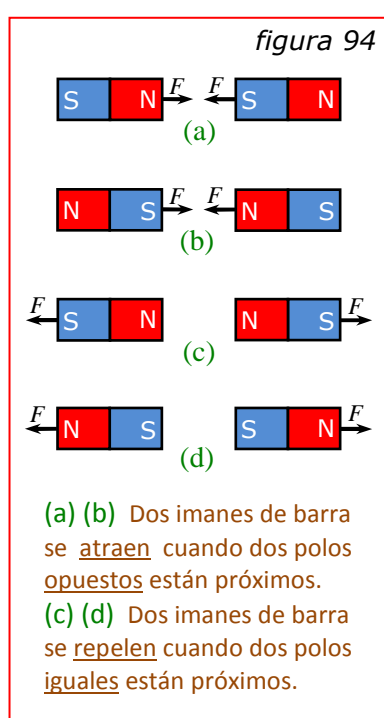


v. Magnetostática

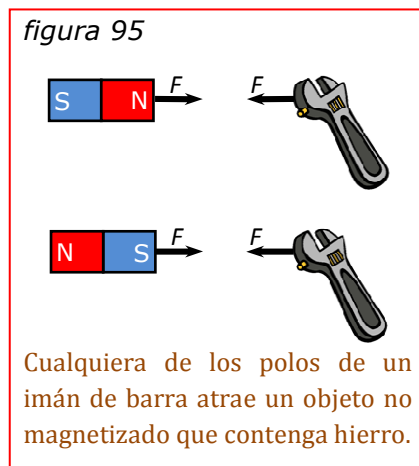
◆ Magnetismo:

Hace aproximadamente 2.500 años, los fenómenos magnéticos fueron detectados por primera vez por los griegos al observar ciertas "piedras" que atraían pedazos de hierro. Se trataba de fragmentos de un mineral de hierro encontrado cerca de la antigua ciudad de Magnesia (de donde proviene el término magnetismo) en el Asia Menor.

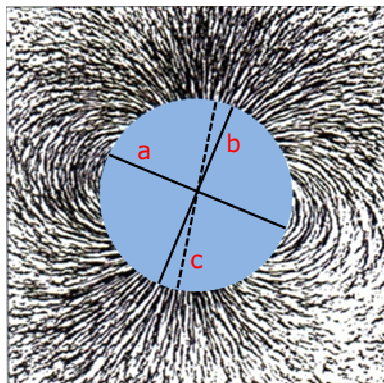


Este mineral, llamado ahora "magnetita" y conocido también como "imán natural", tiene la propiedad de atraer al hierro no imantado, siendo este efecto más pronunciado en ciertas regiones del imán llamadas polos magnéticos. Además, una barra de hierro, después de haber sido colocada cerca de un imán natural, adquiere y conserva esta propiedad de los imanes naturales. Paralelamente, si dicha barra, ahora imantada, se suspende libremente de modo que pueda girar alrededor de un eje vertical, se coloca aproximadamente en la dirección norte-sur (la aguja de una brújula es simplemente un trozo de hierro magnetizado). El extremo del imán que apunta hacia el norte se denomina **polo Norte** y el otro extremo se denomina **polo Sur**.

Los **polos opuestos se atraen** mutuamente y los **polos iguales se repelen** entre sí (figura 94). Un objeto que contiene hierro pero no está imantado, es atraído por cualquiera de los polos de un imán (figura 95). Por analogía con las interacciones eléctricas, se describen las interacciones de las figuras 94 y 95 afirmando que un imán de barra origina un **campo magnético** en el espacio que lo rodea y que un segundo cuerpo responde a ese campo. Una aguja de brújula tiende a alinear su posición con un campo magnético.



Similitud con el campo magnético terrestre, logrado con limaduras de hierro alrededor de una esfera imanada.



(a) Ecuador ; (b) Eje de Rotación ; (c) Eje Magnético.

figura 96

La tierra es un imán natural con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte y sur. Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al polo sur de un imán, lo que llamamos polo norte de la tierra es también el polo sur magnético de la tierra (figura 96).

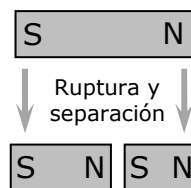
Aunque las cargas eléctricas positivas y negativas y los polos magnéticos norte y sur son semejantes en muchos aspectos, hay una diferencia importante: los polos magnéticos siempre se presentan por parejas. No hay indicios experimentales de que exista un polo magnético individual aislado (monopolo). Si se rompe un imán por la mitad, aparecen polos iguales y opuestos a cada lado del punto de rotura; es decir, aparecen dos

imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur (figura 97).

El primer indicio de la relación entre el magnetismo y las cargas en movimiento, fue descubierto en 1819 por el científico danés Hans Christian Oersted, quien observó que la aguja de una brújula se desviaba al encontrarse en la proximidad de un hilo conductor que transportaba una corriente (figura 98).

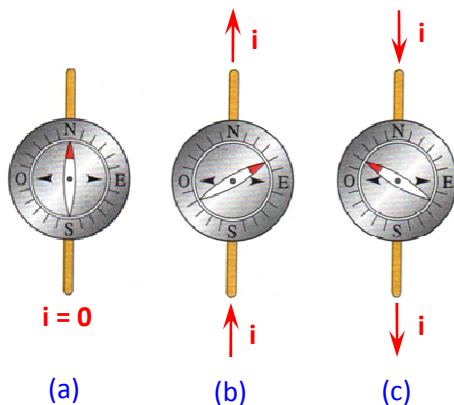
Doce años más tarde, el inglés Michael Faraday observó que en un circuito se producía una corriente instantánea, cuando en otro circuito próximo se establecía o se interrumpía una corriente. Poco tiempo después descubrió que el movimiento de un imán acercándose o alejándose de un circuito producía el mismo efecto. El trabajo de Oersted demostró que podían producirse efectos magnéticos por

figura 97



En la ruptura de un imán de barra, cada fragmento tiene un polo norte y un polo sur, incluso si los fragmentos son de distinto tamaño.

