En base a estos dos nuevos elementos, la expresión de la *ADMITANCIA* resulta:

$$\boxed{Y = G + j\,B} \qquad (206)$$

• La unidad de admitancia, conductancia y susceptancia, es el *siemens* ($S = \Omega^{-1}$).

• *El módulo* de la admitancia es: $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \dfrac{1}{Z}$

y el *ángulo de fase*: $\varphi_Y = arc\ tg\ \frac{B}{G} = arc\ tg\ -\frac{X}{R} = -\,arc\ tg\ \frac{X}{R} = -\,\varphi_Z$

Se observa que el *ángulo de la admitancia* φ_Y es igual al *ángulo de la impedancia* φ_Z, pero de *signo contrario*. En consecuencia, un *circuito capacitivo* ($-90° < \varphi < 0°$) tiene una *susceptancia positiva* y un *circuito inductivo* ($0° < \varphi < 90°$) tiene una *susceptancia negativa*.

• *Admitancias en serie*:

$$\boxed{\frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \cdots} \qquad (207)$$

• *Admitancias en paralelo*:

$$\boxed{Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \cdots} \qquad (208)$$

Consecuentemente, concluimos que los *circuitos en serie* se tratan más fácilmente en términos de la *impedancia*, mientras que los *circuitos en paralelo* en términos de la *admitancia*.

• Con un procedimiento análogo al empleado para hallar los componentes de la admitancia, podemos determinar que:

$$\boxed{Z = R + j\,X = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j\,B} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j\,\frac{-\,B}{G^2 + B^2}} \qquad (209)$$

La *figura 179 (a)* representa el diagrama fasorial de un circuito inductivo en el cual la *susceptancia* jB es negativa y la corriente está atrasada. En la *figura 179(b)* se incluye el diagrama fasorial de un circuito capacitivo en el cual la *susceptancia* jB es positiva y la corriente está adelantada. En ambos diagramas, la tensión se ha tomado sobre el eje real. Se destaca que en el circuito inductivo la *susceptancia* debe ser necesariamente negativa para que la corriente atrase y en el circuito capacitivo la *susceptancia* debe ser necesariamente positiva para que la corriente adelante.

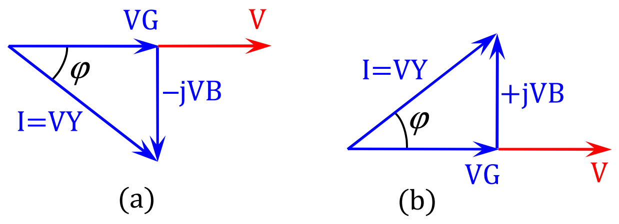
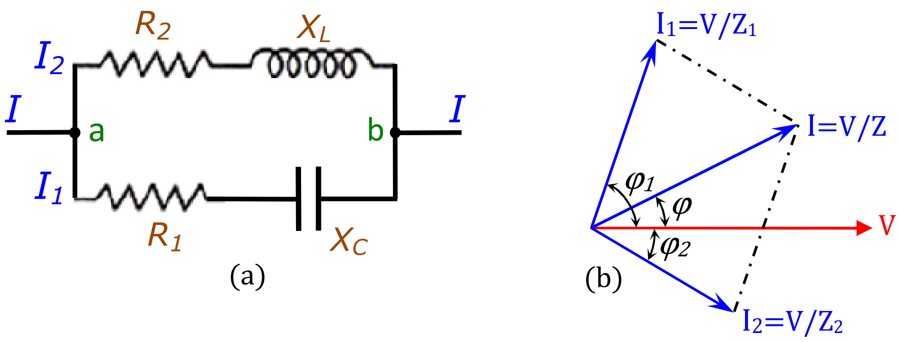


DIAGRAMA FASORIAL COMPLEJO HACIENDO COINCIDIR LA TENSIÓN CON EL EJE REAL
(a) inductivo (b) capacitivo

figura 179

Impedancias en Paralelo:

Consideremos el acoplamiento en paralelo de los elementos del circuito de la *figura 180 (a)*. La diferencia de potencial $V = V_{ab}$ en los extremos de las dos derivaciones es la misma. La intensidad I_1 en la derivación inferior *(capacitiva)* estará avanzada respecto a V y la intensidad I_2 de la derivación superior *(inductiva)* estará retardada.



(a) *elementos de circuito agrupados en paralelo*
(b) *diagrama fasorial correspondiente*

figura 180

El diagrama fasorial del circuito está dibujado en la *figura 180(b)*. El fasor V representa la diferencia de potencial común entre los extremos de cada derivación y los fasores I_1 e I_2 las intensidades. I_1 está avanzada respecto a V un ángulo $\varphi_1 = arc\ tg\ (X_1/R_1)$ e I_2 está retrasada respecto a V un ángulo $\varphi_2 = arc\ tg\ (X_2/R_2)$. La intensidad en la línea está representada por I, suma geométrica de I_1 e I_2, siendo φ la diferencia de fase entre I y V.

La *impedancia equivalente* del circuito se define como la razón de la tensión V a la intensidad de la línea I. Esta impedancia puede expresarse en función de las resistencias y reactancias de las derivaciones, pero la expresión que resulta es algo complicada y no la daremos *[aunque puede deducirse fácilmente mediante la figura 180(b)]*.

En coherencia con lo expresado en el tema anterior, en el siguiente ejercicio desarrollaremos el cálculo de un *circuito en paralelo* a través de sus *admitancias*.

