obtenemos ningún resultado nuevo aplicando la regla al nudo d. No obstante, hemos obtenido una verificación de las tres primeras ecuaciones.

Consideremos ahora las mallas representadas en la parte inferior de la figura. La regla de las mallas nos proporciona las siguientes ecuaciones:

$$-\varepsilon_1 - \varepsilon_3 = i_1 R_1 + i_1 r_1 - i_2 r_3 - i_4 R_4 + i_1 R_3$$

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = i_3 r_2 + i_3 R_2 + i_3 R_6 + i_5 R_5 + i_2 r_3$$

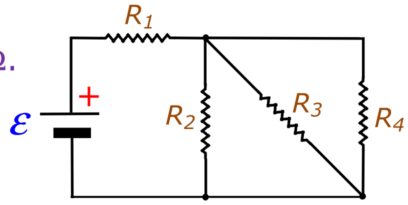
$$\varepsilon_4 = i_4 R_4 - i_5 R_5 - i_6 r_4 - i_6 R_7$$

Se tienen seis ecuaciones independientes para determinar las seis intensidades desconocidas.

Ejercicio Nº 67: Se conectan cuatro resistores y una batería *(con resistencia interna insignificante)* para formar el circuito de la figura, donde:

$\varepsilon = 6$ V ; $R_1 = 3{,}5\ \Omega$; $R_2 = 8{,}2\ \Omega$; $R_3 = 1{,}5\ \Omega$; $R_4 = 4{,}5\ \Omega$.

Hallar: a) la resistencia equivalente de la red;
b) la corriente en cada resistor.



a) $$R_{234} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{8{,}2} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{4{,}5}\right)^{-1} = 0{,}99\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_1 + R_{234} = 3{,}5\ \Omega + 0{,}99\ \Omega = 4{,}49\ \Omega$$

b) $$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{6}{4{,}49} = 1{,}34\ A$$

$$V_1 = i_1 R_1 = 1{,}34\ A \times 3{,}5\ \Omega = 4{,}69\ V$$

$$V_{234} = i_1 R_{234} = 1{,}34\ A \times 0{,}99\ \Omega = 1{,}33\ V$$

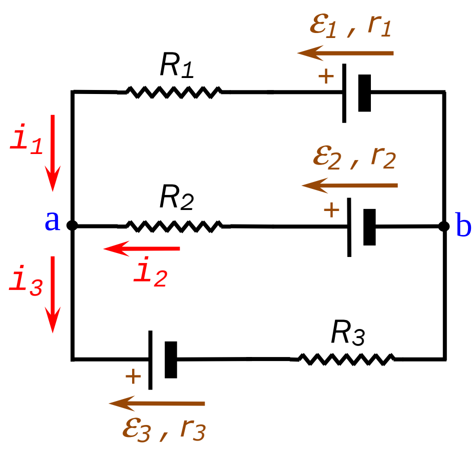
$$i_2 = \frac{V_{234}}{R_2} = \frac{1{,}33}{8{,}2} = 0{,}16\ A$$

$$i_3 = \frac{V_{234}}{R_3} = \frac{1{,}33}{1{,}5} = 0{,}89\ A$$

$$i_4 = \frac{V_{234}}{R_4} = \frac{1{,}33}{4{,}5} = 0{,}30\ A$$

Ejercicio Nº 68: Los datos numéricos correspondientes al circuito de la figura siguiente, se indican a continuación: $\varepsilon_1 = 20$ V ; $\varepsilon_2 = 18$ V ; $\varepsilon_3 = 7$ V ; $r_1 = r_2 = r_3 = 1\ \Omega$; $R_1 = 6\ \Omega$; $R_2 = 4\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$. Hallar la corriente en cada rama.

/////



Asignamos una denominación y un sentido arbitrario a las corrientes desconocidas, tal como se observa en la figura.

En el nudo a: $\mathbf{i_1} + \mathbf{i_2} - \mathbf{i_3} = 0$ *(1)*

Como hay dos nudos, sólo existe una ecuación independiente.

Consideremos ahora las mallas superior e inferior. La regla de las mallas, adoptando el recorrido en el sentido de las agujas del reloj, nos proporciona las dos ecuaciones faltantes:

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = -i_1(R_1 + r_1) + i_2(R_2 + r_2)$$

$$-\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -i_2(R_2 + r_2) - i_3(R_3 + r_3)$$

Reemplazando por sus valores numéricos:

$-20 + 18 = -\mathbf{i_1}\ (6 + 1) + \mathbf{i_2}\ (4 + 1) \Rightarrow 2 - 7\,\mathbf{i_1} + 5\,\mathbf{i_2} = 0$ *(2)*

