I.3 Ondas Electromagnéticas

Introducción:

Las ecuaciones de Maxwell permitieron demostrar los principios básicos del electromagnetismo, que en general pueden sintetizarse en lo siguiente:

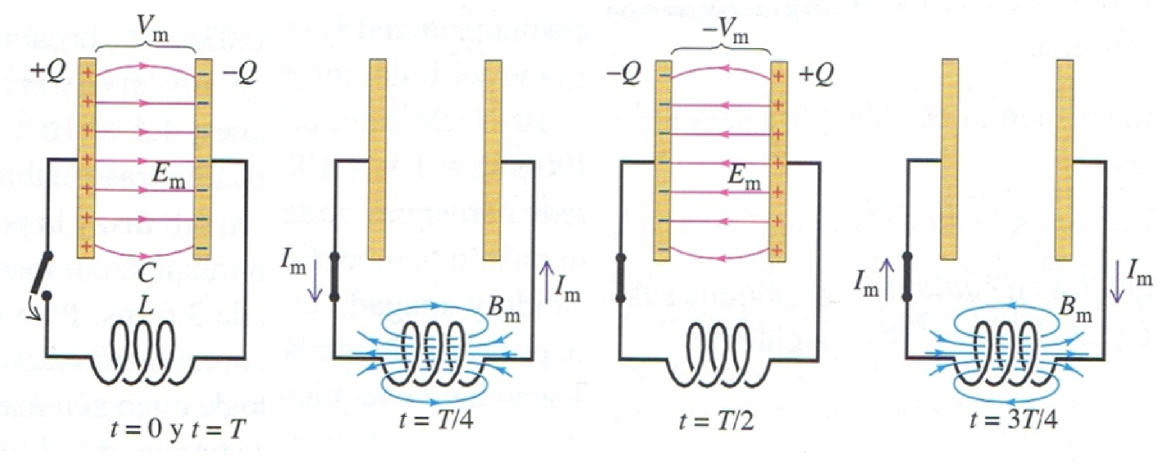
- Un *campo magnético* que *varía con el tiempo* actúa como fuente de *campo eléctrico*.
- Un *campo eléctrico* que *varía con el tiempo* actúa como fuente de *campo magnético*.
- Los *campos* variables $\vec{E}$ y $\vec{B}$ *se sustentan mutuamente* y forman una *onda electromagnética* que se propaga a través del espacio.
- Una *carga puntual* en *reposo* crea un *campo estático* $\vec{E}$, pero ningún *campo* $\vec{B}$.
- Una *carga puntual* que se desplaza con *velocidad constante* crea *campos estáticos* $\vec{E}$ y $\vec{B}$.
- Para que una *carga puntual* genere *ondas electromagnéticas*, es necesario que *se acelere*.

El físico alemán Heinrich Hertz generó por primera vez ondas electromagnéticas de longitud de onda macroscópica en el laboratorio en 1887. Como fuente de ondas, utilizó cargas oscilantes en circuitos $L-C$ *(del tipo que analizaremos en el tema siguiente)* y detectó las ondas electromagnéticas resultantes mediante otros circuitos sintonizados a la misma frecuencia. También produjo ondas electromagnéticas estacionarias y midió la distancia entre nodos adyacentes para establecer la longitud de onda; dado que conocía la frecuencia resonante de sus circuitos, encontró la velocidad de las ondas a partir de la relación $v = \lambda f$ y estableció que era igual a la velocidad de la luz. El nombre de la unidad SI de frecuencia honra la memoria de Hertz.

Circuitos Oscilantes:

Un *circuito L−C* muestra un modo de comportamiento que se caracteriza por una corriente y una carga oscilantes. Esto contrasta notoriamente con los circuitos *R−C* y *R−L, cuya* particularidad es la aproximación exponencial a una situación estable.

En la *figura 16(a)*, el capacitor tiene una carga inicial $+Q = C.V_m$ en su placa izquierda y una diferencia de potencial $+V_m$ entre ambas placas. En el instante de *cierre del circuito*, el capacitor comienza a descargarse a través del inductor. Debido a la *fem inducida* de éste, la *corriente* no cambia instantáneamente, sino que comienza en *cero* y finalmente alcanza un *valor máximo* I_m . En cada instante el *potencial del capacitor* es igual a la *fem inducida*, por lo que mientras el capacitor se descarga, la *velocidad de cambio* de la corriente *disminuye*. Cuando el *potencial del capacitor* se reduce a *cero*, la *fem inducida*



INTERCAMBIO DE ENERGÍA ENTRE LOS CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO EN UN CIRCUITO OSCILANTE

figura 16

también es *cero* y la corriente se ha estabilizado en su *valor máximo* I_m , según se observa en la *figura 16(b)*. La *corriente en aumento* en el inductor ha establecido un *campo magnético* en el espacio circundante y la *energía* que inicialmente se hallaba almacenada en el *campo eléctrico del capacitor* ahora se encuentra en el *campo magnético del inductor*.

Aunque el *capacitor* está totalmente *descargado*, la corriente *persiste* y el mismo se comienza a *cargar* con la *polaridad opuesta* al estado inicial. A medida que la *corriente* disminuye, se reduce el *campo magnético* y se induce *una fem* en el inductor en el *sentido de la corriente*, lo cual *retarda* la disminución de la misma. Cuando la *corriente* y el *campo magnético* disminuyen a *cero*, el *capacitor* queda *cargado* en el *sentido opuesto* de su polaridad inicial [*figura 16(c)*], con una diferencia de potencial $-V_m$ y una carga $-Q$ en su placa izquierda.

Ahora se *repite* el proceso en el *sentido inverso* [*figura 16(d)*]. Más tarde, la *carga del capacitor* recupera su *valor original* [*figura 16(a)*] y se repite todo el proceso. Si no hay pérdidas de energía, las cargas del capacitor *continúan oscilando* en un sentido y en el otro *indefinidamente*. Este proceso se denomina *oscilación eléctrica*.

Aplicamos las reglas de *Kirchhoff* al circuito de la *figura 16*. Partiendo del vértice inferior izquierdo del circuito y sumando los voltajes al recorrer la espira en el sentido de las agujas del reloj, se obtiene: $-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$

Puesto que $i = \frac{dq}{dt}$, se tiene: $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación precedente: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$

Esta ecuación diferencial tiene la misma forma que la del *movimiento armónico simple*. Su solución es:

$$q = Q\cos 2\pi f t \qquad (1)$$

donde:

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}} \qquad (2)$$

y Q es la carga inicial del condensador. La *carga* fluctúa u *oscila* de modo totalmente *análogo* a como lo hace una *masa suspendida de un resorte*. La *frecuencia f* se denomina *frecuencia natural del circuito*. Observemos que esta frecuencia es aquella para la cual el circuito está en resonancia. Esto es, <u>un circuito eléctrico</u>, como un sistema mecánico, <u>resuena</u> cuando la <u>frecuencia impulsante</u> es igual a la <u>frecuencia natural</u>.

La *intensidad en el circuito* puede encontrarse derivando la *(1)* respecto a t:

$$\boxed{i = -2\pi f Q \, sen\, 2\pi f t = -I_m \, sen\, \omega t}$$

Por lo tanto, *la corriente es alterna sinusoidal* y está desfasada 90º respecto a la carga.