Ejercicio Nº 120: Consideremos el circuito de la figura 180(a) de la página anterior, a cuyos componentes les asignamos los siguientes valores:
$R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$, $Xc = 20\ \Omega$ y $XL = 12\ \Omega$.
La fem de la fuente es de *120 V* y su frecuencia de *60 Hz*.
Calcular: a) la admitancia de cada ramal; b) la admitancia del circuito entero; c) la impedancia del circuito entero; d) la intensidad de la corriente en cada ramal; e) la intensidad total; f) el ángulo de fase del circuito entero.

a) $$G_1 = \frac{R_1}{{R_1}^2 + {X_C}^2} = \frac{15}{15^2 + 20^2} = 0{,}024\ \Omega^{-1}$$

$$B_1 = \frac{-X_C}{{R_1}^2 + {X_C}^2} = \frac{-(-20)}{15^2 + 20^2} = 0{,}032\ \Omega^{-1}$$

$$Y_1 = G_1 + j\,B_1 = (0{,}024 + j\,0{,}032)\ \Omega^{-1}$$

$$G_2 = \frac{R_2}{{R_2}^2 + {X_L}^2} = \frac{8}{8^2 + 12^2} = 0{,}0385\ \Omega^{-1}$$

$$B_2 = \frac{-X_L}{{R_2}^2 + {X_L}^2} = \frac{-12}{8^2 + 12^2} = -0{,}0577\ \Omega^{-1}$$

$$Y_2 = G_2 + j\,B_2 = (0{,}0385 - j\,0{,}0577)\ \Omega^{-1}$$

b) $$Y = G + j\,B = Y_1 + Y_2 = (0{,}024 + j\,0{,}032) + (0{,}0385 - j\,0{,}0577)$$

$$Y = (0{,}0625 - j\,0{,}0257)\ \Omega^{-1}$$

$$|Y| = \sqrt{0{,}0625^2 + 0{,}0257^2} = 0{,}0676\ \Omega^{-1}$$

c) $$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{0{,}0625}{0{,}0625^2 + 0{,}0257^2} = 13{,}69\ \Omega$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2} = \frac{-(-0{,}0257)}{0{,}0625^2 + 0{,}0257^2} = 5{,}63\ \Omega$$

$$Z = R + j\,X = (13{,}69 + j\,5{,}63)\ \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{13{,}69^2 + 5{,}63^2} = 14{,}80\ \Omega \ \Longrightarrow también:\ |Z| = \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{0{,}0676} \cong 14{,}80\ \Omega$$

d) $I_1 = V\,Y_1 = 120\,(0{,}024 + j\,0{,}032) = (2{,}88 +\ j\,3{,}84)\ A$

$|I_1| = \sqrt{2{,}88^2 +\ 3{,}84^2} =\ 4{,}80\ A$

$I_2 = V\,Y_2 = 120\,(0{,}0385 - j\,0{,}0577) = (4{,}62 -\ j\,6{,}92)\ A$

$|I_2| = \sqrt{4{,}62^2 +\ 6{,}92^2} =\ 8{,}32\ A$

e) $I = I_1 + I_2 = (2{,}88 +\ j\,3{,}84) + (4{,}62 - j\,6{,}92) = (7{,}5 - j\,3{,}08)\ A$

$también:\quad I = V\,Y = 120\,(0{,}0625 - j\,0{,}0257) = (7{,}5 - j\,3{,}08)\ A$

$|I| = \sqrt{7{,}5^2 +\ 3{,}08^2} =\ 8{,}11\ A$

f) $\varphi_Y = arc\ tg\ \dfrac{B}{G} = arc\ tg\ -\dfrac{0{,}0257}{0{,}0625} = -\ 22{,}35°\quad (1)$

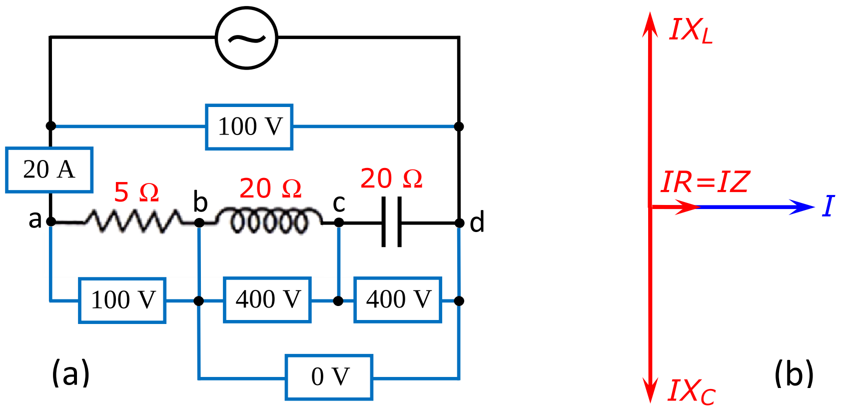
$también:\ \ \varphi_Z = arc\ tg\ \dfrac{X}{R} = arc\ tg\ \dfrac{5{,}63}{13{,}69} =\ 22{,}35°\quad (2)$

(1) la corriente atrasa respecto a la tensión
(2) la tensión adelanta respecto a la corriente

Comentario: Al contrario de lo que ocurre en un circuito serie, en un circuito paralelo, cuando un ramal capacitivo tiene mayor reactancia que un ramal inductivo, el circuito entero es inductivo. Es decir, prevalecen las características del ramal de mayor corriente reactiva.

Resonancia:

Un caso particular de interés se presenta en un *circuito en serie* que contiene *inductancia* y *capacidad*, cuando *L*, *C* y *f* tienen valores tales $2\pi\,f\,L = 1/(2\pi\,f\,C)$, o



(a) Circuito resonante en serie.
(b) Diagrama fasorial correspondiente.

figura 181

sea cuando $X_L = X_C$. Entonces $X = 0$, $Z = R$ y $\varphi = arc\ tg\ (X/R) = 0$. La *impedancia* del circuito es simplemente igual a su *resistencia* y la *intensidad* del mismo está en fase con la *tensión* entre sus bornes.

La corriente que atraviesa un circuito resonante en serie, si su resistencia es pequeña, será grande, y la tensión entre los bornes de la inductancia y de la capacidad puede ser mucho mayor que la que existe a través de todo el circuito.