Si colocamos una brújula directamente sobre un alambre conductor horizontal por el cual circula una corriente, la aguja de la brújula se desvía según el sentido de dicha corriente.



(a) Cuando no hay corriente en el conductor, la aguja apunta hacia el norte.
 (b) Cuando la corriente fluye hacia el norte, la aguja se desvía hacia el este.
 (c) Cuando la corriente fluye hacia el sur, la aguja se desvía hacia el oeste.

figura 98

el movimiento de cargas eléctricas y el de Faraday que podían obtenerse corrientes eléctricas por el movimiento de imanes.

Actualmente se sabe que las fuerzas magnéticas entre dos cuerpos se deben fundamentalmente a interacciones ente los electrones en movimiento de los átomos de dichos cuerpos (hay además interacciones eléctricas entre los dos cuerpos, pero son mucho más débiles que las interacciones magnéticas porque los dos cuerpos son eléctricamente neutros). En el interior de un cuerpo magnetizado, como el caso de un imán, existe un movimiento coordinado de ciertos electrones atómicos; en un cuerpo no magnetizado, estos movimientos no son coordinados.

Como en el caso de las fuerzas electrostáticas, el medio en el cual se muevan las cargas puede tener un efecto pronunciado sobre las fuerzas magnéticas observadas entre ellas. En lo que sigue supondremos que las cargas se encuentran en el vacío. Para todos los fines prácticos, los resultados se aplicarán igualmente a cargas y conductores que están en el aire.

◆ Campo Magnético:

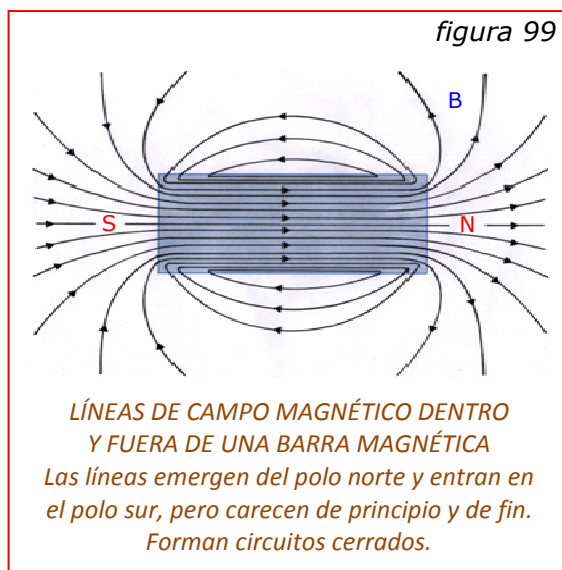
En lugar de considerar directamente las fuerzas ejercidas por una carga móvil sobre otra, resulta más conveniente adoptar el punto de vista de que una carga móvil crea un campo magnético en el espacio que la rodea, siendo luego este campo el que ejerce una fuerza sobre otra carga que se mueve en él.

Se dice que existe un campo magnético en un punto, si se ejerce una fuerza sobre una carga móvil que pase por dicho punto.

Existen dos aspectos en el problema de calcular las fuerzas magnéticas ejercidas entre cargas móviles. El primero consiste en determinar el valor y dirección del campo magnético en un punto (en base a los datos correspondientes a la carga móvil que crea el campo), y el segundo, en calcular el valor y dirección de la fuerza ejercida sobre una carga móvil en un campo dado. Comenzaremos por el segundo aspecto del problema; es decir, aceptaremos por ahora que las cargas móviles y las corrientes crean campos magnéticos, y estudiaremos las leyes que determinan la fuerza que se ejerce sobre una carga móvil en el campo.

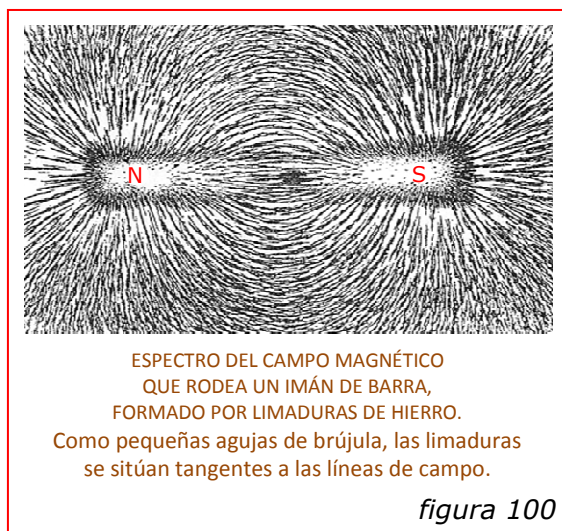
Aunque ambos son esencialmente diferentes, hay muchas analogías entre campos eléctricos y magnéticos. Lo mismo que en el eléctrico, el campo

magnético es una magnitud vectorial que tiene en cada punto un cierto valor y una determinada dirección. Además, así como resultó útil introducir dos vectores eléctricos E y D para describir distintos aspectos de un campo eléctrico, también resulta conveniente considerar dos vectores magnéticos B y H , relacionados análogamente. Comenzaremos estudiando el vector INDUCCIÓN MAGNÉTICA B , llamado también DENSIDAD DE FLUJO B o simplemente CAMPO MAGNÉTICO B .