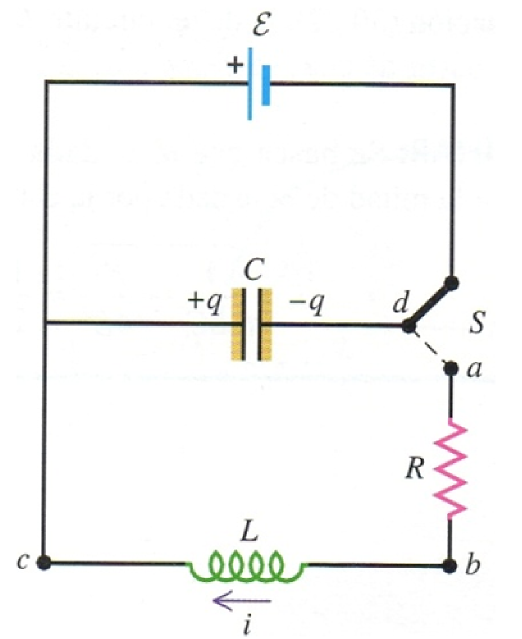
Desde el punto de vista energético, las oscilaciones de un circuito eléctrico consisten en un intercambio de energía entre el campo eléctrico del capacitor y el campo magnético del inductor, permaneciendo constante la energía total asociada al circuito. De nuevo encontramos analogía entre este hecho y la transformación de energía cinética a potencial, y viceversa, en un sistema mecánico oscilante.

La energía del *capacitor* en cualquier instante es $\frac{1}{2}Cv^2$, y la del *inductor* es $\frac{1}{2}Li^2$. Por consiguiente:

$$\tfrac{1}{2}\, C\, v^2 + \tfrac{1}{2}\, L\, i^2 = \tfrac{1}{2}\, C\, V_m^2 = \tfrac{1}{2}\, L\, I_m^2 = \text{constante}$$

• Vamos a ampliar el estudio anterior para tener en cuenta el *efecto de la resistencia* existente en todo *circuito real*. Aplicando la regla de las espiras de Kirchhoff al circuito de la *figura 17*, obtenemos:

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$



CIRCUITO R−L−C EN SERIE

figura 17

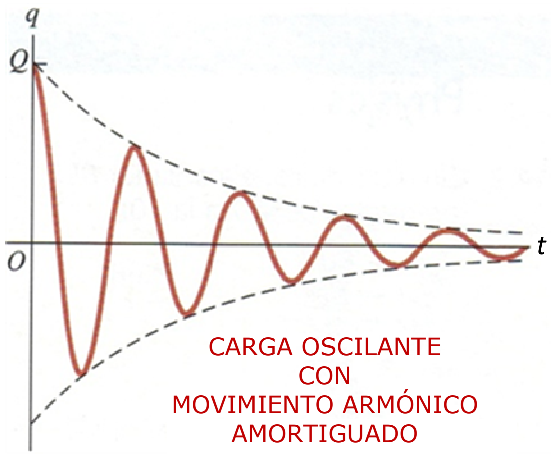
Sustituyendo i por dq/dt y operando, se obtiene:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la del movimiento armónico amortiguado de un sistema masa-resorte. Si el valor de la resistencia no es demasiado grande *($R^2 < 4L/C$)*, la *carga del capacitor* oscila con *movimiento armónico amortiguado* *(figura 18)* y la forma de la solución es:

$$q = \frac{f_0}{f_1} Q\, e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos\left(2\pi f_1 t + \varphi\right)$$

donde:



CARGA OSCILANTE CON MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

figura 18

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

y f_0 es igual que la ecuación *(2).*

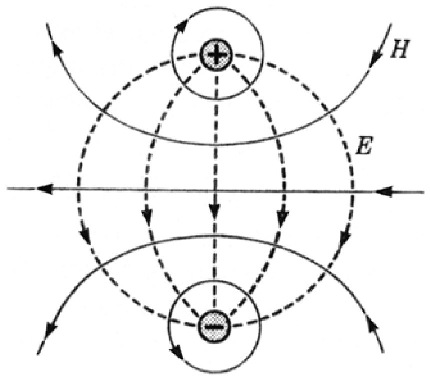
La frecuencia f_1 de la oscilación es menor que la frecuencia f_0 en el circuito no amortiguado *(R = 0)*. La *amplitud no es constante*, sino que *disminuye con el tiempo* a causa del factor exponencial $e^{-\frac{Rt}{2L}}$. La intensidad es $i = I_m\, e^{-\frac{Rt}{2L}}\, sen\, 2\pi f_1$, que se reduce al caso del *circuito LC* cuando *R = 0*.

Si $R^2 = 4L/C$ o $R^2 > 4L/C$, la descarga *deja de ser oscilante*. La carga del capacitor *disminuye asintóticamente* hacia *cero* y se dice que el circuito tiene *amortiguamiento crítico* en el primer caso o *sobreamortiguamiento* en el segundo caso.

- *OSCILACIONES MANTENIDAS: El efecto de la resistencia en un circuito oscilante es disipar la energía del mismo transformándola en calor. Las oscilaciones pueden ser mantenidas con amplitud constante en dicho circuito, si se dispone de algún medio que permita restituir la energía en la misma proporción que desaparece. Para ello se recurre normalmente a los amplificadores electrónicos realimentados (osciladores).*

Radiación Dipolar:

Consideremos un plano perpendicular a un punto cualquiera de una *línea de transporte* de *corriente alterna* de *dos hilos*, vista desde el generador *(conectado a uno de sus extremos)* cuando se mira a lo largo de la línea, como se observa en la *figura 19*. En la misma se representa, en un instante dado, el *campo eléctrico E* y el *campo magnético H* *(H = B/μ)*. Una región tal como ésta, en la que existen a la vez



CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO
LÍNEA DE TRANSPORTE DE CA
Corte con un plano perpendicular

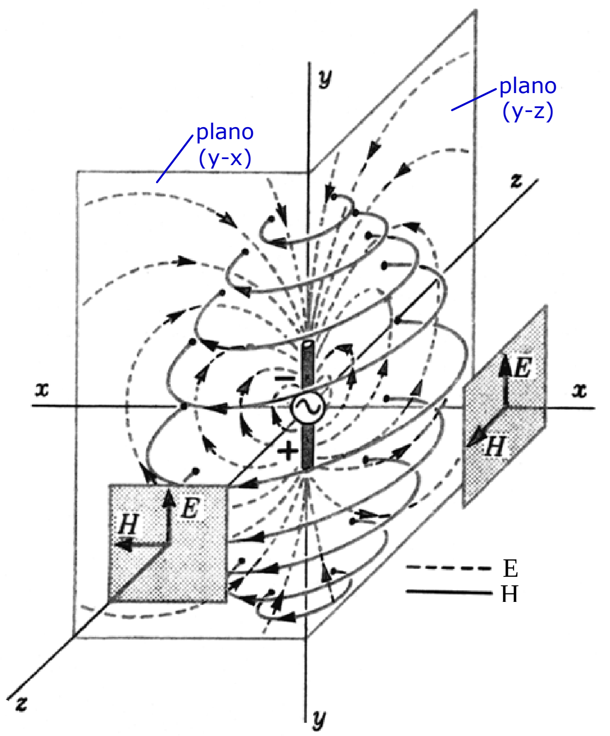
figura 19

campos eléctrico y magnético, se denomina *campo electromagnético*, y si además, como en este caso, todo el sistema se desplaza, decimos que se tiene una *onda electromagnética*.