Como ejemplo, consideremos un circuito en serie con los valores indicados en la *figura 181(a)*. La corriente y las distintas tensiones resultan:

$I = (V/Z) = (V/R) = 100/5 = 20\ A$

$V_R = I\ R = 20 \times 5 = 100\ V$

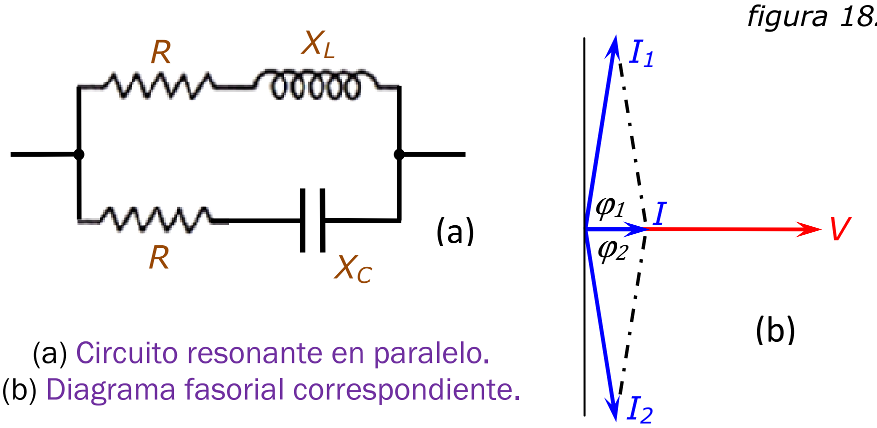
$V_L = I\ X_L = 20 \times 20 = 400\ V$

$V_C = I\ X_C = 20 \times 20 = 400\ V$

$V_{bd} = I\ X = 0\ V$

El *diagrama fasorial* para un circuito resonante en serie está representado en la *figura 181(b)*, donde se observa que las *tensiones instantáneas* entre los extremos de la inductancia y del capacitor están desfasadas 180º y, aunque los *valores eficaces* de cada una pueden ser grandes, su resultante en todo instante es nula. En consecuencia, un voltímetro aplicado entre *b* y *d* *[figura 181(a)]*, indicará cero.

figura 182



(a) Circuito resonante en paralelo.
(b) Diagrama fasorial correspondiente.

La *figura 182(a)* representa un circuito en paralelo en el cual $X_L = X_C$, siendo R igual en cada derivación. La *intensidad eficaz* es, por consiguiente, *igual* en cada derivación, estando una de estas corrientes *atrasada* y la otra *adelantada* el mismo ángulo respecto a la tensión.

Si X_L y X_C son mucho mayores que R, las diferencias de fase son aproximadamente de 90º y, como resulta evidente de la *figura 182(b)*, la intensidad I en la línea es mucho menor que la intensidad en cada derivación. La impedancia equivalente V/I del circuito en conjunto es muy elevada, mucho mayor que cualquiera de las derivaciones. Contrariamente a lo intuitivo, cuanto menor es la resistencia, mayor es la impedancia, ya que *cuando R tiende a cero*, *las diferencias de fase tienden a 90º y la corriente de la línea tiende a cero*. Se dice que el circuito está en resonancia paralela.

La condición necesaria para la resonancia es: $$2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

de la cual deducimos:

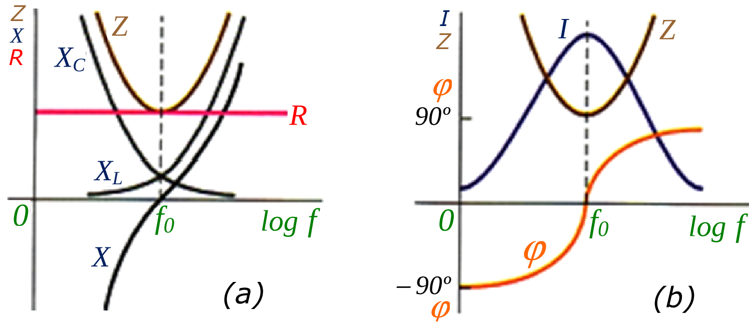
$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad (210)$$

Recordemos que esta ecuación tiene la misma forma que la de la frecuencia de un sistema mecánico oscilante:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La autoinducción representa la masa inerte y la capacidad corresponde a la inversa de la contante recuperadora ($k \Rightarrow 1/C$).

figura 183



(a) Reactancia, resistencia e impedancia en función de la frecuencia.

(b) Impedancia, corriente y ángulo de fase en función de la frecuencia.

(escala de frecuencia logarítmica)

La *figura 183(a)* muestra las gráficas de R, X_L, X_C y Z en función de la frecuencia f para el caso de resonancia en serie. Se ha utilizado una escala logarítmica para las frecuencias, a fin de abarcar un intervalo más amplio de las mismas. Se observa que siempre existe una frecuencia a la cual X_L y X_C son iguales y por lo tanto la impedancia tiene su valor mínimo, que es igual a R. Conforme se modifica la frecuencia, la amplitud de la corriente $I = V/Z$ varía como se muestra en la *figura 183(b)*, donde el valor máximo de I se presenta a la frecuencia en que Z es mínima.

Debe evitarse la resonancia en las líneas de transporte de energía, puesto que indudablemente se generarán corrientes y tensiones elevadas en ciertas partes del circuito.
Por el contrario, en los circuitos de radio y televisión se aprovecha la ventaja de la resonancia

en los procesos de sintonización. El circuito de antena de un radiorreceptor contiene una inductancia y un capacitor variable en serie. Las estaciones emisoras comprendidas dentro del intervalo de frecuencias del receptor, inducen en este circuito tensiones de frecuencias iguales a las frecuencias portadoras de dichas estaciones. Cuando el capacitor variable de sintonía se ajusta de modo que el circuito esté en resonancia con la frecuencia de una estación deseada, la intensidad de corriente que corresponde a esa frecuencia particular es grande y se obtiene una tensión también grande entre las armaduras del capacitor. Como un capacitor sólo puede estar en resonancia para una frecuencia, las otras estaciones no producirán más que corrientes y tensiones despreciables. Por consiguiente, estas estaciones no serán oídas.

Ejercicio Nº 121: En un circuito *L-C-R* en serie, *L = 0,28 H* y *C = 4 μF*. La amplitud de la tensión de la fuente es de 120 V. a) ¿Cuál es la frecuencia de resonancia del circuito? b) Cuando la fuente funciona a la frecuencia de resonancia, la amplitud de la corriente en el circuito es de 1,7 A; ¿Cuál es la resistencia *R* del resistor? c) A la frecuencia de resonancia, ¿cuáles son las tensiones máximas entre los extremos del inductor, el capacitor y el resistor?

a) $$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{(0{,}28\,H)(4\times10^{-6}\,F)}} = 150{,}4\,Hz$$

b) $$R = Z = \frac{V}{I} = \frac{V_{máx}}{I_{máx}} = \frac{120\,V}{1{,}7\,A} = 70{,}6\,\Omega$$

c) $$V_{R_{máx}} = 120\,V$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \times 150{,}4\,Hz = 945\;rad/s$$