$-18 + 7 = -\mathbf{i_2}\ (4 + 1) - \mathbf{i_3}\ (2 + 1) \Rightarrow 11 - 5\,\mathbf{i_2} - 3\,\mathbf{i_3} = 0$ *(3)*

Despejando i_2 de la *(1)* y sustituyendo en *(2)* y *(3)*, obtenemos:

$2 - 12\,\mathbf{i_1} + 5\,\mathbf{i_3} = 0$ *(4)*

$11 - 8\,\mathbf{i_3} + 5\,\mathbf{i_1} = 0$ *(5)*

Despejando i_3 de las ecuaciones *(4)* y *(5)*, igualando ambas expresiones y operando, se obtiene: $i_1 = 1\ A$

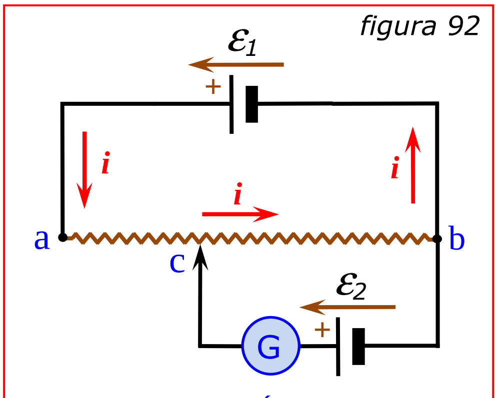
Reemplazando i_1 por su valor en la ecuación *(4)* ó *(5)*, hallamos: $i_3 = 2\ A$

Reemplazando i_1 e i_3 por sus valores en la ecuación *(1)*, hallamos: $i_2 = 1\ A$

Potenciómetro:

El potenciómetro es un instrumento con el que se puede *medir la fem de una fuente sin que se tome corriente alguna de ella*. Tiene además un gran número de aplicaciones útiles. En esencia, el potenciómetro *equilibra* una *diferencia de potencial desconocida* con una *diferencia de potencial variable y medible*.

En la *figura 92* se muestra esquemáticamente el fundamento del potenciómetro. Una



resistencia de hilo *ab* está conectada constantemente a los bornes de una *fuente de fem* ε_1.
Un *contacto deslizante* *c* está conectado a través del *galvanómetro* *G* a una segunda *fuente* ε_2, cuya fem se desea medir. *Se mueve el contacto c a lo largo del hilo hasta encontrar una posición en la cual el galvanómetro no presente desviación* (*Obviamente, debe ser* $V_{ab} \geq \varepsilon_2$). Si escribimos las expresiones de V_{cb} para los dos recorridos entre los puntos *c* y *b*, y recordamos que *no pasa corriente por el recorrido inferior*, obtenemos:

$$Recorrido\ superior \Rightarrow\ V_{cb} = i\ R_{cb}$$

$$Recorrido\ inferior \Rightarrow\ V_{cb} = \varepsilon_2$$

Por consiguiente, $i\ R_{cb}$ es *exactamente igual* a la fem ε_2. Luego puede calcularse ε_2 si se conocen i y R_{cb}. En la práctica, se *calibra* el dispositivo sustituyendo ε_2 por una fuente de fem conocida. En estas condiciones, *se puede hallar cualquier fem* ε_2 *desconocida*, *midiendo la longitud del alambre* *cb* *con la cual la corriente en* ε_2 *es cero*.

Con la corriente inferior igual a cero, la corriente i que produce la fem ε_1 tiene el mismo valor cualquiera que sea el valor de la fem ε_2.

Se construyen instrumentos de este tipo de alta precisión que permiten apreciar la tensión de una fuente de fem hasta $1\mu V$.

El término potenciómetro se aplica también a cualquier resistor variable, que por lo general tiene un elemento de resistencia circular y un contacto corredizo controlado mediante un eje giratorio y una perilla.

GALVANÓMETRO: *Antiguamente, un galvanómetro se definía como cualquier dispositivo electromagnético de bobina móvil utilizado para detectar o medir una corriente. Actualmente, sólo suelen designarse como "galvanómetros" los instrumentos de laboratorio que miden corrientes muy pequeñas (del orden de los μA y nA) y los instrumentos de cero empleados en el Potenciómetro, en el Puente de Wheatstone y en otros dispositivos afines.*

Ejercicio Nº 69: Consideremos el circuito del potenciómetro de la *figura 92*. El resistor entre a y *b* es un alambre uniforme de longitud ℓ, con un contacto corredizo *c* a una distancia *x* de *b*. Se mide una fem desconocida ε_2 deslizando el contacto hasta que la lectura del galvanómetro *G* es cero. a) Demostrar que en estas condiciones la fem desconocida está dada por $\varepsilon_2 = (x/\ell)\ \varepsilon_1$. b) ¿Porqué no es importante la resistencia interna del galvanómetro? c) Supongamos que $\varepsilon_1 = 9{,}15$ V, $\ell = 1$ m y la lectura del galvanómetro *G* es cero cuando x = 0,365 m ¿Cuánto vale la fem ε_2?

