

Secciones resueltas por integración

1.1. Sección rectangular

Calcular el área, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección rectangular que se muestra a continuación.

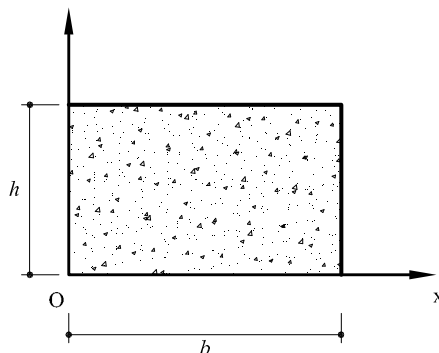


Figura 1.1: Sección rectangular

1.1.1. Cálculo del área de la sección rectangular

Para realizar el cálculo del área de la sección dada nos apoyamos a la definición de la misma:

$$A = \int_A dA \quad (1.1)$$

En la figura 1.2 se puede apreciar como el diferencial de área dA es una franja de espesor dx y altura h de tal manera que:

$$dA = h dx \quad (1.2)$$

El área se calcula como suma de estos diferenciales de área por x que corre entre 0 y b :

$$A = \int_0^b h dx = h [x]_0^b = b h \quad (1.3)$$

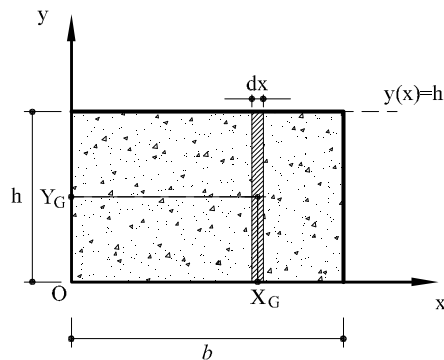


Figura 1.2: Esquema del diferencial de área para calcular I_y

Para calcular la posición del centroide de la sección es necesario obtener los momentos estáticos según ambos ejes x y y definidos como:

$$M_x = \int_A Y_G dA \quad (1.4a)$$

$$M_y = \int_A X_G dA \quad (1.4b)$$

donde X_G y Y_G definen la posición del centroide de la franja de área dA . En éste caso, valen:

$$X_G = x \quad (1.5a)$$

$$Y_G = \frac{y(x)}{2} = \frac{h}{2} \quad (1.5b)$$

de tal manera que los momentos estáticos resultan:

$$M_x = \int_A \frac{h}{2} dA = \int_0^b \frac{h}{2} (h dx) = \frac{h^2}{2} [x]_0^b = \frac{b h^2}{2} \quad (1.6a)$$

$$M_y = \int_A x dA = \int_0^b x (h dx) = h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{b^2 h}{2} \quad (1.6b)$$

Una vez obtenidos los valores de los momentos estáticos, la posición del centroide de la sección rectangular se halla como:

$$x_g = \frac{M_y}{A} = \frac{b}{2} \quad (1.7a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A} = \frac{h}{2} \quad (1.7b)$$

1.1.2. Cálculo del momento de inercia I_y de la sección rectangular

El cálculo del momento de inercia I_y (respecto del eje y en definido en la figura 1.1) se realiza fácilmente considerando la subdivisión de la sección según los mismos diferenciales de

área mostrados en la figura 1.2:

$$I_y = \int_A X_G^2 dA = \int_0^b x^2 (h dx) = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{3} b^3 h \quad (1.8)$$

Una vez se ha obtenido el momento la inercia respecto al eje y , se puede transportar al eje y_g (que pasa por el centroide de la sección) mediante el teorema de los ejes paralelos (o teorema de Steiner):

$$I_{y_g} = I_y - A \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} b^3 h \quad (1.9)$$

1.1.3. Cálculo del momento de inercia I_x de la sección rectangular

Para calcular el momento de inercia I_x , es conveniente dividir la sección en diferenciales de área de espesor dy , tal y como se muestra en la figura 1.3:

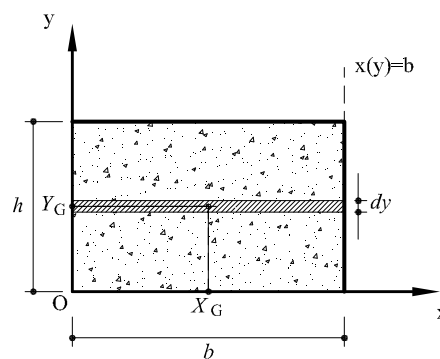


Figura 1.3: Esquema del diferencial de área para calcular I_x

En este caso, el valor del diferencial de área dA resulta:

$$dA = b dy \quad (1.10)$$

y la correspondiente posición del centroide de cada diferencial de área es:

$$X_G = \frac{b}{2} \quad (1.11a)$$

$$Y_G = y \quad (1.11b)$$

El cálculo del momento de inercia I_x se realiza de la siguiente manera:

$$I_x = \int_A Y_G^2 dA = \int_0^h y^2 (b dy) = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} b h^3 \quad (1.12)$$

y aplicando el teorema de los ejes paralelos es posible transportarlo al eje horizontal que pasa por el centroide:

$$I_{x_g} = I_x - A \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} b h^3 \quad (1.13)$$

1.1.4. Cálculo del producto de inercia I_{xy} de la sección rectangular

Para el cálculo del producto de inercia es conveniente dividir la sección en pequeños rectángulos de lados dx y dy como se muestra en la figura 1.4

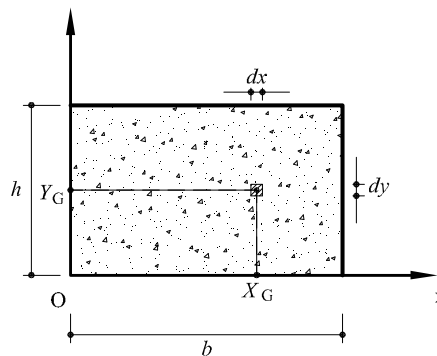


Figura 1.4: Esquema del diferencial de área para calcular I_{xy}

El diferencial de área dA es, por lo tanto:

$$dA = dx \, dy \quad (1.14)$$

y el centroide del diferencial de área se encontrará en la posición:

$$X_G = x \quad (1.15a)$$

$$Y_G = y \quad (1.15b)$$

El producto de inercia I_{xy} se calcula como:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A x_G y_G \, dA = \int_A xy \, dA = \int_0^b \left(x \int_0^h y \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^b \left(x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h \right) dx = \frac{h^2}{2} \int_0^b x \, dx = \frac{h^2}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \\ &= \frac{1}{4} b^2 h^2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

El valor del producto de inercia $I_{x_g y_g}$ respecto de los ejes que pasan por el centroide de la sección se obtiene como:

$$I_{x_g y_g} = I_{xy} - A \frac{h}{2} \frac{b}{2} = 0 \quad (1.17)$$

1.2. Sección triangular

Calcular el área, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección triangular que se muestra a continuación.

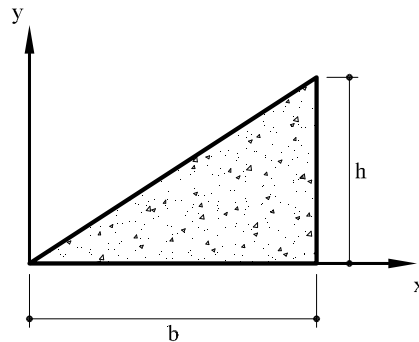


Figura 1.5: Sección triangular

1.2.1. Cálculo del área de la sección triangular

La sección triangular está delimitada por la recta $y(x) = \frac{h}{b}x$ y el eje de las abscisas, por x que varía entre 0 y b . En la figura 1.6 se muestra el diferencial de área dA que se usa para el cálculo del área de la sección:

$$dA = y(x) dx = \left(\frac{h}{b}x\right) dx \quad (1.18)$$

La posición del centroide del diferencial de área:

$$X_G = x \quad (1.19a)$$

$$Y_G = \frac{y(x)}{2} = \frac{1}{2} \frac{h}{b} x \quad (1.19b)$$

El área de la sección se obtiene integrando en todo el dominio (sumando los diferenciales de área):

$$A = \int_A dA = \int_0^b \frac{h}{b} x dx = \frac{h}{b} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{b h}{2} \quad (1.20)$$