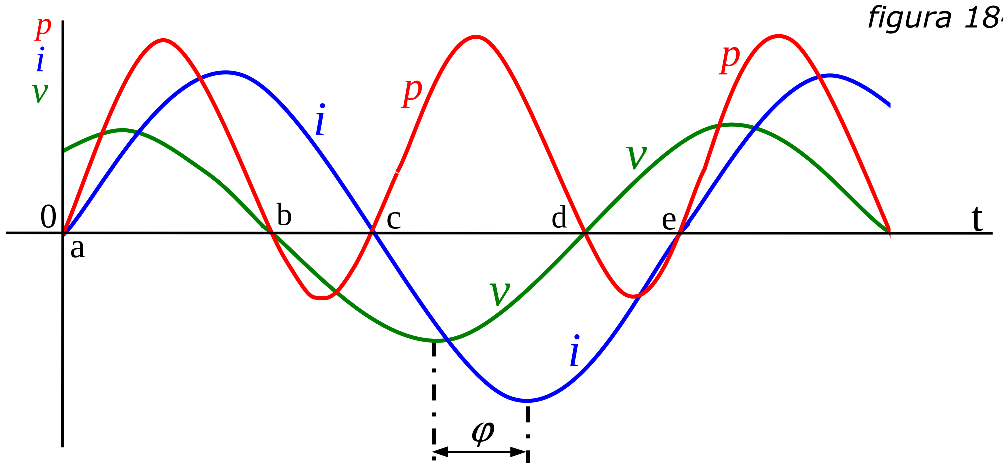
$$V_{L_{máx}} = V_{C_{máx}} = I\omega_0 L = (1{,}7\,A)(945\;rad/s)(0{,}28\,H) = 450\,V$$

Potencia en los Circuitos de Corriente Alterna:

La *potencia instantánea* suministrada a un dispositivo eléctrico de corriente alterna es igual al *producto* de la *tensión instantánea* entre los extremos del dispositivo por la *intensidad instantánea* de la corriente. La *potencia instantánea* p varía como se observa en la *figura 184*, en la cual la *gráfica de la potencia* se ha obtenido multiplicando las *curvas* que representan a v e i:

$$p = v\,i \qquad \textit{(valores instantáneos)}$$

Oportunamente hemos demostrado que cuando en un dispositivo eléctrico el *sentido de la corriente* es del borne de *potencial más elevado* al de *potencial más bajo*, *se está suministrando energía a dicho dispositivo*. Si el *sentido de la corriente* es del borfigura 184



LA POTENCIA INSTANTÁNEA p ES EL PRODUCTO DE LA TENSIÓN INSTANTÁNEA v POR LA INTENSIDAD INSTANTÁNEA i

ne de *potencial más bajo* al de *potencial más alto*, *el dispositivo está suministrando energía al circuito*.

Entre los puntos *a* y *b* de la *figura 184*, donde las *curvas* v e i son ambas *positivas*, *se suministra energía al dispositivo*. Entre los puntos *b* y *c*, donde la tensión ha cambiado de sentido pero no la corriente, *el dispositivo restituye energía al circuito*. Entre *c* y *d*, donde tanto v como i han cambiado de sentido, *se suministra energía de nuevo al dispositivo*. Cuando la *curva* de *potencia* es *positiva*, *se suministra energía al dispositivo*. Cuando la *curva* es *negativa*, *la energía es restituida al circuito*.

La *cantidad total de energía* suministrada en el tiempo t, está representada gráficamente por el *área neta* comprendida entre la *curva* de *potencia* y el eje Ot, durante dicho tiempo. Analíticamente:

$$W = \int_0^t P\, dt$$

La *potencia media* es igual a la energía total suministrada dividida por el tiempo:

$$\frac{W}{t} = P_{media} = \frac{1}{t}\int_0^t P\, dt$$

Cuando se habla de la *potencia suministrada* a un dispositivo que se encuentra en un circuito de corriente alterna, quiere decirse *potencia media* *(la potencia eficaz carece de sentido)*. En general v e i están *desfasadas* un ángulo φ:

$$v = V_m\, sen\, \omega t$$

$$i = I_m \, sen\,(\omega t - \varphi)$$

Si se efectúa el *producto* v por i y después se calcula *la media* durante un intervalo de tiempo igual a *un período*, se obtiene:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V_m \, I_m \, sen\,\omega t \; sen\,(\omega t - \varphi)\,dt$$

$$P = \frac{V_m \, I_m}{2} \cos\varphi$$

$$\boxed{P = V \, I \cos\varphi} \qquad (211)$$

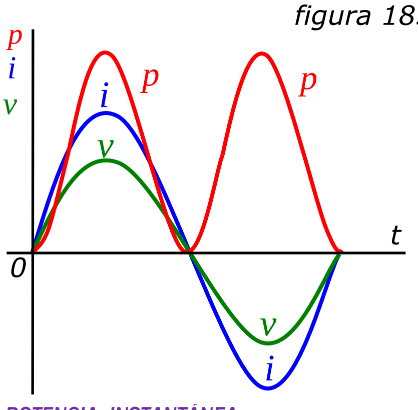
Es decir, la *potencia media* P suministrada a un *dispositivo* que se encuentra en un circuito de *corriente alterna*, es igual al *producto* de la *tensión eficaz* V por la *corriente eficaz* I y por el *coseno del ángulo de desfase* φ.

A la *potencia media* P se le llama *POTENCIA ACTIVA*, porque es en definitiva la parte que aprovecha el circuito en alguna transformación.

La magnitud $\cos\varphi$ se denomina *FACTOR DE POTENCIA* del dispositivo. Según sea la naturaleza de este dispositivo, dicho factor puede tener cualquier valor comprendido entre *cero* $(\varphi = 90°)$ y la *unidad* $(\varphi = 0°)$.