Igual que en un campo eléctrico, un campo magnético puede representarse por líneas llamadas líneas de inducción o líneas de campo, cuya dirección en cada punto es la del vector campo magnético B .

Por convenio, las líneas de campo se dibujan de tal manera que su número por unidad de área de sección transversal sea proporcional a la magnitud del vector B . En donde las líneas están muy cercanas, B es grande, en donde están muy separadas, B es pequeño.



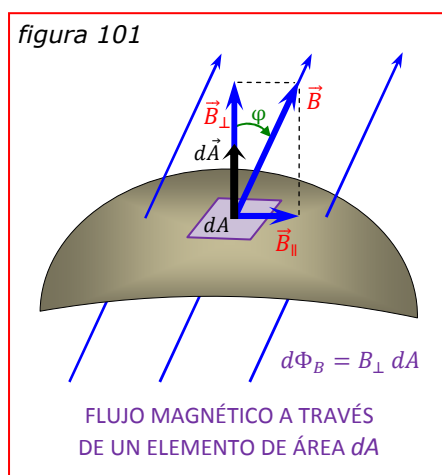
Una importante diferencia con las líneas de campo eléctrico, que comienzan en las cargas positivas y terminan en las negativas, es que las líneas de campo magnético son siempre cerradas (figura 99).

El FLUJO MAGNÉTICO Φ_B a través de una superficie (figura 101), puede definirse en forma exactamente análoga a como se definió el flujo Φ_E en el campo eléctrico:

$$\Phi_B = \int B \cos \varphi dA = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (118)$$

En el caso especial en que B es uniforme y normal a la superficie finita A :

$$\Phi_B = B A \quad (119)$$



La unidad SI del campo magnético B se llama tesla (T), en honor del científico e inventor serbioestadounidense *Nicolás Tesla* (1857-1943). La unidad SI del flujo magnético Φ_B se llama weber (Wb), en honor del físico alemán *Wilhelm Weber* (1804-1891).

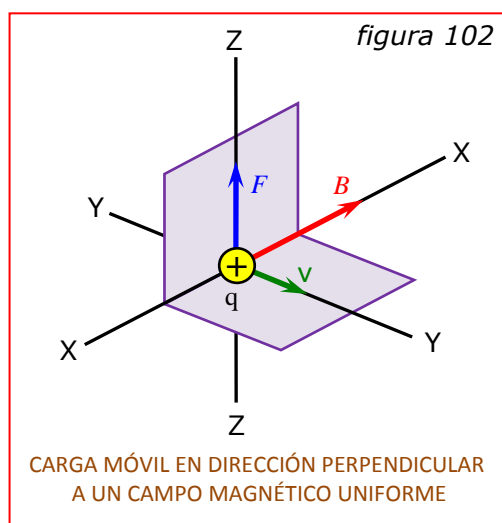
$$1 T = 1 Wb/m^2$$

Por analogía con la ley de Gauss para el flujo eléctrico, si existiesen las cargas magnéticas individuales (monopolos magnéticos), el flujo magnético total a través de una superficie cerrada sería proporcional a la carga magnética total encerrada. Pero sabemos que jamás se ha detectado un monopolo magnético y que las líneas de campo magnético forman siempre espiras cerradas (figura 99). En consecuencia, el flujo magnético total a través de una superficie cerrada es siempre cero:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (120)$$

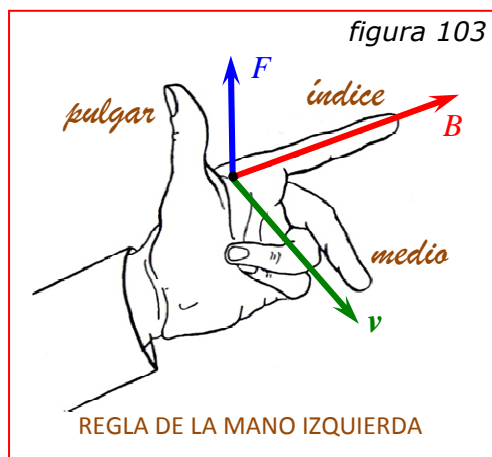
A esta ecuación se la suele llamar LEY DE GAUSS DEL MAGNETISMO.

● Fuerza de un Campo Magnético sobre una Carga Móvil:



La figura 102 representa una región en la cual la densidad de flujo magnético B es uniforme y perpendicular al plano YZ . Es decir, las líneas de campo son rectas paralelas al eje X e igualmente espaciadas. Una carga positiva q , que se mueve con velocidad v perpendicularmente a la dirección del campo, está sometida, según surge de evidencias experimentales, a una fuerza F en la dirección indicada, perpendicular a su velocidad v y a la

inducción magnética B . El valor de esta fuerza está dado por:

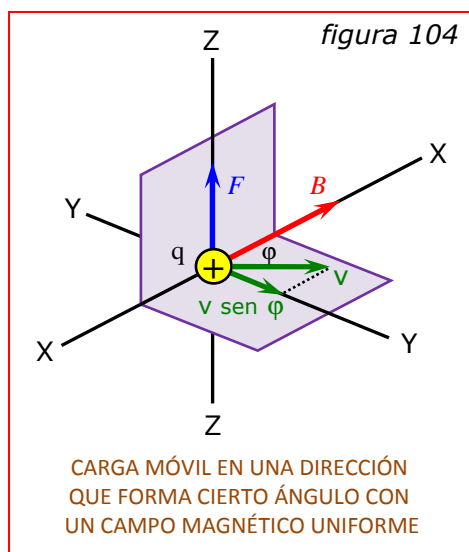


$$F = q v B \quad (121)$$

Los **vectores** B , v y F forman una terna de ejes rectangulares. La relación entre sus sentidos puede recordarse por la regla de la mano izquierda (figura 103).