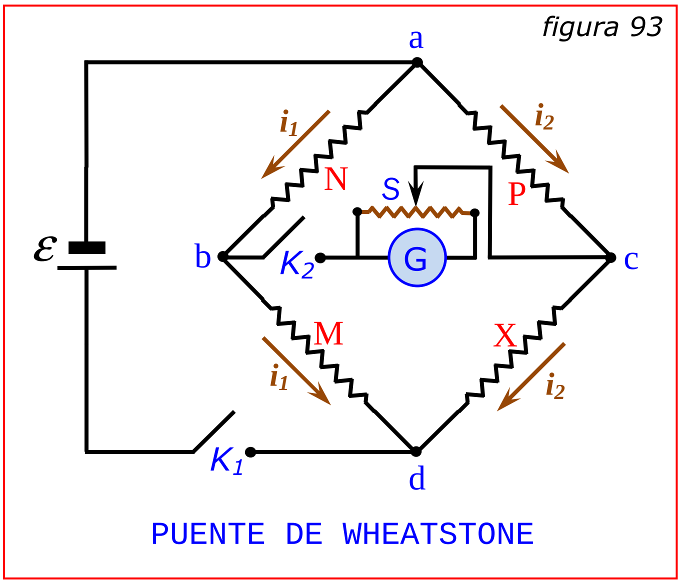
a) Cuando la lectura del galvanómetro es cero:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_2 = i\,R_{cb} \\ \varepsilon_1 = i\,R_{ab} \end{array}\right\} \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{R_{cb}}{R_{ab}} = \varepsilon_1 \frac{x}{l}$$

b) El valor de la resistencia del galvanómetro carece de importancia, puesto que ninguna corriente fluye a través de la misma.

c) $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \dfrac{x}{l} = 9{,}15 \times \dfrac{0{,}365}{1} = 3{,}34\ V$

Puente de Wheatstone:



El puente de Wheatstone se emplea principalmente para efectuar medidas rápidas y precisas de resistencias. En la *figura 93*, *M*, *N* y *P* son resistencias variables previamente graduadas y *X* representa la resistencia desconocida. Para utilizar el puente se cierran los *interruptores* K_1 y K_2 y se modifica la resistencia *P* hasta que el *galvanómetro G* no experimente desviación. Los puntos *b* y *c* están ahora al mismo potencial, es decir, la caída de tensión entre *a* y *b* es igual a la caída de tensión entre *a* y *c* $(V_{ab} = V_{ac})$. Asimismo, la caída de tensión entre *b* y *d* es igual a la existente entre *c* y *d* $(V_{bd} = V_{cd})$. Puesto que la *intensidad de la corriente* en el *galvanómetro* es nula, la *intensidad de la corriente* en *M* es igual a la de *N* (*o sea* i_1) y la *intensidad de la corriente* en *P* es igual a la de *X* (*o sea* i_2). Luego se deduce que:

$$i_1\,N = i_2\,P \qquad y \qquad i_1\,M = i_2\,X$$

Si se divide la segunda ecuación por la primera, se encuentra:

$$\boxed{X = \frac{M}{N} P}$$

Por consiguiente, *si se conocen* *M*, *N* y *P*, *puede calcularse* *X*. Para facilitar el cálculo, la razón *M/N* es en la práctica una *serie seleccionable de potencias enteras de 10*, como ser: 0,01 (10^{-2}), 0,1 (10^{-1}), 1 (10^{0}), 10 (10^{1}), 100 (10^{2}), etc.

El potenciómetro S cumple la función de protección del galvanómetro durante los tanteos preliminares, cuando el puente puede estar lejos del equilibrio. El galvanómetro está completamente protegido cuando el contacto deslizante está en el extremo izquierdo de la resistencia y tiene su máxima sensibilidad cuando el contacto está en el extremo derecho.

El interruptor K_1 de la batería debe cerrarse siempre antes que el interruptor K_2 del galvanómetro, para proteger a éste contra sobrecorrientes transitorias cuando la resistencia X desconocida es inductiva (ver el capítulo correspondiente).

Ejercicio Nº 70: Consideremos el circuito del Puente de Wheatstone de la *figura 93*. Si el galvanómetro G muestra una desviación nula cuando *M* = 900 Ω, *N* = 15 Ω y *P* = 35,68 Ω, ¿cuánto vale la resistencia desconocida X?

$$X = \frac{M}{N} P = \frac{900}{15} \times 35{,}68 = 2.140{,}8\ \Omega$$