La posición del centroide de la sección se obtiene calculando los momentos estáticos:

$$M_x = \int_A Y_G dA = \int_0^b \left(\frac{1}{2} \frac{h}{b} x\right) \left(\frac{h}{b} x dx\right) = \frac{h^2}{2b^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b h^2}{6} \quad (1.21a)$$

$$M_y = \int_A X_G dA = \int_0^b x \left(\frac{h}{b} x dx\right) = \frac{h}{b} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{b^2 h}{3} \quad (1.21b)$$

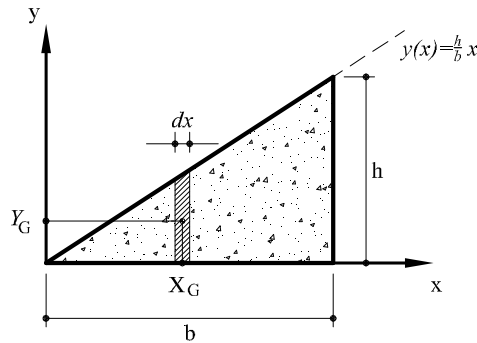


Figura 1.6: Esquema del diferencial de área para calcular I_y

de tal manera que:

$$x_g = \frac{M_y}{A} = \frac{2}{3}b \quad (1.22a)$$

$$x_g = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{3}h \quad (1.22b)$$

1.2.2. Cálculo del momento de inercia I_y de la sección triangular

El valor del momento de inercia I_y se obtiene como:

$$I_y = \int_A X_G^2 dA = \int_0^b x^2 \left(\frac{h}{b} dx \right) = \frac{h}{b} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^b = \frac{1}{4}b^3h \quad (1.23)$$

y posteriormente, aplicando el teorema de los ejes paralelos, el valor del momento de inercia I_{y_g} correspondiente a un eje que pasa por el centroide (x_g, y_g) se calcula como:

$$I_{y_g} = I_y - A \left(\frac{2}{3}b \right)^2 = \frac{1}{36}b^3h \quad (1.24)$$

1.2.3. Cálculo del momento de inercia I_x de la sección triangular

Para calcular el valor de la inercia I_x es conveniente descomponer la sección en diferenciales de área horizontales dA de espesor dy como se muestra en la figura 1.7. Por un lado, este diferencial de área vale:

$$dA = [b - x(y)] dy = b \left(1 - \frac{y}{h} \right) dy \quad (1.25)$$

donde se ha invertido la función $y = y(x)$ para poder escribir la función $x = x(y)$

$$y(x) = \frac{h}{b} x \Rightarrow x(y) = \frac{b}{h} y \quad (1.26)$$

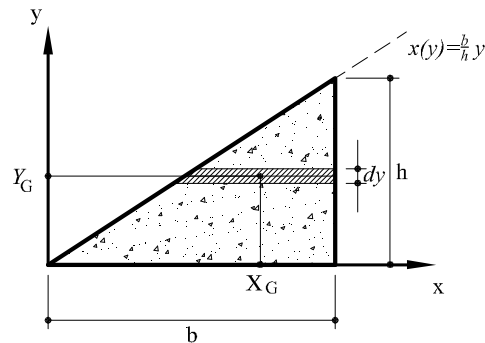


Figura 1.7: Esquema del diferencial de área para calcular I_x

Por otro lado, la posición del centroide del diferencial de área es la siguiente:

$$X_G = x(y) + \frac{[b - x(y)]}{2} \quad (1.27a)$$

$$Y_G = y \quad (1.27b)$$

El momento de inercia I_x se calcula como:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A Y_G^2 dA = \int_0^h y^2 b \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h - \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) bh^3 = \frac{1}{12} bh^3 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Por último, se transporta el momento de inercia al eje que pasa por el centroide usando el teorema de los ejes paralelos:

$$I_{x_g} = I_x - A \left(\frac{1}{3}h \right)^2 = \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{18} bh^3 = \frac{1}{36} bh^3 \quad (1.29)$$

1.2.4. Cálculo del producto de inercia I_{xy} de la sección triangular

Para el cálculo del producto de inercia I_{xy} es conveniente dividir la sección en pequeños rectángulos de lados dx y dy como se muestra en la figura 1.8.