En la *figura 185* se representa la curva de *potencia instantánea* cuando el dispositivo alimentado es una *resistencia pura* *(cos φ = 1)*, o sea que la ecuación (211) se reduce a $P = V\,I$. Adviértase que ésta última tiene la misma forma que en el caso de un circuito de corriente continua.

figura 185



POTENCIA INSTANTÁNEA
CON RESISTENCIA PURA

Un *factor de potencia* *nulo* significa que el dispositivo consiste en una *reactancia pura*, *inductiva* o *capacitiva*. En virtud de la ecuación (211), la *potencia activa* suministrada a dicho dispositivo *es nula*, *lo cual evidentemente es cierto, dado que la energía suministrada a un condensador o a una inductancia, se emplea en crear un campo eléctrico o un campo magnético, siendo que toda esta energía se recupera cuando el campo desaparece posteriormente [Excepciones: a) si existe histéresis (ver capítulo siguiente), no se recupera toda la energía suministrada al circuito; b) a frecuencias elevadas, la energía es radiada desde* *el circuito en forma de ondas electromagnéticas]*. *Durante las fases del ciclo en las cuales el campo disminuye, la reactancia restituye energía al circuito y ayuda a girar al generador.*

Si el circuito contiene a la vez *resistencia* y *reactancia*, *pero ningún dispositivo mecánico tal como un motor*, se tiene:

$$tg\ \varphi = \frac{X}{R} \quad \text{y} \quad cos\ \varphi = \frac{R}{Z}$$

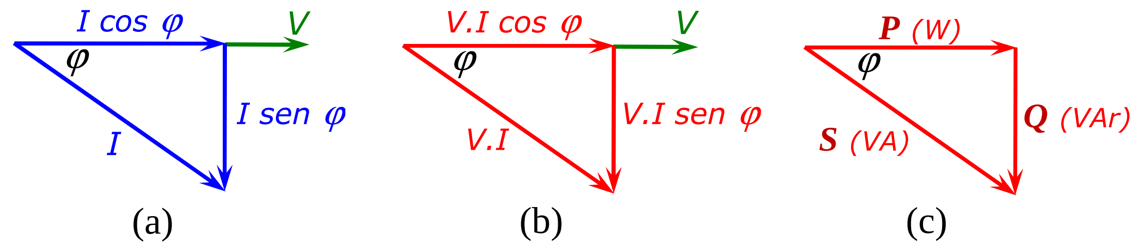
La ecuación (211) *se convierte en* $P = V\ I\ R/Z$. *Y dado que* $V/Z = I$:

$$\boxed{P = I^2 R} \qquad (212)$$

Esta ecuación es la misma que para el caso de la corriente continua. Ciertamente, si el circuito contiene un *motor*, $tg\ \ \varphi \neq X/R$ y la ecuación (212) *no es aplicable*. Sin embargo, la ecuación (211) *es cierta para cualquier circuito*.

Un factor de potencia pequeño (ángulo grande de adelanto o atraso) es un inconveniente en los circuitos que transportan energía, pues para una tensión dada, es necesaria una corriente de gran intensidad para suministrar una potencia determinada, con las consiguientes pérdidas de calor en las líneas de transporte. Como muchos tipos de máquinas de corriente alterna transportan corriente en atraso respecto a la tensión, este caso suele presentarse frecuentemente. Normalmente se corrige conectando un condensador en paralelo con la carga. La corriente adelantada del condensador compensa la corriente atrasada de la otra rama del circuito. El condensador por sí mismo no absorbe potencia neta alguna de la línea.

figura 186



Observemos ahora la *figura 186(a)*, en donde hemos repetido el diagrama fasorial de un circuito genérico con la intensidad de corriente desfasada φ grados de la tensión. En el mismo se han efectuado las proyecciones rectangulares de I sobre V. La expresión $I\ cos\ \varphi$ se llama *corriente activa* y la expresión $I\ sen\ \varphi$ se llama *corriente* *reactiva*. En la *figura 186(b)* se han multiplicado las intensidades por la tensión *V*; del resultado obtenido y de acuerdo con el *triángulo de potencias* de la *figura 186(c)*, podemos establecer las siguientes denominaciones con sus respectivas unidades:

POTENCIA ACTIVA	$P = V\,I\cos\varphi$	*vatios (W)*
POTENCIA REACTIVA	$Q = V\,I\,\mathrm{sen}\,\varphi$	*voltamperios reactivos (VAr)*
POTENCIA APARENTE	$S = V\,I$	*voltamperios (VA)* (213)

Vemos que el valor de la potencia activa coincide con la definición ya estudiada. La potencia reactiva es la componente que no produce trabajo ni otra forma útil de energía, pero que juega un vaivén entre la carga y el generador. La potencia aparente se llama así porque no es en realidad una potencia en el sentido estricto de la palabra, sino una definición.

Del triángulo de potencias de *figura 186(c)*, también podemos deducir las siguientes expresiones:

$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2} \quad \boxed{P = S\cos\varphi} \quad \boxed{Q = S\,\mathrm{sen}\,\varphi} \quad \boxed{\frac{Q}{P} = tg\,\varphi} \qquad (214)$$

Las expresiones de la *potencia compleja* son las siguientes:

$$\boxed{\boldsymbol{S} \equiv \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{ef}}\,\hat{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ef}} = S\,\lfloor\varphi = P + j\,Q = \boldsymbol{I}^2_{\boldsymbol{ef}}\,\boldsymbol{Z}} \qquad (215)$$

en donde $\hat{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{ef}}$ es la conjugada compleja del fasor de la corriente efectiva.

Ejercicio Nº 122: La potencia nominal de una secadora eléctrica para el cabello es de 1.500 W a 120 V. Calcular: a) la resistencia; b) la corriente eficaz; c) la potencia instantánea máxima. Suponer que la secadora es una resistencia pura.

a) $Z = R \;;\; \varphi = 0 \;;\; \cos\varphi = 1$

$$P = I^2 R = \left(\frac{V}{Z}\right)^2 R = \left(\frac{V}{R}\right)^2 R = \frac{V^2}{R} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{V^2}{P}$$

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{(120\,V)^2}{1.500\,W} = 9{,}6\,\Omega$$

b) $P = V\,I\cos\varphi = V\,I \quad\Rightarrow\quad I = \dfrac{P}{V}$

$$I = \frac{P}{V} = \frac{1.500\ W}{120\ V} = 12{,}5\ A$$

c) *En el caso de una resistencia pura, la tensión y la corriente están en fase y sus máximos coinciden. Luego:*

$$P = V\, I\, cos\ \varphi = \frac{V_{máx}\, I_{máx}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} cos\ \varphi = \frac{p_{máx}}{2} \quad \Longrightarrow \quad p_{máx} = 2\, P$$

$$p_{máx} = 2\, P = 2 \times 1.500\ W = 3.000\ W$$

Ejercicio Nº 123: En un circuito *L-C-R* en serie, los componentes tienen los valores siguientes: $L = 20\ mH$, $C = 140\ nF$ y $R = 350\ \Omega$. El generador tiene una tensión eficaz de 120 *V* y una frecuencia de 1,25 *kHz*. Hallar: a) la potencia suministrada por el generador; b) la energía disipada en el resistor.