Las ondas electromagnéticas del espacio libre, tales como las ondas luminosas o las ondas de radio, no se diferencian en su naturaleza de las ondas que rodean una línea de transporte como la de la *figura 19*, a cuyos extremos se le aplica una tensión alterna. La única diferencia es que en el *espacio libre* se propagan en *todas direcciones*, mientras que en este caso *son guiadas* por la *línea de transporte*.

Al estudiar los circuitos eléctricos hemos considerado que la energía es transportada por las cargas circulantes, que adquieren energía potencial en el origen de la fem y la ceden en otras partes del circuito. Sin embargo, según veremos, el punto de vista más correcto sería que la energía no es transportada por las cargas móviles, sino por el campo electromagnético asociado a ellas.

Cuando se establecen ondas electromagnéticas en una línea de transporte mediante un generador de corriente alterna conectado a uno de sus extremos, hay un flujo de energía a lo largo del cable, pero la energía no fluye fuera del cable hacia el espacio que lo rodea. En el extremo lejano del cable, si es abierto, el caso es distinto. La mayor parte de la energía de la onda incidente se refleja, pero una parte de ella abandona el cable y fluye hacia el espacio, o sea es radiada. Un tubo con un altavoz en uno de sus extremos, proporciona una buena analogía: cuando las ondas sonoras se propagan desde el altavoz a lo largo del tubo, la mayor parte de la energía sonora es reflejada en el extremo alejado, pero si este extremo es abierto, parte del sonido es radiado al espacio.



ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
GENERADAS POR UN CONDUCTOR RECTILÍNEO CON UNA FUENTE DE CORRIENTE ALTERNA EN SU CENTRO
figura 20

La eficacia de un circuito como radiador de ondas electromagnéticas depende, en gran parte, de su forma y dimensiones. Si el campo está localizado entre dos hilos muy próximos, la energía radiada por segundo es muy pequeña. A medida que los hilos se separan, aumenta la potencia de radiación.

El caso límite se alcanza cuando el circuito se reduce al de la *figura 20*, esto es, un *conductor rectilíneo* con un *generador de corriente alterna* en su *centro*. El *campo eléctrico* tiene en un cierto instante la forma general representada por las *líneas de trazos*. Cuando la polaridad del generador se invierte, el campo se invierte también. Puesto que en cada inversión se mueven cargas a lo largo del conductor, éste está rodeado también por un *campo magnético*, representado por las *líneas continuas* que son circunferencias cuyos centros están sobre el conductor. El campo magnético se invierte también a cada inversión de la corriente.

El campo eléctrico alrededor del conductor es análogo al campo que rodea un dipolo eléctrico. El conjunto del campo eléctrico y el campo magnético es el que resultaría si el momento eléctrico del dipolo variase de valor sinusoidalmente. Por ello se considera al conductor como un dipolo oscilante. La antena de una estación emisora de radio es un gran dipolo oscilante.

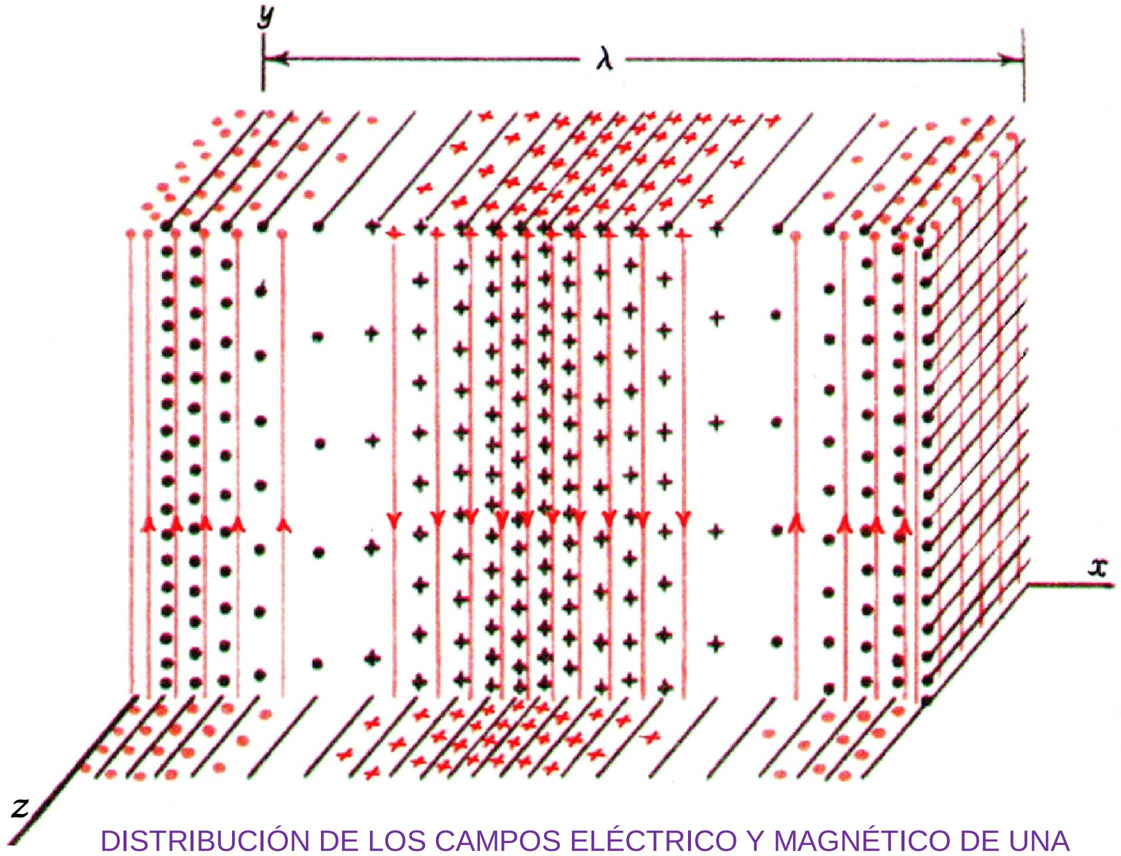
Si se mira el conductor a lo largo del eje *x* de la *figura 20*, el *campo eléctrico* y el *campo magnético* dentro de un área pequeña *(zona sombreada)* son *perpendiculares entre sí*. El *vector Intensidad de Campo Eléctrico* *E* es paralelo al eje *y*. El *vector Intensidad de Campo Magnético* *H* es paralelo al eje *z*.

Cerca del conductor, estos campos presentan una diferencia de fase de 90º, puesto que en el instante en que el capacitor (*) está totalmente cargado y el campo eléctrico es máximo, la intensidad de la corriente y el campo magnético son nulos. Al alejarse del conductor, por razones demasiado complejas para ser explicadas aquí, la diferencia de fase se anula y los campos se ponen en *concordancia de fase.*

(*) Los extremos del conductor se comportan como las placas de un capacitor abierto.