El diferencial de área se escribe como:

$$dA = dx dy \quad (1.30)$$

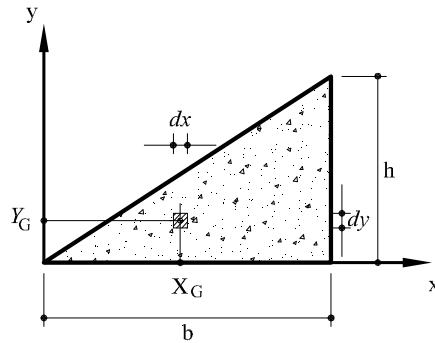


Figura 1.8: Esquema del diferencial de área para calcular I_{xy}

El centroide del diferencial de área se sitúa en la posición:

$$X_G = x \quad (1.31a)$$

$$Y_G = y \quad (1.31b)$$

El producto de inercia I_{xy} se calcula integrando con ambas variables:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A X_G Y_G dA = \int_0^b \left(\int_0^{y(x)=\frac{h}{b}x} y dy \right) x dx = \int_0^b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{h}{b}x} x dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \int_0^b x^3 dx = \frac{1}{2} \frac{h^2}{b^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^b = \frac{1}{8} b^2 h^2 \end{aligned} \quad (1.32)$$

y transportando el producto de inercia hacia los ejes que pasan por el centroide (teorema de los ejes paralelos), obtenemos:

$$I_{x_G y_G} = I_{xy} - A \left(\frac{2}{3}b \right) \left(\frac{1}{3}h \right) = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) b^2 h^2 = \frac{1}{72} b^2 h^2 \quad (1.33)$$

1.3. Sección parabólica

Calcular el área, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección que se encuentra entre el eje de las abscisas y la parábola $y(x) = kx^2$, que se muestra a continuación.

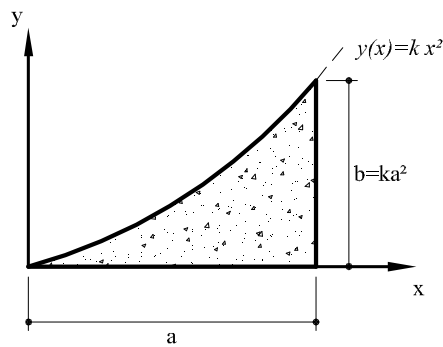


Figura 1.9: Sección parabólica

1.3.1. Cálculo del área de la sección parabólica

Para calcular el área de esta sección es conveniente considerar unos diferenciales de área verticales dA de espesor dx como se muestra en la figura 1.10.

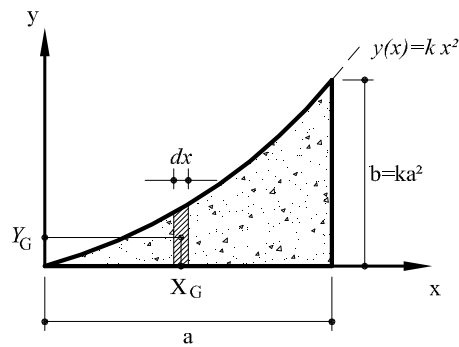


Figura 1.10: Esquema del diferencial de área para calcular I_y

El diferencial de área dA resultante es:

$$dA = y(x) dx = kx^2 dx \quad (1.34)$$

y la posición del centroide del diferencial de área es:

$$X_G = x \quad (1.35a)$$

$$Y_G = \frac{y(x)}{2} \quad (1.35b)$$

El área de la sección se obtiene integrando en el dominio respecto a la variable x :

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_0^a y(x) dx = \int_0^a kx^2 dx \\ &= k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{ka^3}{3} = \frac{ab}{3} \end{aligned} \quad (1.36)$$

siendo $b = ka^2$ se ha expresado el valor de k en la forma $k = \frac{b}{a^2}$.