El sentido de la fuerza ejercida sobre una carga negativa es opuesto al de la fuerza ejercida sobre una carga positiva.

La figura 102 representa un caso especial en el cual la velocidad de la carga móvil es perpendicular a la dirección del campo. Consideremos el caso más general en donde el vector velocidad v forma un ángulo φ con el vector inducción B , como indica la figura 104. En tal caso, el valor de la fuerza ejercida sobre la carga está dado por:



$$F = q v B \text{ sen } \varphi \quad (122)$$

Por lo tanto, la **fuerza** es **proporcional a la componente de la velocidad ($v \text{ sen } \varphi$) perpendicular a la dirección del campo magnético**. La dirección de la **fuerza** es siempre perpendicular al plano determinado por v y B . De la figura 104 resulta evidente que cuando $\varphi = 90^\circ$, el caso se reduce al de la figura 102, y cuando $\varphi = 0$ ó $\varphi = 180^\circ$, **la carga móvil no está sometida a ninguna fuerza**.

Utilizando la notación vectorial \Rightarrow

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (123)$$

"El producto vectorial de dos vectores es igual a otro vector cuyo módulo es el producto de los módulos de ambos por el seno del ángulo que forman. Su dirección es perpendicular al plano determinado por los dos vectores y su sentido es el de avance de un tornillo cuando se lo hace girar de modo que el primer vector coincida con el segundo".

La ecuación (122) puede utilizarse para definir la inducción magnética B :

$$B = \frac{F}{q v \text{ sen } \varphi}$$

"El valor de la inducción magnética en un punto, es el cociente obtenido al dividir la fuerza que se ejerce sobre una carga móvil que pasa por el punto, por el producto de la carga y de la componente de su velocidad perpendicular a la inducción".

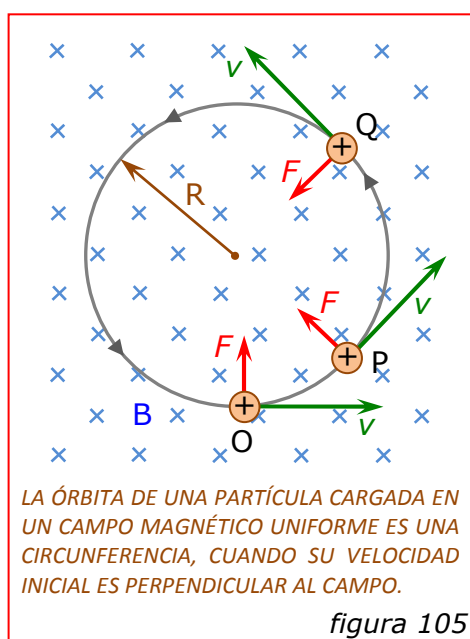
En consecuencia, la unidad SI de B , el tesla (weber por metro cuadrado), es equivalente a $Ns/Cm = N/Am$ (donde $C/s = A$). Luego $\Rightarrow T = Wb/m^2 = N/Am$.

Una unidad de B usada corrientemente, deducida del antiguo sistema cgs, es el gauss (G). Su empleo aún persiste debido a numerosas tablas de materiales magnéticos confeccionadas en el pasado ($1 G = 10^{-4} T$).

El tesla es una unidad bastante grande. El campo magnético terrestre es del orden de $10^{-4} T$. Los campos magnéticos próximos a imanes permanentes poderosos, suelen ser de $0,1$ a $0,5 T$ y los grandes electroimanes de laboratorio y de la industria producen campos de 1 a $2 T$. Campos magnéticos superiores a $10 T$ son muy difíciles de producir, pues las fuerzas magnéticas resultantes pueden romper los imanes en pedazos o aplastarlos.

El hecho de que la fuerza magnética sea siempre perpendicular a la dirección del movimiento, quiere decir que, para campos magnéticos constantes, el trabajo hecho por esta fuerza sobre la partícula es cero. Para un elemento de la trayectoria de la partícula de longitud dl , el trabajo $dW = F dl$ es cero porque F y dl son siempre perpendiculares entre sí. Por lo tanto, un campo magnético estático no puede cambiar la energía cinética de una carga en movimiento, sino que sólo puede desviarla.

◆ Movimiento de una Carga Puntual en un Campo Magnético:



Un vector que se aleja del lector se representa por una cruz (x) que puede imaginarse como la cola de una flecha. Un vector dirigido hacia el lector se indica por un punto (•), que corresponde a la punta de la flecha.