Se define como *"frente de onda"* a una superficie en cuyos puntos los vectores *E* y *H* están *en fase*. Una línea en el sentido de la *propagación*, perpendicular al frente de onda, se denomina *"rayo"*.

A *distancia suficiente* del conductor, los *frentes de onda* pueden considerarse como *superficies planas*. La *figura 21* representa una porción del eje *x* a una distancia considerable del conductor. Las ondas avanzan hacia la derecha y la *magnitud* y *sentido* de los *campos eléctrico y magnético* están representados, *en un cierto instante*, en función de *x*. Esta figura representa, por lo tanto, la *forma de la onda*. En las regiones donde *las líneas* de campo eléctrico y



DISTRIBUCIÓN DE LOS CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO DE UNA ONDA PLANA ELECTROMAGNÉTICA, EN UN INSTANTE CUALQUIERA

LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO E
LÍNEAS DE CAMPO MAGNÉTICO H

figura 21

magnético están *próximas*, los campos son *intensos*; donde están más *separadas*, los campos son *débiles* *(sus sentidos están indicados por flechas y por el convenio habitual de puntos y cruces)*. La *figura 22* representa un diagrama más convencional de la onda en el mismo instante.

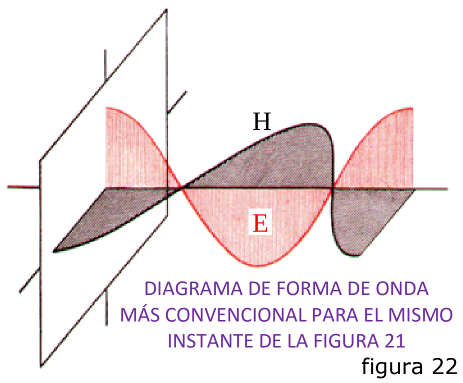


DIAGRAMA DE FORMA DE ONDA MÁS CONVENCIONAL PARA EL MISMO INSTANTE DE LA FIGURA 21

figura 22

Aunque el dipolo oscilante de la figura 20 emite ondas electromagnéticas en todas direcciones, la amplitud de aquéllas depende de la dirección. La amplitud es la misma y su valor es máximo, para todas las direcciones situadas en el plano xz. En las direcciones que se aproximan al eje y, la amplitud disminuye y se anula a lo largo de dicho eje. O sea que el dipolo no emite energía radiante en dirección de su propia longitud.

La eficacia de un circuito como radiador aumenta rápidamente con la frecuencia del generador. Las ondas electromagnéticas de frecuencia muy elevada son generadas *a través de radiadores denominados "de cavidades resonantes" (microondas para hornos y radares, por ejemplo). La luz (luminiscencia, incandescencia, plasma, etc.) y otras radiaciones (infrarrojo, ultravioleta, rayos X, etc.) se generan en el seno molecular de la materia.*

Velocidad de las Ondas Electromagnéticas:

• Consideremos la *ecuación (9) de página 7*, que es la forma usual de la *"Ley de la Inducción de Faraday" (cuarta ecuación de Maxwell)*:

$$\oint \vec{E}\; d\vec{l} = -\frac{d\emptyset_B}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \oint E\cos\theta\; dl = -\frac{d\emptyset_B}{dt}$$

Si el campo magnético es perpendicular al plano del contorno, B es la densidad media del flujo y A el área del contorno, se tiene: $\emptyset_B = A\,B$.

Y dado que $B = \mu\,H$, se deduce:

$$\oint E\cos\theta\; dl = -\mu\,A\,\frac{dH}{dt} \tag{3}$$

• Consideremos ahora la *ecuación (8) de página 7*, que es la *"Ley de Ampere Generalizada" (tercera ecuación de Maxwell)*:

$$\oint \vec{B}\,.d\vec{l} = \mu_0\,(i_C + \varepsilon\,\frac{d\emptyset_E}{dt})_{enc}$$

En la región en la que el campo eléctrico varía, existe una *corriente de desplazamiento*, pero la corriente de conducción es cero. En consecuencia, teniendo en cuenta que $\emptyset_E = A\,E$, resulta:

$$\oint H\cos\theta\; dl = \epsilon\,A\,\frac{dE}{dt} \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) tienen la misma forma, expresando una de ellas una relación entre la integral curvilínea de E y la derivada respecto a t de H, y la otra una relación entre la integral curvilínea de H y la derivada respecto a t de E.

• Examinemos a continuación el espacio que rodea un circuito oscilante en el cual coexisten un *campo eléctrico* y un *campo magnético*, cuyas magnitudes varían de un punto a otro y con el tiempo. Establezcamos en cierto punto *O (figura 23)* un sistema de *ejes coordenados*.

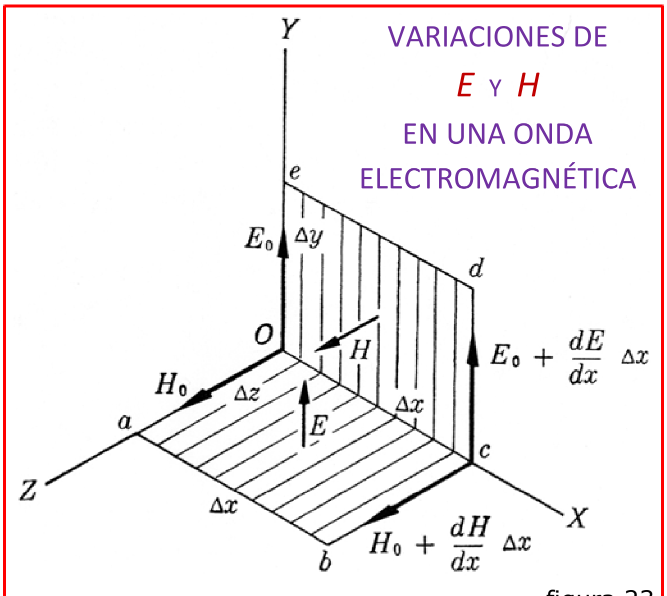


figura 23

Hemos visto que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí. Sean el *campo magnético* perpendicular al plano *XY* y el *campo eléctrico* perpendicular al plano *XZ*.

Construyamos un rectángulo infinitesimal *Oabc* de lados Δx y Δz, situado en el plano *XZ*, y calculemos la integral curvilínea de *H* a lo largo de este rectángulo. Puesto que *H* es perpendicular a los lados *ab* y *Oc*, éstos no contribuyen al valor de la integral. La integral curvilínea a lo largo del lado *Oa* es $H_0 \Delta z$, siendo H_0 la intensidad de campo magnético en el plano *YZ*.