a) $$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 2\pi(1.250\ Hz)(20 \times 10^{-3}\ H) - \frac{1}{2\pi(1.250\ Hz)(140 \times 10^{-9}\ F)}$$

$$X = -752\ \Omega \quad ; \quad tg\ \varphi = \frac{X}{R} = -\frac{752}{350} = -2{,}15 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = -\ 65{,}06°$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{(350\ \Omega)^2 + (-752\ \Omega)^2} = 830\ \Omega$$

$$P = V\, I\, cos\ \varphi = V\left(\frac{V}{Z}\right) cos\ \varphi = \frac{V^2}{Z} cos\ \varphi = \frac{(120\ V)^2}{830\ \Omega}\ cos\,(-\ 65{,}06°) = 7{,}32\ W$$

b) $$P_R = R\, I^2 = R\left(\frac{V}{Z}\right)^2 = (350\ \Omega)\left(\frac{120\ V}{830\ \Omega}\right)^2 = 7{,}32\ W$$

Ejercicio Nº 124: Una bobina grande de electroimán está conectada a una fuente de corriente alterna de 120 Hz. La bobina tiene una resistencia de 400 Ω y a esta frecuencia de fuente tiene una reactancia inductiva de 250 Ω. a) ¿Cuál es la inductancia de la bobina? b) ¿Cuál debe ser debe ser la tensión de la fuente para que la bobina consuma una potencia media de 800 W?

a) $$X_L = \omega L \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{250\ \Omega}{2\pi(120\ Hz)} = 0{,}332\ H$$

b) $$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(400\ \Omega)^2 + (250\ \Omega)^2} = 472\ \Omega$$

$$P = V\, I\, cos\ \varphi = V\left(\frac{V}{Z}\right)\left(\frac{R}{Z}\right) = R\left(\frac{V}{Z}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad V = Z\sqrt{\frac{P}{R}} = (472\ \Omega)\sqrt{\frac{800\ W}{400\ \Omega}}$$

$$V = 668\ V$$

Ejercicio Nº 125: Un circuito se compone de un resistor y un capacitor en serie con una fuente de corriente alterna que suministra una tensión de 240 V. A la frecuencia de la fuente, la reactancia del capacitor es de 50 Ω. La corriente en el circuito es de 3 A. ¿Cuál es la potencia activa que la fuente suministra?

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{240\ V}{3\ A} = 80\ \Omega = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + (50\ \Omega)^2} \implies de\ donde:$$

$$R = \sqrt{(80\ \Omega)^2 - (50\ \Omega)^2} = 62{,}45\ \Omega$$

La potencia activa suministrada a este circuito por la fuente, es igual a la potencia disipada por el resistor:

$$P = R\ I^2 = (62{,}45\ \Omega)\ (3\ A)^2 = 562\ W$$

Ejercicio Nº 126: Un circuito absorbe 330 *W* de una línea de corriente alterna a 220 *V* y 50 *Hz*. El factor de potencia es de 0,56 y la corriente está atrasada respecto a la tensión. a) ¿Cuál es la resistencia del circuito? b) Calcular la capacidad del condensador serie que produciría un factor de potencia unidad. c) ¿Qué potencia se tomaría entonces de la red de suministro?

a) $$P = I^2 R = \left(\frac{V}{Z}\right)^2 R = \frac{V^2}{Z}\frac{R}{Z} = \frac{V^2}{Z} \cos\varphi \implies de\ donde:$$

$$Z = \frac{V^2 \cos\varphi}{P} = \frac{220^2 \times 0{,}56}{330} = 82{,}13\ \Omega$$

$$R = Z \cos\varphi = 82{,}13\ \Omega \times 0{,}56 = 46\ \Omega$$

b) $$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \implies X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(82{,}13\ \Omega)^2 - (46\ \Omega)^2} = 68{,}04\ \Omega$$

Siendo φ = 0, estaríamos en resonancia, así que las reactancias inductiva y capacitiva serían iguales. Por ello:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \implies C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{2\pi\ f\ X_c} = \frac{1}{2\pi (50\ Hz)(68{,}04\ \Omega)} = 4{,}68 \times 10^{-5}\ F$$

c) $$En\ resonancia \implies P = R\ I^2 = R\left(\frac{V}{R}\right)^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{(220\ V)^2}{46\ \Omega} = 1.052\ W$$

Ejercicio Nº 127: Un circuito serie tiene una impedancia de 60 Ω y un factor de potencia de 0,72 a 50 *Hz*. La tensión de la fuente atrasa con respecto a la corriente. a) ¿Que elemento de circuito *(inductor o capacitor)* se debe colocar en serie para elevar el factor de potencia? b) ¿De que valor debe ser ese elemento para mantener el factor de potencia numéricamente igual, pero con la tensión adelantada a la corriente.

a) *El circuito es capacitivo ($X_C > X_L$). Para aumentar el factor de potencia (disminuir φ), se debe colocar un inductor en serie con el circuito.*

b) $R = Z\ cos\ \varphi = 60\ \Omega \times 0{,}72 = 43{,}2\ \Omega$

Llamando X_{C_0} a la reactancia capacitiva original (que puede contener también componentes inductivos):

$$Z = \sqrt{R^2 + {X_{C_0}}^2} \quad \Longrightarrow \quad X_{C_0} = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(60\ \Omega)^2 - (43{,}2\ \Omega)^2} = 41{,}64\ \Omega$$

Se debe introducir una reactancia inductiva igual a 2 X_{C_0}, de manera de llevar el factor de potencia simultáneamente de 0,72 capacitivo a 1 y de 1 a 0,72 inductivo:

$$X_L = 2\ X_{C_0} = 2 \times 41{,}64\ \Omega = \omega L \quad \Longrightarrow \quad L = \frac{83{,}28\ \Omega}{2\pi(50\ Hz)} = 0{,}2651\ H$$

comprobación:

$$tg\ \varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - X_{C_0}}{R} = \frac{41{,}64}{43{,}2} = 0{,}9639 \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 43{,}95° \quad \Longrightarrow \quad cos\ \varphi = 0{,}72$$