En la figura 105, una partícula cargada positivamente situada en O , se encuentra en un campo magnético uniforme B . Supongamos que se comunica a dicha partícula una velocidad v en una dirección perpendicular al campo. La regla de la mano izquierda indica que se ejerce sobre la partícula en dicho punto

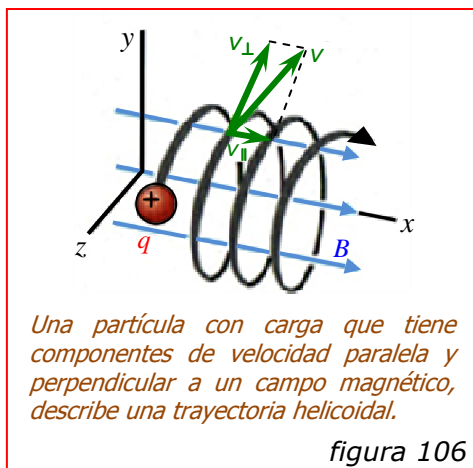
una **fuerza** F , vertical y dirigida hacia arriba, igual a $q v B$. Puesto que la fuerza es perpendicular a la velocidad, no afectará el valor de ésta sino que simplemente modificará su dirección. En puntos tales como P y Q , las direcciones de la fuerza y la velocidad se habrán modificado como se indica, pero el valor de la fuerza permanece invariable porque los valores de q , v y B son constantes. Por consiguiente, la partícula se mueve bajo la acción de una **fuerza** cuyo valor es constante, pero cuya dirección es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula.

En consecuencia, la órbita recorrida por la partícula es una circunferencia descrita con velocidad tangencial constante v , siendo F la fuerza centrípeta. De acuerdo con la segunda ley de Newton ($F = m a$), se tiene:

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

y el radio de la órbita circular será:

$$R = \frac{m v}{q B} \quad (124)$$

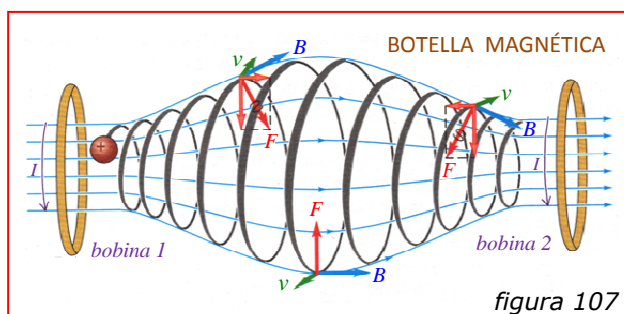


Si la dirección de la velocidad inicial no es perpendicular al campo, la **partícula** se mueve describiendo una hélice (figura 106). La proyección de esta hélice sobre un plano perpendicular al campo es una circunferencia de radio:

$$R = \frac{m v \sin \varphi}{q B} \quad (125)$$

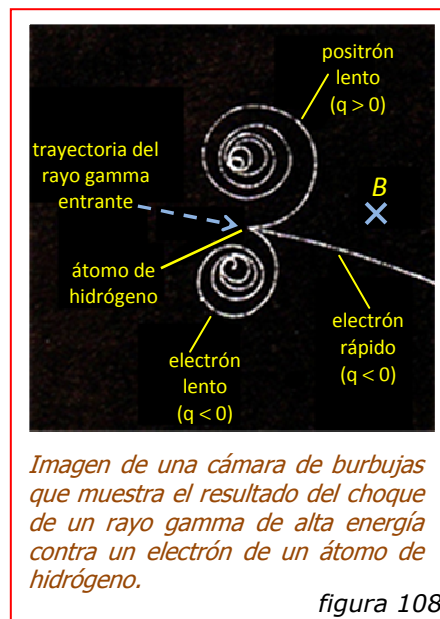
La velocidad axial a lo largo de la hélice es constante e igual a $v \cos \varphi$.

El movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos no uniformes es muy complejo. La figura 107 muestra una interesante configuración de campo magnético producido por dos bobinas circulares, en la cual el campo es débil en el centro y muy intenso en ambos extremos. Las partículas próximas a cualquiera de los extremos experimentan una fuerza magnética hacia el centro de la región. Un análisis detallado del movimiento de una partícula cargada en tal campo, revela que la partícula recorrerá una trayectoria en espiral alrededor de las líneas de inducción y quedará atrapada oscilando atrás y adelante entre los extremos.



Siendo que las partículas con carga pueden quedar atrapadas en un campo magnético de este tipo, a este dispositivo se le conoce como *botella magnética*. Se utiliza para confinar haces densos de partículas cargadas (plasma o gas ionizado) con temperaturas del orden de 10^6 K (temperatura que vaporizaría cualquier recipiente), en las investigaciones sobre *fusión nuclear*.

Las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre partículas con carga desempeñan un importante papel en los estudios sobre partículas elementales. La *figura 108* muestra una cámara llena de hidrógeno líquido y con un campo magnético dirigido hacia el plano de la fotografía. Un rayo gamma de alta energía desaloja un electrón de un átomo de hidrógeno y lo lanza con gran velocidad, creando así un rastro visible en el hidrógeno líquido. El rastro muestra que el electrón se curva hacia abajo debido a la fuerza magnética. La energía de la colisión produce además otro electrón y un positrón (electrón con carga positiva). Debido a sus cargas opuestas, las trayectorias del electrón y del positrón se curvan asimismo en direcciones opuestas. Conforme estas partículas se abren paso a través del hidrógeno líquido, chocan con otras partículas con carga y pierden energía y velocidad.



Ejercicio N° 71: Un área circular que tiene un radio de 7,5 cm yace en el plano xy. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de este círculo si lo atraviesa un campo magnético uniforme $B = 0,25$ T, cuando su dirección es la indicada en los siguientes casos?: a) la del eje + z; b) forma un ángulo de 57° con respecto a la dirección del eje + z; c) la del eje + y.