Para obtener la posición del centroide de la sección es necesario calcular el valor de los momentos estáticos M_y y M_x como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} M_y &= \int_A X_G dA = \int_0^a x [y(x) dx] = \int_0^a kx^3 dx = k \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{ka^4}{4} = \frac{a^2b}{4} \end{aligned} \quad (1.37a)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A Y_G dA = \int_0^a \frac{y(x)}{2} [y(x) dx] = \int_0^a \frac{k^2x^4}{2} dx = \frac{k^2}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^a \\ &= \frac{k^2a^5}{10} = \frac{ab^2}{10} \end{aligned} \quad (1.37b)$$

Con estos resultados es posible sacar la posición del centroide:

$$x_g = \frac{M_y}{A} = \frac{3}{4}a \quad (1.38a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A} = \frac{3}{10}b \quad (1.38b)$$

1.3.2. Cálculo del momento de inercia I_y de la sección parabólica

E cálculo del momento de inercia I_y se halla como:

$$I_y = \int_A X_G^2 dA = \int_0^a x^2 (kx^2 dx) = k \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^a = \frac{ka^5}{5} = \frac{1}{5}a^3b \quad (1.39)$$

y haciendo uso del teorema de los ejes paralelos:

$$I_{y_g} = I_y - A \left(\frac{3}{4}a \right)^2 = \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{16} \right) ba^3 = \frac{1}{80}a^3b \quad (1.40)$$

1.3.3. Cálculo del momento de inercia I_x de la sección parabólica

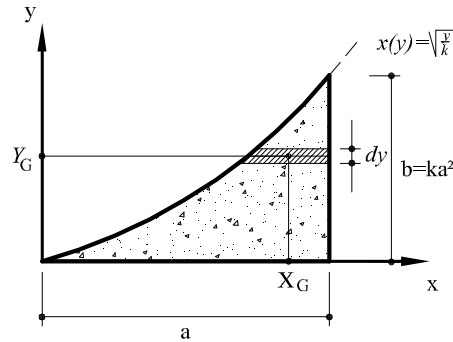


Figura 1.11: Esquema del diferencial de área para calcular I_x .

Pasando a un diferencial de área horizontal de espesor dy , como se muestra en la figura 1.11, se puede escribir:

$$dA = [a - x(y)] dy \quad (1.41)$$

siendo $x(y) = \sqrt{\frac{y}{k}}$ la función inversa que representa la parábola.

La distancia del diferencial de área desde el eje x , es simplemente:

$$Y_G = y \quad (1.42)$$

El momento de inercia I_x se obtiene resolviendo la siguiente integral:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A Y_G^2 dA = \int_0^b y^2 \left(a - \sqrt{\frac{y}{k}} \right) dy \\ &= a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b - \left[\frac{2}{7} \frac{y^{7/2}}{\sqrt{k}} \right]_0^b \\ &= \frac{ab^3}{3} - \frac{2}{7} b^3 \sqrt{\frac{b}{k}} = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{7} \right) ab^3 = \frac{1}{21} ab^3 \end{aligned} \quad (1.43)$$

y haciendo uso del teorema de los ejes paralelos:

$$I_{x_g} = I_x - A \left(\frac{3}{10} a \right)^2 = \left(\frac{1}{21} - \frac{3}{100} \right) ab^3 = \frac{37}{2100} ab^3 \quad (1.44)$$

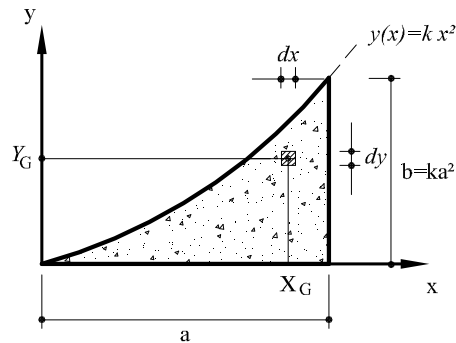


Figura 1.12: Esquema del diferencial de área para calcular I_{xy}

1.3.4. Cálculo del producto de inercia I_{xy} de la sección parabólica

Por último, para hallar el valor del producto de inercia, I_{xy} , se escoge un diferencial de área dA de lados dx y dy , tal y como puede verse en la figura 1.12

El valor de dA y la posición de su centroide se expresan en función de las variables independientes x e y :

$$dA = dx dy \quad (1.45a)$$

$$X_G = x \quad (1.45b)$$

$$Y_G = y \quad (1.45c)$$

El producto de inercia se obtiene con la siguiente integral doble:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A X_G Y_G dA = \int_0^a \left(\int_0^{kx^2} y dy \right) x dx = \int_0^a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{kx^2} x dx \\ &= \int_0^a \frac{k^2 x^5}{2} dx = \frac{k^2}{2} \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^a = \frac{k^2}{12} a^6 = \frac{1}{12} a^2 b^2 \end{aligned} \quad (1.46)$$