Ejercicio Nº 128: La tensión y la corriente nominal de un motor eléctrico son respectivamente 220 *V* y 2 *A*. Calcular las potencias aparente, activa y reactiva de este motor cuando trabaja con sus valores nominales, teniendo en cuenta que el factor de potencia en tales condiciones es 0,73.

$$\varphi = arc\ cos\ 0{,}73 = 43{,}11° \quad \Longrightarrow \quad sen\ \varphi = 0{,}6834$$

$$S = U\ I = 220\ V \times 2\ A = 440\ VA$$

$$P = S\ cos\ \varphi = 440\ VA \times 0{,}73 = 321{,}2\ W$$

$$Q = S\ sen\ \varphi = 440\ VA \times 0{,}6834 = 300{,}7\ VAr$$

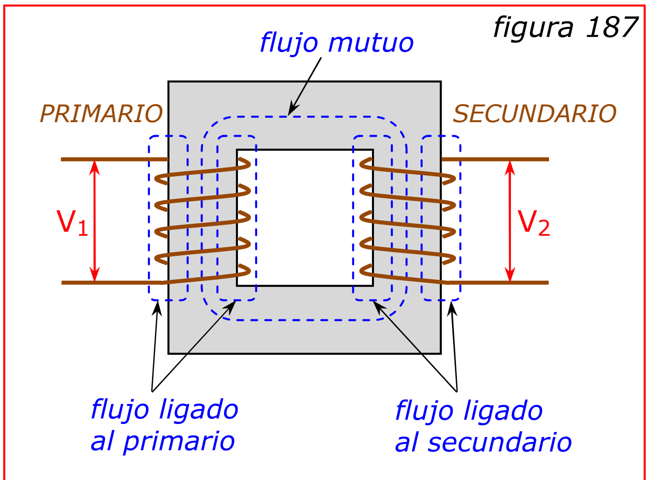
también:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{321{,}2^2 + 300{,}7^2} = 440\ VA$$

Transformadores:

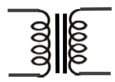
Por razones de rendimiento es conveniente transportar la energía eléctrica a *potenciales elevados* e *intensidades de corriente pequeñas*, con la reducción consiguiente de la *cantidad de calor* $I^2\ R$ perdida por segundo en la *línea de transporte*.

Por otra parte, las condiciones de seguridad y de aislamiento de las partes móviles requieren *tensiones relativamente bajas* en los *equipos generadores*, en los *motores* y en las *instalaciones domésticas*. Una de las propiedades más útiles de los circuitos de corriente alterna es la *facilidad y rendimiento elevado* con que *pueden variarse*, por medio de *transformadores*, los *valores* de las *tensiones (y de las corrientes).*



TRANSFORMADOR CON NÚCLEO DE HIERRO

En principio, el transformador se compone de *dos arrollamientos* aislados eléctricamente entre sí y devanados sobre el mismo *núcleo de hierro (figura 187)*. Una *corriente alterna* que circula por uno de los arrollamientos, crea en el núcleo un *campo magnético alterno*. La mayor parte de este flujo atraviesa el otro arrollamiento e induce en él una fem alterna. La *potencia* es *transmitida* así *de un arrollamiento a otro* por medio del *flujo del núcleo*. El arrollamiento al cual *se suministra potencia* se denomina *primario* y el que *cede potencia* es el *secundario*. Cualquiera de los arrollamientos puede utilizarse como primario.

El símbolo de un *transformador con núcleo de hierro* es ⇒ 

En cualquier *transformador real* las líneas de flujo no están confinadas enteramente en el hierro, sino que algunas de ellas vuelven a través del aire como indica la *figura 187*. La parte de *flujo que atraviesa* a la vez los *arrollamientos primario y secundario*, se denomina *flujo mutuo*. La parte que *sólo atraviesa el primario* es el *flujo ligado al primario*. La parte de flujo que *atraviesa únicamente el secundario* es el *flujo ligado al secundario*.

La potencia obtenida de un transformador es necesariamente inferior a la potencia suministrada al mismo, a causa de las inevitables pérdidas en forma calorífica. Estas pérdidas consisten en el *calentamiento* I^2R de los devanados *primario y secundario (pérdidas en el cobre)* y en la *histéresis* y *corrientes de Foucault* en el núcleo *(pérdidas en el hierro)*. La histéresis se reduce al mínimo utilizando hierro que tenga un ciclo de histéresis estrecho *(Este tema lo veremos en el próximo capítulo)* y las corrientes de Foucault se reducen al mínimo con un núcleo formado por láminas. A pesar de estas pérdidas, los *rendimientos* de los transformadores *sobrepasan el 90 %*

y en las grandes instalaciones pueden *alcanzar el 99 %.*

Para simplificar, consideremos un *transformador ideal* en el cual no haya pérdidas ni fugas de flujo. Supongamos que el *circuito secundario* está *abierto*. El *arrollamiento primario* funciona entonces simplemente como una *autoinducción*. La *corriente* en el *primario*, que es *pequeña*, está *retrasada 90º* respecto a la tensión y se denomina *corriente magnetizante* I_m. La *potencia suministrada* al transformador es *nula*. El *flujo* del núcleo está *en fase* con la *corriente* del primario. Puesto que el mismo flujo atraviesa tanto el primario como el secundario, *la fem inducida por vuelta es la misma en ambos devanados*. La razón de la fem inducida en el secundario a la fem inducida en el primario, es igual, por consiguiente, a la razón del número de vueltas del secundario al primario, o sea:

$$\boxed{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{N_2}{N_1}} \qquad (216)$$

En el *caso ideal supuesto*, las *fuerzas electromotrices* inducidas ε_1 y ε_2 son *iguales numéricamente* a las *tensiones* correspondientes V_1 y V_2 en los bornes. Por consiguiente, eligiendo adecuadamente la razón de los números de vueltas, N_2/N_1, puede obtenerse en el secundario cualquier tensión que se desee partiendo de una tensión dada en el primario. Si $V_2 > V_1$, tenemos un *transformador elevador*, si $V_2 < V_1$, un *transformador reductor*.