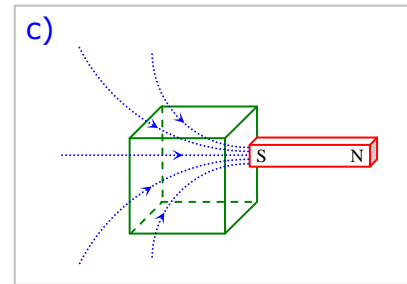
a) $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = (0,25 \text{ T}) \pi (0,075 \text{ m})^2 = 4,42 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

b) $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = (0,25 \text{ T}) \pi (0,075 \text{ m})^2 \cos 57^\circ = 2,41 \times 10^{-3} \text{ Wb}$

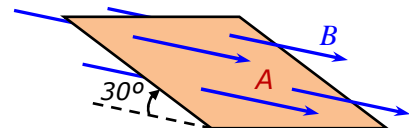
c) $\Phi_B = 0 \quad (\vec{B} \perp \vec{A})$

Ejercicio N° 72: El flujo magnético a través de cierta cara de un cubo es de + 0,15 Wb. a) ¿Cuál debe ser el flujo magnético total a través de las otras cinco caras del cubo? b) ¿Porqué no es necesario conocer las dimensiones del cubo para responder la anterior pregunta? c) Supongamos que el flujo magnético se debe a un imán permanente como el de la *figura 99*. Mediante un croquis, muestre dónde podría hallarse el imán con respecto al cubo en cuestión.

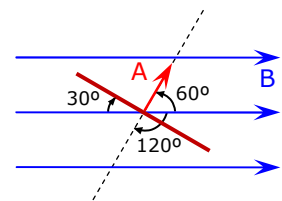
- a) El flujo magnético total a través de una superficie cerrada es igual a cero, así que el flujo magnético total a través de las superficies restantes del cubo debe ser $-0,15 \text{ Wb}$.
- b) Al tratarse de una superficie cerrada, cualesquiera sean las dimensiones del cubo el resultado es siempre el mismo.



Ejercicio N° 73: La figura muestra una vista en perspectiva de una superficie plana con un área de 5 cm^2 en un campo magnético uniforme. Si el flujo magnético a través de esta área es de $1,5 \text{ mWb}$, calcular la magnitud del campo magnético y hallar la dirección del vector de área.



Como el campo magnético es uniforme, B y Φ son los mismos en todos los puntos de la superficie. En consecuencia, podemos aplicar la ecuación $\Phi_B = B A \cos \varphi$, siendo B la variable que se busca. La dirección de A es perpendicular a la superficie y φ podría ser de 60° o 120° , según vemos en la figura de la derecha. Pero tanto Φ_B como B y A son positivos, por lo que $\cos \varphi$ debe ser también positivo, lo cual nos permite descartar 120° .



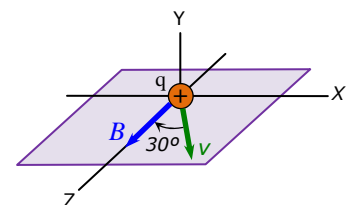
$$B = \frac{\Phi_B}{A \cos \varphi} = \frac{1,5 \times 10^{-3} \text{ Wb}}{(5 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \cos 60^\circ} = 6 \text{ T}$$

Ejercicio N° 74: Una partícula con una carga de $-1,24 \times 10^{-8} \text{ C}$ se desplaza con una velocidad instantánea $\vec{v} = (4,19 \times 10^4 \text{ m/s}) \hat{i} + (-3,85 \times 10^4 \text{ m/s}) \hat{j}$. ¿Qué fuerza ejerce sobre esta partícula un campo magnético: a) $B = (1,4 \text{ T}) \hat{i}$; b) $B = (1,4 \text{ T}) \hat{k}$?

a) $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = (-1,24 \times 10^{-8} \text{ C})(-3,85 \times 10^4 \text{ m/s})(1,4 \text{ T})(\hat{j} \times \hat{i}) = -(6,68 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{k}$

b) $\vec{F} = (-1,24 \times 10^{-8} \text{ C})(1,4 \text{ T})[(4,19 \times 10^4 \text{ m/s})(\hat{i} \times \hat{k}) + (-3,85 \times 10^4 \text{ m/s})(\hat{j} \times \hat{k})] =$
 $= (7,27 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{j} + (6,68 \times 10^{-4} \text{ N}) \hat{i}$

Ejercicio N° 75: Un haz de protones ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$) se desplaza a $3 \times 10^5 \text{ m/s}$ a través de un campo magnético uniforme de 2 T , dirigido a lo largo del eje de las z positivo, como se observa en la figura. La velocidad de cada protón se desarrolla en el plano xz , formando un ángulo de 30° respecto al eje z positivo. Hallar la fuerza que se ejerce sobre un protón.