Sea *dH/dx* la derivada de *H* respecto a *x*. Entonces, la variación de *H* en la distancia *Oc*, o Δx, es el producto de la derivada respecto a la distancia por la distancia, o sea: $\Delta H = \dfrac{dH}{dx} \Delta x$

Por consiguiente, el valor de *H* en el lado *bc* es: $H_0 + \dfrac{dH}{dx} \Delta x$

La integral curvilínea a lo largo de este lado será, por lo tanto:

$$- \left(H_0 + \frac{dH}{dx} \Delta x \right) \Delta z$$

(el signo menos se debe a que $\theta = 180°$ por ser *H* y *bc* de sentidos opuestos)

En consecuencia, la integral alrededor del contorno total es:

$$\oint H \cos\theta \; dl = H_0 \, \Delta z - \left(H_0 + \frac{dH}{dx} \Delta x \right) \Delta z = - \frac{dH}{dx} \Delta x \, \Delta z$$

Sustituyendo $\Delta x \Delta z$ por *A* *(área del contorno)* y combinando esta ecuación con la *(4)*, se obtiene:

$$\frac{dH}{dx} = -\,\varepsilon \, \frac{dE}{dt} \qquad (5)$$

donde E es el valor medio del campo eléctrico sobre el contorno infinitesimal, es decir, su valor en el punto en que se ha formado el contorno.

• Consideremos ahora el rectángulo $\Delta x \; \Delta y$ de la *figura 23*, que se encuentra en el plano *XY* y es perpendicular, por lo tanto, a *H*. Cuando se calcula la integral curvilínea de *E* a lo largo de este contorno por el *método anterior*, se obtiene:

$$\frac{dE}{dx} = -\mu \frac{dH}{dt} \qquad (6)$$

Eliminemos *E* entre las ecuaciones *(5)* y *(6)*, derivando la primera respecto a *x* y la segunda respecto a *t*, lo cual nos conduce a las relaciones:

$$\frac{d^2H}{dx^2} = -\varepsilon \frac{d}{dx}\left(\frac{dE}{dt}\right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{dx}\right) = -\mu \frac{d^2H}{dt^2}\text{; pero} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{dE}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dE}{dx}\right)$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\frac{d^2H}{dt^2} = \frac{1}{\mu\,\varepsilon}\frac{d^2H}{dx^2}} \qquad (7)$$

Eliminado *H* del mismo modo, se obtiene para *E* una ecuación análoga:

$$\boxed{\frac{d^2E}{dt^2} = \frac{1}{\mu\,\varepsilon}\frac{d^2E}{dx^2}} \qquad (8)$$

Recordemos que las ecuaciones diferenciales de una onda transversal en una cuerda y de una onda de compresión en un líquido o en un gas son, respectivamente, las siguientes: $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\mu}\frac{d^2y}{dx^2}$ $\qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{k\,\rho_0}\frac{d^2y}{dx^2}$

Las ecuaciones (7) y (8) tienen la misma forma matemática que las dos ecuaciones diferenciales anteriores, lo cual significa que los vectores campo, H y E, varían en el tiempo y en el espacio exactamente igual que los desplazamientos de una partícula en una onda transversal de una cuerda, o en una onda sonora.

Tenemos, por consiguiente, una onda electromagnética que se propaga, la cual es transversal en el sentido de que los campos eléctrico y magnético son normales a la dirección de propagación. Esta onda aquí considerada, se dice que está polarizada en un plano, lo cual significa que en todos los puntos y en todo instante los vectores H permanecen paralelos a un plano determinado, mientras que los vectores E son paralelos a un segundo plano perpendicular al primero.

No se requiere ningún manantial de campos eléctrico o magnético distinto de la propia onda, que es automantenida. El campo magnético variable mantiene al campo eléctrico, según lo indica la ecuación (3), y el campo eléctrico variable mantiene al campo magnético, según lo indica la ecuación (4).

Cuando la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio *(ver página 13)* se escribe en la forma de las ecuaciones *(7)* y *(8)*, el coeficiente de la derivada espacial es el cuadrado de la velocidad de propagación. *Por ejemplo, la velocidad de propagación de una onda transversal en una cuerda es* $\sqrt{T/\mu}$, y la de una onda de compresión en un fluido es $\sqrt{1/k\,\rho_0}$. Por consiguiente, la velocidad de una onda electromagnética es:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu\,\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1}{K_m K_e}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0}} \qquad (9)$$

En el vacío, para el cual $K_m = K_e = 1$, la velocidad se representa por c y está dada por:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0}} \qquad (10)$$

En el Sistema Internacional, la velocidad de las ondas electromagnéticas (o de la luz) en el vacío, luego de insertar los valores numéricos de estas magnitudes, resulta:

$$c = \sqrt{1/\left(4\pi \times 10^{-7}\frac{V.s}{A.m}\right)\left(8{,}8542 \times 10^{-12}\frac{A.s}{V.m}\right)} = 299.792\ km/s \cong 3 \times 10^{8}\ m/s$$

Para tener una idea de esta increíble velocidad, baste decir que la luz, en un segundo, recorre una distancia igual a 7,5 vueltas a la Tierra.

• Consideremos ahora la velocidad de la luz en una sustancia material tal como el vidrio o el agua. La permeabilidad relativa K_m de todas las sustancias transparentes es tan próxima a la unidad que puede omitirse este factor en la ecuación *(9)*, la cual se reduce a:

$$v = \sqrt{\frac{1}{K_e}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mu_0\,\varepsilon_0}} = c\sqrt{\frac{1}{K_e}}$$

Se define en óptica el índice de refracción n de una sustancia, como la razón de la velocidad de la luz en el vacío a su velocidad en el medio:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{K_e} \qquad (11)$$

O sea que, el índice de refracción es igual a la raíz cuadrada de la constante dieléctrica. *Sin embargo, debe tenerse cautela al introducir en la ecuación (11) el* *valor de la constante dieléctrica obtenida a partir de medidas electrostáticas o a baja frecuencia. La constante dieléctrica de una sustancia es una medida de la polarización, o sea de los efectos de orientación producidos por los campos eléctricos sobre las cargas situadas dentro de las sustancias. A muy altas frecuencias, tales como las de las ondas luminosas, el campo cambia de sentido tan rápidamente que los efectos de polarización no pueden alcanzar sus valores finales antes de que el campo se invierta. En consecuencia, la constante dieléctrica a estas frecuencias es mucho menor que a bajas frecuencias. Por ejemplo, la* K_e *del agua es de 80,4* $(n = \sqrt{80{,}4} = 9)$ *con campos estables, mientras que es sólo de 1,8* $(n = \sqrt{1{,}8} = 1{,}34)$ *en el intervalo de frecuencias de la luz visible. Así pues, la "constante" dieléctrica es en realidad una función de la frecuencia.*

- Vamos a deducir ahora una *relación importante* entre los *valores de los campos eléctrico y magnético* de una onda electromagnética. Supongamos, para simplificar, una onda sinusoidal de frecuencia f que se propaga en el sentido positivo de las x con velocidad v *[ver ecuaciones (3) de página 16 y tener en cuenta que* $k=2\pi/\lambda$ *y* $v=f\lambda$*]*. Podemos escribir:

$$E = E_m \, sen\, 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad \text{y} \qquad H = H_m \, sen\, 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Derivando la 1ra. con respecto a t y la 2da. con respecto a x, se obtiene:

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi f E_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{dH}{dx} = -\frac{2\pi f H_m}{v} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Cuando sustituimos estos valores en la ecuación *(5)* de página 37, resulta:

$$-\frac{2\pi f H_m}{v} \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right) = -\varepsilon \times 2\pi f E_m \cos 2\pi f \left(t - \frac{x}{v}\right)$$

Simplificando y teniendo en cuenta que $v = \sqrt{1/\mu\,\varepsilon}$, esta relación se reduce a:

$$\boxed{\sqrt{\mu}\, H_m = \sqrt{\varepsilon}\, E_m} \quad \text{y en el vacío:} \quad \boxed{\sqrt{\mu_0}\, H_m = \sqrt{\varepsilon_0}\, E_m} \qquad (12)$$

De estas expresiones también se deducen las siguientes:

$$\boxed{v = \frac{E_m}{B_m}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{c = \frac{E_m}{B_m}} \qquad (13)$$

donde v y c son las velocidades en un *dieléctrico* y en el *vacío*, respectivamente.