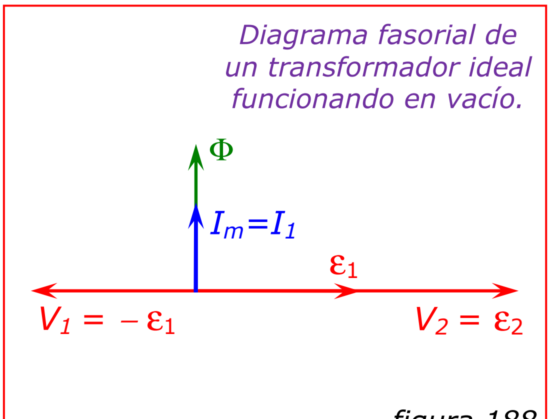


figura 188

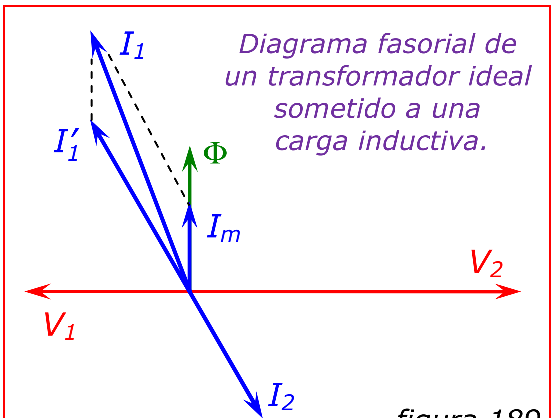


figura 189

El *diagrama fasorial* de un *transformador ideal* está representado en la *figura 188* para una razón de espiras $N_2/N_1 = 2$ ($\varepsilon_2 = 2\,\varepsilon_1$). Las *fuerzas electromotrices* inducidas tanto en el primario como en el secundario, siendo proporcionales y de *signo opuesto* a la *derivada del flujo*, estarán *retrasadas 90º* respecto a éste, pero puesto que la *fem* inducida (ε_1) en el primario es una *fuerza contraelectromotriz*, la *tensión* (V_1) en los bornes del primario es *opuesta a ella* en fase ($V_1 = -\varepsilon_1$).

Consideremos a continuación el efecto de *cerrar* el *circuito secundario*. La corriente I_2 en el secundario *(figura 189)* y su fase φ_2 dependerán, evidentemente, de la naturaleza del circuito secundario. Se ha supuesto en la *figura 189* que la *carga* es *inductiva* y, por consiguiente, I_2 está *atrasada* respecto a V_2. Tan pronto como se cierra el circuito secundario, éste ha de suministrar cierta potencia *(excepto cuando* $\varphi_2 = 90º$*)* y, en virtud de consideraciones energéticas, ha de suministrarse una cantidad igual de potencia al primario. El proceso por el cual el transformador es capaz de absorber la necesaria cantidad de potencia es como sigue.

Cuando el circuito secundario está abierto, el flujo del núcleo es producido únicamente por la corriente del primario, pero cuando se cierra el circuito secundario, *tanto la corriente del primario como la del secundario crean flujo en el núcleo*. En virtud de la ley de Lenz, la *corriente del secundario* tiende a *debilitar* el *flujo del núcleo* y, por consiguiente, a *disminuir* la *fuerza contraelectromotriz* en el *primario*. Pero *(en ausencia de pérdidas)*, la fuerza contraelectromotriz en el primario ha de ser *igual* a la *tensión* en los bornes del *primario* que suponemos fijo. La *corriente* en el *primario aumenta*, por consiguiente, hasta que *el flujo* del núcleo *se restablece* en su valor inicial sin carga. El vector I_1' de la *figura 189* representa la *variación* que tiene lugar en la corriente del primario cuando el secundario suministra la intensidad I_2. Esta variación está en *oposición de fase* con la intensidad I_2 del secundario y es de valor tal que su *fuerza magnetomotriz* ($N_1\, I_1'$) es igual y opuesta a la *fuerza magnetomotriz* ($N_2\, I_2$) de la corriente en el secundario *(ver fuerza magnetomotriz en el capítulo siguiente)*. Esto es:

$$N_2\, I_2 = N_1\, I_1' \qquad o\ sea: \qquad \boxed{\frac{I_2}{I_1'} = \frac{N_1}{N_2}} \tag{217}$$

La *intensidad resultante* en el *primario*, I_1, es la suma fasorial de I_1' y de la corriente magnetizante I_m. Pero en la práctica, la corriente magnetizante nunca es superior a un pequeño porcentaje de la corriente de plena carga. En consecuencia, I_1 e I_1' son prácticamente *iguales* y se puede escribir de un modo *aproximado*, teniendo en cuenta la ecuación (217):

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}} \tag{218}$$

Esto es, las *corrientes* del *primario* y del *secundario* son *inversamente proporcionales* a los *números* de *espiras* de los arrollamientos *primario* y *secundario*.

Por efecto de la *dispersión de flujo* y las *resistencias de los arrollamientos*, la *tensión* en los bornes del *primario* es *algo mayor* que la *fem inducida* en el mismo y *no está desfasada exactamente 180º* respecto a ella. Análogamente, la *tensión* en los bornes del *secundario* es *algo menor* que la *fem inducida* en el mismo y está *algo desfasada* respecto a ella.

Ejercicio Nº 129: Un transformador en un poste eléctrico opera con *8,5 kV* en el lado primario y suministra energía eléctrica a varias casas cercanas con *230 V*. El conjunto de las viviendas requiere, en un momento dado, el suministro de una potencia de *78 kW*. Suponer un transformador ideal, un circuito resistivo y un factor de potencia unitario. a) ¿Cuál es la relación de transformación *(razón de vueltas)* de este transformador reductor? b) ¿Cuáles son las corrientes en los devanados primario y secundario? c) ¿Cuáles son las resistencias equivalentes de los circuitos primario y secundario?

a) $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{8.500\ V}{230\ V} = 37$$

b) $$I_1 = \frac{P}{V_1} = \frac{78.000\ W}{8.500\ V} = 9{,}18\ A$$

$$I_2 = \frac{P}{V_2} = \frac{78.000\ W}{230\ V} = 339\ A$$

c) $$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{8.500\ V}{9{,}18\ A} = 926\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{230\ V}{339\ A} = 0{,}678\ \Omega$$