La carga es positiva y por lo tanto la fuerza tiene la misma dirección que el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$. De acuerdo con la regla del tornillo, esta dirección es a lo largo del eje de las y y negativo. La magnitud de la fuerza es:

$$F = q v B \sen \varphi = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^5 \text{ m/s})(2 \text{ T})(\sen 30^\circ) = 4,8 \times 10^{-14} \text{ N}$$

vectorialmente:

$$\vec{v} = (3 \times 10^5 \text{ m/s})(\sen 30^\circ) \hat{i} + (3 \times 10^5 \text{ m/s})(\cos 30^\circ) \hat{k}$$

$$\vec{v} = (3 \times 10^5 \text{ m/s})(\sen 30^\circ \hat{i} + \cos 30^\circ \hat{k})$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(3 \times 10^5 \text{ m/s})(2 \text{ T})[(\sen 30^\circ \hat{i} + \cos 30^\circ \hat{k}) \times \hat{k}]$$

$$\vec{F} = -(4,8 \times 10^{-14} \text{ N}) \hat{j}$$

Hallamos nuevamente que la magnitud de la fuerza es $4,8 \times 10^{-14} \text{ N}$ y que su dirección es la del eje y negativo. Si el haz fuera de electrones, la carga sería negativa y la dirección de la fuerza se invertiría, pero la magnitud seguiría siendo la misma.

Ejercicio Nº 76: En una situación como la que se muestra en la figura 106 (pág. 143), donde la partícula con carga es un protón ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$; $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$), el campo magnético uniforme está dirigido a lo largo del eje de las x y su magnitud es de $0,5 \text{ T}$. Sólo la fuerza magnética actúa sobre el protón. En $t = 0$ el protón tiene las componentes de velocidad $v_x = 1,5 \times 10^5 \text{ m/s}$, $v_y = 0$ y $v_z = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$.

a) En $t = 0$, hallar la fuerza sobre el protón y su aceleración.

b) Encontrar el radio de la trayectoria helicoidal, la velocidad angular del protón y el avance de la hélice (por cada revolución).

$$\text{a) } \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} = q(v_x \hat{i} + v_z \hat{k}) \times B \hat{i} = q v_z B \hat{j}$$

$$\vec{F} = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(2 \times 10^5 \text{ m/s})(0,5 \text{ T}) \hat{j} = (1,6 \times 10^{-14} \text{ N}) \hat{j}$$

Esto puede parecer una fuerza muy débil, pero la aceleración resultante es enorme por ser tan pequeña la masa del protón:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-14} \text{ N}}{1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \hat{j} = (9,58 \times 10^{12} \text{ m/s}^2) \hat{j}$$

b) En $t = 0$, la componente de velocidad perpendicular a B es v_z . Luego:

$$R = \frac{m v_z}{|q| B} = \frac{(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(2 \times 10^5 \text{ m/s})}{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,5 \text{ T})} = 4,18 \times 10^{-3} \text{ m}$$

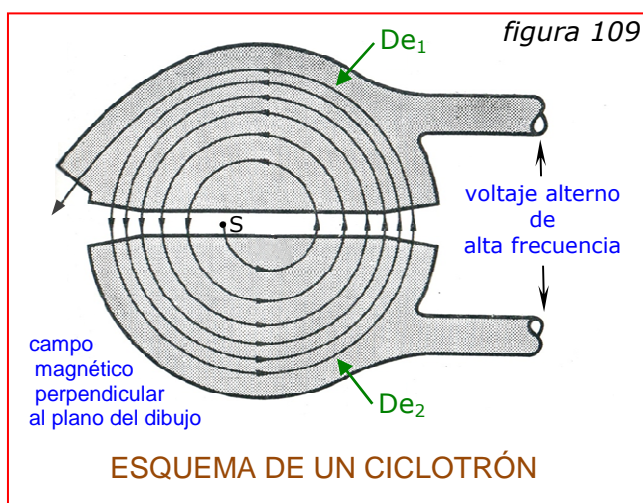
$$\omega = \frac{v_z}{R} = v_z \frac{|q| B}{m v_z} = \frac{|q| B}{m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(0,5 \text{ T})}{(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 4,79 \times 10^7 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4,79 \times 10^7 \text{ rad/s}} = 1,31 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (\text{período o tiempo de una revolución})$$

$$\text{Avance} = v_x T = (1,5 \times 10^5 \text{ m/s})(1,31 \times 10^{-7} \text{ s}) = 0,0197 \text{ m}$$

El avance de la hélice es casi cinco veces mayor que el radio. Esta trayectoria helicoidal está mucho más "estirada" que la de la figura 106.

◆ Ciclotrón:

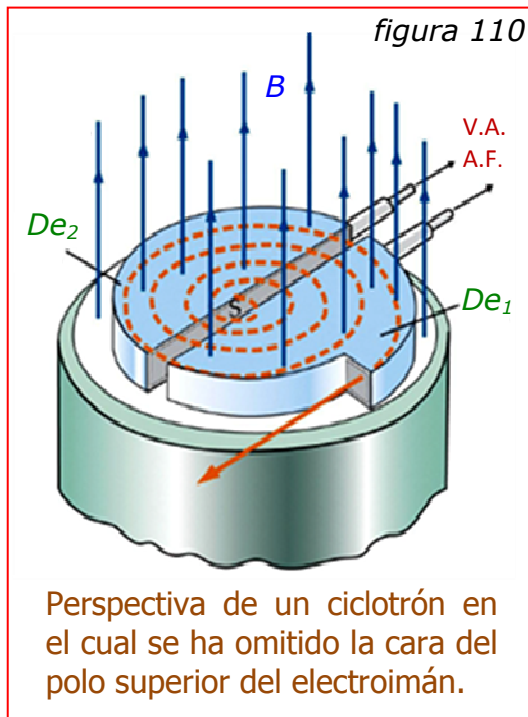


El ciclotrón es un aparato desarrollado en 1931 con el fin de conseguir un haz de partículas atómicas cargadas que posean una gran velocidad. Su parte fundamental es un par de cámaras metálicas que tienen forma análoga a las mitades de una caja cilíndrica que ha sido cortada por uno de sus diámetros (figura 109). Estas cajas huecas se denominan *Des* (D) a causa de su