Energía y Vector de Poynting:

• Consideremos las expresiones correspondientes a las densidades de energía de los *campos eléctrico y magnético*. Estas ecuaciones muestran que, en una región del *espacio vacío* donde están presentes campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, la *densidad de energía total* u está dada por:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2} \qquad (14)$$

En el caso de las ondas electromagnéticas en el vacío, la relación entre las magnitudes E y B es:

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E \quad , siendo \quad B = \mu_0 H \qquad (15)$$

Combinando las ecuaciones *(14)* y *(15)*, podemos expresar también la *densidad de energía total* u de una *onda electromagnética* en el *vacío*, como:

$$\boxed{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\, E}{\mu_0}\right)^2 = \boxed{\varepsilon_0 E^2} \qquad (16)$$

Esto demuestra que, en el vacío, la densidad de energía asociada con el campo E es igual a la densidad de energía asociada con el campo H. En general, la magnitud del campo eléctrico E es función de la posición y del tiempo, por lo tanto, la densidad de energía de una onda electromagnética, dada por la ecuación (16), también depende en general de la posición y del tiempo.

• Una de las características importantes de una onda electromagnética es que puede transportar energía de un punto a otro. Puede demostrarse que la *potencia instantánea* transportada por una *onda electromagnética*, por *unidad de superficie* perpendicular a la *dirección de propagación*, es:

$$\boxed{S = E\, H} \qquad (17)$$

siendo *E* y *H* los *valores instantáneos* de los campos eléctrico y magnético. *S* es *potencia por unidad de área* y se mide en julios por segundo y por metro cuadrado, o sea vatios por metro cuadrado [W/m^2].

Como la dirección de propagación de la onda es perpendicular al plano determinado por *E* y *H*, la magnitud *S* puede considerarse como *un vector que tiene la dirección de propagación*. Se conoce como *Vector de Poynting*.

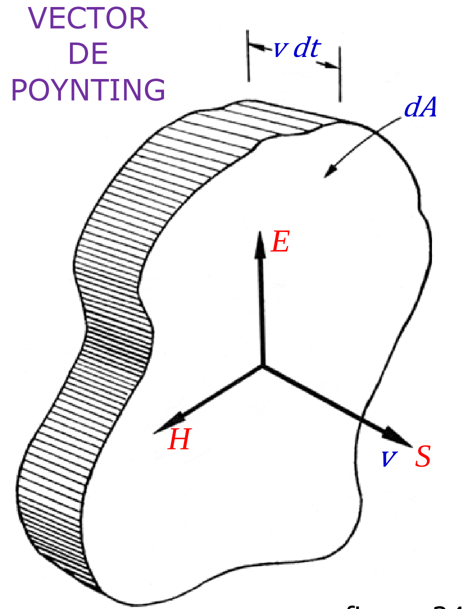


figura 24

A continuación vamos a justificar la ecuación *(17)*. Consideremos un *elemento de volumen cilíndrico (figura 24)* a través del cual está pasando una onda electromagnética. La *sección transversal dA* del elemento, se encuentra en el plano determinado por *E* y *H*, y su longitud es *vdt*. Sabemos que la densidad de energía en un campo eléctrico es $\frac{1}{2}\,\varepsilon\,E^2$ y en un campo magnético $\frac{1}{2}\,\mu\,H^2$.

La *energía electromagnética* en el cilindro es:

$$dA \times v\,dt \times \left(\frac{1}{2}\varepsilon\,E^2 + \frac{1}{2}\mu\,H^2\right)$$

La onda electromagnética se propaga con la velocidad *v* en una dirección perpendicular a *dA*, y si la energía se propaga con ella a la misma velocidad, toda la energía electromagnética que se encuentra ahora en el cilindro atravesará el área *dA* en el tiempo *dt*. En consecuencia, la *energía que atraviesa la superficie* por *unidad de área* y por *unidad de tiempo*, es:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}v\,(\,\varepsilon\,E^2 + \mu\,H^2)} \qquad (18)$$

De la ecuación *(12)*: $\sqrt{\mu}\,H = \sqrt{\varepsilon}\,E$ se deduce que: $\varepsilon\,E^2 = \mu\,H^2$

Por lo tanto, la ecuación *(18)* puede escribirse:

$$S = v\,\mu\,H^2 = v\,\varepsilon\,E^2 = v\,\varepsilon\,E\,\sqrt{\mu\,H^2/\varepsilon} = EH \qquad (19)$$

que es la misma ecuación *(17)*.

Si se trata de una onda luminosa en un dieléctrico transparente:

$$v = c/n, \quad \varepsilon = K_e\,\varepsilon_0 = n^2\,\varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0$$

$$y \quad S = c\,n\,\varepsilon_0\,E^2 = (c/n)\,\mu_0\,H^2 = EH$$

En el vacío, para el cual n = 1: $\quad S = c\,\varepsilon_0\,E^2 = c\,\mu_0\,H^2 = EH$

La ecuación (17) da la potencia instantánea transportada por unidad de área. La potencia media transportada es igual a: v ε x valor medio de E^2 o v μ x valor medio *de H^2. Si la onda es sinusoidal, el valor medio de E^2 o de H^2 es la mitad de su valor máximo. Por consiguiente:*

$$\boxed{S_{media} = \frac{1}{2} v\, \varepsilon\, E_m^2 = \frac{1}{2} v\, \mu\, H_m^2 = \frac{1}{2} E_m H_m}$$

Si la onda se encuentra en el vacío:

$$\boxed{S_{media} = \frac{1}{2} c\, \varepsilon_0\, E_m^2 = \frac{1}{2} c\, \mu_0\, H_m^2 = \frac{1}{2} E_m H_m}$$

La forma general de la ecuación (17) es: $\boxed{\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}}$

Ejercicio Nº 1: Se carga un capacitor de 25 μF por medio de una fuente de energía eléctrica de 300V. Una vez que el capacitor se ha cargado totalmente, se desconecta de la fuente de energía y se conecta entre los bornes de una inductancia de 10 mH. La resistencia del circuito es insignificante. Hallar: a) la frecuencia y el período de oscilación del circuito; b) la carga del capacitor y la corriente del circuito, 1,2 ms después de establecida la conexión entre el inductor y el capacitor.

a) $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{(10\times10^{-3}\ H)(25\times10^{-6}\ F)}} = 2\times10^3\ rad/s$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\times10^3 rad/s}{2\pi\ rad/ciclo} = 320\ Hz$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{320\ Hz} = 3{,}1\ ms$$

b) $q = Q \cos(\omega t + \phi)$ $\Rightarrow$ Inicialmente, el capacitor está totalmente cargado y la corriente es cero como en la figura 16a *(pág. 29)*, por lo que t = 0 y $\phi = 0$.

Además, $Q = C\,V = (25 \times 10^{-6}\ F)\,(300\ V) = 7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathcal{C}$

La carga q en cualquier instante es: $q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathcal{C}) \cos \omega t$

Cuando $t = 1{,}2 \times 10^{-3}\ s$:

$\omega t = (2 \times 10^{3}\ rad/s)\,(1{,}2 \times 10^{-3}\ s) = 2{,}4\ rad$

$q = (7{,}5 \times 10^{-3}\ \mathcal{C}) \cos(2{,}4\ rad) = -\,5{,}5 \times 10^{-3}\ \mathcal{C}$

////

////

i = – ωQ sen ωt = – (2 x 10^3 rad/s) (7,5 x 10^{-3} $\mathcal{C}$) sen (2,4 rad) = – 10 A

Ejercicio Nº 2: Consideremos nuevamente el circuito L-C del ejercicio anterior: Hallar la energía magnética y la energía eléctrica en t = 0 y en t = 1,2 ms.

t = 0:

En este instante no hay corriente y q = Q. En consecuencia, no hay energía magnética y toda la energía del circuito está en forma de energía eléctrica en el capacitor:

$$U_M = \frac{1}{2} L\, i^2 = 0$$

$$U_E = \frac{1}{2} C\, V^2 = \frac{(25 \times 10^{-6}\, F)(300\, V)^2}{2} = 1{,}1\, J$$

t = 1,2 ms:

$$U_M = \frac{1}{2} L\, i^2 = \frac{(10 \times 10^{-3}\, H)(-10\, A)^2}{2} = 0{,}5\, J$$

$$U_E = \frac{1}{2} C\, v^2 = \frac{1}{2} C \left(\frac{q}{C}\right)^2 = \frac{q^2}{2\,C} = \frac{(-5{,}5 \text{ x } 10^{-3}\, \mathcal{C})^2}{2(25 \times 10^{-6}\, F)} = 0{,}6\, J$$

En todo momento, la energía total E = U_M + U_E tiene el mismo valor: 1,1 J. Un circuito L-C sin resistencia es un sistema conservativo: no se disipa energía.

Ejercicio Nº 3: ¿Qué resistencia R se requiere (en función de L y C) para impartir a un circuito R-L-C una frecuencia equivalente a la mitad de la frecuencia no amortiguada?

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$ ⇒ movimiento armónico no amortiguado

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$ ⇒ movimiento armónico amortiguado

Se busca que $\omega_1 = \frac{1}{2}\,\omega_0$:

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Si se elevan al cuadrado ambos lados y se despeja R, se obtiene:

$$R = \sqrt{\frac{3L}{C}}$$

Por ejemplo, la incorporación ////

//// de 35 Ω al circuito del ejercicio nº 1, reduciría la frecuencia 320 Hz a 154 Hz. Este circuito alcanzaría la amortiguación crítica sin oscilaciones cuando $R = \sqrt{4L/C}$ *(R = 40 Ω y F = 0)*. Nuestro resultado de R es menor que este valor, como debe ser, ya que se buscaba que el circuito estuviera subamortiguado.

Ejercicio Nº 4: a) Una luz amarilla emitida por una lámpara de vapor de sodio, cuya frecuencia es de 5,09 x 10^{14} Hz, atraviesa un diamante (a esa frecuencia, K_e = 5,84 y K_m = 1). Hallar la longitud de onda en el vacío, la velocidad de propagación en el diamante y la longitud de onda en él. b) Una onda de radio con una frecuencia de 90 MHz *(radiodifusora FM)* pasa de un vacío a una ferrita aislante *(material ferromagnético utilizado en electrónica)*. Hallar la longitud de onda en el vacío, la velocidad de propagación en la ferrita y la longitud de onda en ella. A esta frecuencia, las propiedades de la ferrita son: K_e = 10 y K_m = 1.000.

a)
$$\lambda_{vacío} = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{5{,}09 \times 10^{14}\ Hz} = 589\ nm$$

$$v_{diamante} = \frac{c}{\sqrt{K_e K_m}} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{\sqrt{5{,}84 \times 1}} = 1{,}24 \times 10^8\ m/s$$

$$\lambda_{diamante} = \frac{v_{diamante}}{f} = \frac{1{,}24 \times 10^8\ m/s}{5{,}09 \times 10^{14}\ Hz} = 244\ nm$$

b)
$$\lambda_{vacío} = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{90 \times 10^6\ Hz} = 3{,}33\ m$$

$$v_{ferrita} = \frac{c}{\sqrt{K_e K_m}} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{\sqrt{10 \times 1.000}} = 3 \times 10^6\ m/s$$

$$\lambda_{ferrita} = \frac{v_{ferrita}}{f} = \frac{3 \times 10^6\ m/s}{90 \times 10^6\ Hz} = 3{,}33\ cm$$

La velocidad de la luz en materiales transparentes como el diamante, fluctúa típicamente entre c y algunos puntos porcentuales de c *(41 % para el diamante)*. La velocidad de las ondas electromagnéticas en materiales densos como la ferrita, puede ser mucho menor que en el vacío *(sólo el 1% de c para la ferrita)*. Las longitudes de onda se reducen en iguales proporciones que las velocidades.

Ejercicio Nº 5: a) ¿Cuánto tiempo tarda la luz en viajar de la Luna a la Tierra, si la distancia es de 384.000 km? b) La luz de la estrella Sirio tarda 8,61 años luz en llegar a la Tierra. ¿Cuál es la distancia a Sirio?

a) $$t = \frac{d}{c} = \frac{3{,}84 \times 10^8\ m}{3\ \times 10^8\ m/s} = 1{,}28\ s$$

b) $$t = (8{,}61\ años)(365\ días/año)(24\ horas/día)(3.600\ segundos/hora)$$

$$t = 2{,}72 \times 10^8\ s$$

$$d = c\ t = (3 \times 10^8\ m/s)(2{,}72 \times 10^8\ s) = 8{,}16 \times 10^{16}\ km$$

Ejercicio Nº 6: Una estación de radio de Jujuy transmite a una frecuencia de 830 kHz. En un punto a cierta distancia del transmisor, la amplitud del campo magnético de la onda electromagnética es de 4,82 x 10^{-11} T. Calcular: a) la longitud de onda; b) la frecuencia angular; c) la amplitud del campo eléctrico.

a) $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{8{,}30\ \times 10^5\ Hz} = 361\ m$$

b) $$\omega = 2\pi f = 2\pi(8{,}30 \times 10^5\ Hz) = 5{,}21 \times 10^6\ rad/s$$

c) $$E_{máx} = c\ B_{máx} = (3 \times 10^8\ m/s)(4{,}82 \times 10^{-11}\ T) = 0{,}0145\ V/m$$

Ejercicio Nº 7: Una onda electromagnética se propaga en un material dieléctrico. A la frecuencia de la onda, la constante dieléctrica del material es de 1,74 y la permeabilidad relativa de 1,23. Si la amplitud del campo magnético es de 3,80 x 10^{-9} T, ¿cuál es la amplitud del campo eléctrico?