forma y tienen sus bordes paralelos y ligeramente separados entre sí. Un manantial de iones (normalmente núcleos cargados positivamente de hidrógeno pesado, llamado deuterio) se coloca cerca del punto medio del espacio que queda entre las *Des*. Estas últimas se conectan a una fuente de tensión alterna de muy alta frecuencia, de modo que el potencial entre las *Des* es obligado a cambiar rápidamente varios millones de veces por segundo. Por lo tanto, el campo eléctrico en el espacio comprendido entre las *Des* está dirigido primero hacia una y luego hacia la otra, mientras que, a causa del efecto de pantalla de las mismas, el espacio comprendido dentro de cada una es una región de campo eléctrico nulo.

Ambas *Des* están encerradas dentro de un recipiente metálico, en el cual se ha hecho el vacío. El aparato completo está colocado entre los polos de un potente electroimán que proporciona un campo magnético cuya dirección es perpendicular a las bases del recipiente cilíndrico (figura 110).

Consideremos un ion de carga $+q$ y masa m , emitido por el manantial de iones S en el instante que *De*₁ es positiva. El ion es acelerado por el campo eléctrico



creado entre las *Des* y entra en la región libre de campo (*eléctrico*) situada dentro de *De₂* con una velocidad *v₁* (por ejemplo). Puesto que su movimiento es perpendicular al campo magnético, describirá una *trayectoria circular de radio*:

$$r_1 = \frac{m v_1}{q B}$$

Si a continuación, durante el tiempo necesario para que el ion complete una semicircunferencia, el campo eléctrico ha cambiado de sentido estando ahora dirigido hacia *De₁*, el ion será acelerado de nuevo

mientras cruza el espacio entre las *Des* y entrará en *De₁* con una velocidad mayor *v₂*. En consecuencia, describirá un semicírculo de mayor radio dentro de *De₁* para salir de nuevo al espacio comprendido entre las *Des*. La *velocidad angular* ω del ion es:

$$\omega = \frac{v}{r} = B \frac{q}{m} \quad (126)$$

Por lo tanto, *la velocidad angular es independiente de la velocidad del ion y del radio de la circunferencia que describe, dependiendo sólo del campo magnético y de la razón q/m correspondiente al ion. En consecuencia, si el campo eléctrico se invierte al cabo de intervalos de tiempo iguales al tiempo necesario para que el ion realice una semirrevolución, el campo en el espacio comprendido entre las *Des* tendrá siempre el sentido adecuado para acelerar el ion cada vez que cruce dicho espacio.*

*Lo que hace factible al ciclotrón es el hecho de que el tiempo de rotación es independiente del radio, ya que la regularidad de los intervalos de inversión es realizada automáticamente por el circuito oscilador al cual están conectadas las *Des*.*

La trayectoria de un ion es una especie de espiral, compuesta de arcos semicirculares de radio cada vez mayor, unidos por segmentos cortos a lo largo de los cuales el radio aumenta.

Si R representa el *radio exterior* de las *Des* y $v_{m\acute{a}x}$ la *velocidad del ion* cuando describe una trayectoria de este radio, se tendrá:

$$v_{m\acute{a}x} = B R \frac{q}{m} \quad (127)$$

y la *energía cinética* correspondiente será:

$$\frac{1}{2} m v_{m\acute{a}x}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{q}{m}\right)^2 B^2 R^2$$

La *diferencia de potencial* V que se requeriría para *producir la misma energía cinética* en un solo paso, puede calcularse mediante la relación:

$$\frac{1}{2} m v_{m\acute{a}x}^2 = q V \quad \text{de donde} \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B^2 R^2$$

Si los iones son deuterones, $q/m = 4,8 \times 10^7 \text{ C/kg}$. En un ciclotrón típico, $B = 2 \text{ T}$ y $R = 0,5 \text{ m}$. Por consiguiente: $V = \frac{1}{2} \times (4,8 \times 10^7) \times 2^2 \times 0,5^2 = 24 \times 10^6 \text{ voltios}$.

Es decir que los deuterones tienen la misma velocidad que si se hubiesen acelerado con una diferencia de potencial de 24 millones de voltios.

Ejercicio Nº 77: Un ciclotrón acelerador de protones posee un radio máximo de $0,7 \text{ m}$ y un campo magnético de $1,5 \text{ T}$. a) ¿A qué frecuencia debe colocarse el oscilador para acelerar los protones? b) Determinar la energía cinética con que salen los protones.

$$\text{a) } f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{B q}{2\pi m} = \frac{(1,5 \text{ T})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{2\pi (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2,29 \times 10^7 \text{ Hz} = 22,9 \text{ MHz}$$

$$\text{b) } v_{m\acute{a}x} = \frac{B R q}{m} = \frac{(1,5 \text{ T})(0,7 \text{ m})(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})}{(1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 100,6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{m\acute{a}x}^2 = \frac{1}{2} (1,67 \times 10^{-27} \text{ kg})(100,6 \times 10^6 \text{ m/s})^2 = 8,45 \times 10^{-12} \text{ J}$$

La energía de las partículas elementales, usualmente se expresa en electrón-voltios ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$):

$$E_c = \frac{8,45 \times 10^{-12} \text{ J}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} = 52,8 \text{ MeV}$$