$$E_{máx} = v\ B_{máx} = \frac{B_{máx}}{\sqrt{K_e\ \varepsilon_0\ K_m\ \mu_0}} = \frac{c\ B_{máx}}{\sqrt{K_e\ K_m}}$$

$$E_{máx} = \frac{(3 \times 10^8\ m/s)(3{,}80 \times 10^{-9}\ T)}{\sqrt{1{,}74 \times 1{,}23}} = 0{,}779\ V/m$$

Ejercicio Nº 8: Una onda electromagnética con una frecuencia de 65 Hz viaja en un material ferromagnético aislante con una constante dieléctrica de 3,64 y una permeabilidad relativa de 5,18 *(a esa frecuencia)*. El campo eléctrico tiene una amplitud de 7,20 x 10^{-3} V/m. a) ¿Cuál es la velocidad de propagación de la onda? b) ¿Cuál es su longitud de onda? c) ¿Cuál es la amplitud del campo magnético? d) ¿Cuál es la intensidad de la onda?

a) $$v = \frac{c}{\sqrt{K_e\,K_m}} = \frac{(3 \times 10^8\ m/s)}{\sqrt{3{,}64 \times 5{,}18}} = 6{,}91 \times 10^7\ m/s$$

b) $$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{6{,}91 \times 10^7\ m/s}{65\ Hz} = 1{,}06 \times 10^6\ m$$

c) $$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{v} = \frac{7{,}20 \times 10^{-3}\ V/m}{6{,}91\ \times 10^7\ m/s} = 1{,}04 \times 10^{-10}\ T$$

d) S = E H $\Rightarrow$ potencia instantánea transportada p/unidad de área

I = S_m $\Rightarrow$ intensidad de onda o potencia media transportada p/unidad de área

$$I = \frac{E_{máx}\,H_{máx}}{2} = \frac{E_{máx}\,B_{máx}}{2\,\mu} = \frac{E_{máx}\,B_{máx}}{2\,K_m\,\mu_0}$$

$$I = \frac{(7{,}20 \times 10^{-3}\ V/m)(1{,}04 \times 10^{-10}\ T)}{2(5{,}18)(4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A)} = 5{,}75 \times 10^{-8}\ W/m^2$$

Ejercicio Nº 9: Una onda electromagnética con una frecuencia de 5,70 x 10^{14} Hz se propaga con una velocidad de 2,17 x 10^8 m/s en cierto objeto de vidrio. Hallar: a) la longitud de la onda en el vidrio; b) la longitud de la onda cuando se propaga en el aire; c) el índice de refracción *n* del vidrio correspondiente a una onda de esa frecuencia; d) la constante del vidrio a esa frecuencia, suponiendo que la permeabilidad relativa es la unidad.

a) $$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2{,}17 \times 10^8\ m/s}{5{,}70 \times 10^{14}\ Hz} = 3{,}81 \times 10^{-7}\ m$$

b) $$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{5{,}70 \times 10^{14}\ Hz} = 5{,}26 \times 10^{-7}\ m$$

////

////

c) $$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \times 10^8 \; m/s}{2{,}17 \times 10^8 \; m/s} = 1{,}38$$

d) $$v = \frac{c}{\sqrt{K_e}} \quad \Rightarrow \quad K_e = \frac{c^2}{v^2} = n^2 = 1{,}38^2 = 1{,}90$$

Ejercicio Nº 10: Se desea evaluar el comportamiento de un nuevo transmisor de radio a bordo de la Estación Espacial Internacional (EEI). Desde una nave espacial en órbita, un astronauta apunta con un detector sensible hacia la EEI, que está a 2,5 km de distancia. Encuentra que la amplitud de campo eléctrico de las ondas de radio provenientes del transmisor es de 0,09 V/m y que la frecuencia de las ondas es de 244 MHz. Hallar: a) la intensidad de la onda de radio en donde se encuentra el astronauta; b) la amplitud del campo magnético de la onda en la misma posición anterior; c) la potencia de salida total del transmisor de radio de la EEI.

a) También: $I = S_m = \frac{1}{2} v \, \varepsilon \, E^2_{máx} = \frac{1}{2} v \, \mu \, H^2_{máx}$ $\Rightarrow$ *ver pág. 43*

$$I = \frac{1}{2} c \, \varepsilon_0 \, E^2_{máx} = \frac{1}{2} (3 \times 10^8 m/s)(8{,}85 \times 10^{-12} As/Vm)(0{,}09 \; V/m)^2$$

$$I = 1{,}075 \times 10^{-5} \; W/m^2$$

b) $$B_{máx} = E_{máx}/c = (0{,}09 \; V/m) \div (3 \times 10^8 m/s) = 3 \times 10^{-10} \; T$$

c) Suponemos que el transmisor transmite
de manera uniforme en todas direcciones:

$$P = I(4\pi r^2) = \left(1{,}075 \times 10^{-5} \; W/m^2\right)(4\pi)(2{,}5 \times 10^3 m)^2 = 844 \; W$$

Ejercicio Nº 11: Una onda electromagnética sinusoidal emitida por una estación de radio, pasa perpendicularmente a través de una ventana abierta con un área de 0,5 m^2. En la ventana, el campo eléctrico de la onda tiene un valor eficaz de 0,02 V/m. ¿Cuánta energía transporta esta onda a través de la ventana durante un programa comercial de 30 s?

$$E^2_{eficaz} = \left(\frac{E_{máx}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} E^2_{máx}$$

$$I = \frac{1}{2} c \, \varepsilon_0 \, E^2_{máx} = c \, \varepsilon_0 \, E^2_{eficaz}$$

////

////

$$I = (3 \times 10^8 m/s)(8{,}85 \times 10^{-12} As/Vm)(0{,}02\ V/m)^2 = 1{,}06 \times 10^{-6}\ W/m^2$$

La energía que pasa a través de la ventana de área A durante un tiempo t, es:

$$U = I\ A\ t = (1{,}06 \times 10^{-6}\ W/m^2)(0{,}5\ m^2)(30\ s) = 15{,}9\ \mu J$$

Ejercicio Nº 12: Una onda electromagnética sinusoidal emitida por un teléfono celular tiene una longitud de onda de 35,4 cm y una amplitud de campo eléctrico de 5,40 x 10^{-2} V/m, a una distancia de 250 m de la antena. Calcular: a) la frecuencia de la onda; b) la amplitud del campo magnético; c) la intensidad de la onda.

a) $$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\ m/s}{0{,}354\ m} = 8{,}47 \times 10^8\ Hz$$

b) $$B_{máx} = \frac{E_{máx}}{c} = \frac{0{,}054\ V/m}{3 \times 10^8\ m/s} = 1{,}8 \times 10^{-10}\ T$$

c) $$I = \frac{E_{máx}\ B_{máx}}{2\ \mu_0} = \frac{(0{,}054\ V/m)\ (1{,}8\ \times 10^{-10}\ T)}{2\ (4\pi \times 10^{-7}\ Tm/A)} = 3{,}87 \times 10^{-6}\ W/m^2$$