Si se requiere el valor respecto a los ejes que pasan por el centroide de la sección, (x_g, y_g) , se debe aplicar la fórmula del transporte de Steiner (teorema de los ejes paralelos) como sigue:

$$I_{x_g y_g} = I_{xy} - A \left(\frac{3}{4} a \right) \left(\frac{3}{10} b \right) = \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{48} \right) a^2 b^2 = \frac{1}{48} a^2 b^2 \quad (1.47)$$

1.4. Sección circular

Calcular el área, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección circular que se muestra a continuación.

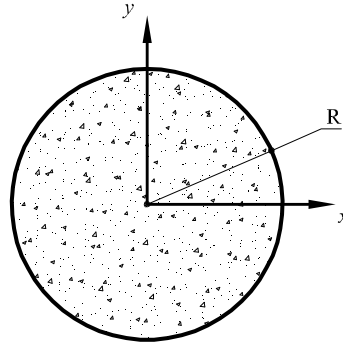


Figura 1.13: Sección circular

1.4.1. Cálculo del área de la sección circular

En este caso, teniendo en cuenta la simetría radial de la sección, es conveniente considerar un diferencial de área (aros de espesor dr) como lo que se muestra en la figura 1.14. Éste diferencial de área vale:

$$dA = 2\pi r dr \quad (1.48)$$

Integrando entre 0 y R , se obtiene el área de la sección:

$$A = \int_A dA = \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2 \quad (1.49)$$

1.4.2. Cálculo de los momentos de inercia de la sección circular

Lo más sencillo de calcular es el momento polar de inercia, como se muestra a continuación:

$$I_o = \int_A r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{1}{2} \pi R^4 \quad (1.50)$$

Teniendo en cuenta que $I_o = I_x + I_y$ y que por la doble simetría de la sección $I_x = I_y$, se puede calcular el momento de inercia:

$$I_x = I_y = \frac{I_o}{2} = \frac{1}{4} \pi R^4 \quad (1.51)$$

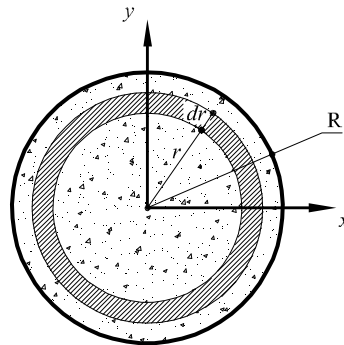


Figura 1.14: Esquema del diferencial de área

Una forma alternativa de calcular el momento de inercia de la sección circular es trabajando en coordenadas polares.

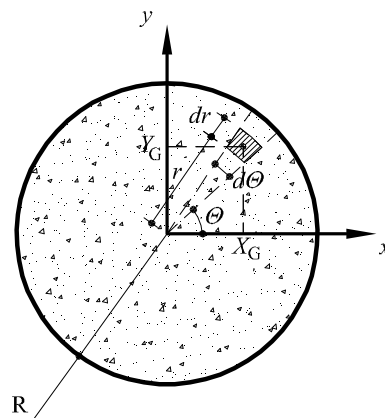


Figura 1.15: Esquema del diferencial de área.

En este caso, el diferencial de área, dA , que resulta interesante utilizar consiste en un pequeño rectángulo de espesor dr y longitud $rd\theta$ como se muestra en la figura 1.15:

$$dA = (rd\theta) dr \quad (1.52)$$

La posición del centroide del diferencial de área se encuentra en:

$$X_G = r \cos \theta \quad (1.53a)$$

$$Y_G = r \sin \theta \quad (1.53b)$$

Utilizando las coordenadas polares, la integral sobre el dominio de la sección para el cálculo del momento de inercia, I_x , se resuelve como sigue:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A Y_G^2 dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \right) \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^4}{4} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} \pi R^4 \end{aligned} \quad (1.54)$$

Por razones de simetría, el producto, I_{xy} , tiene que ser nulo y efectivamente:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A X_G Y_G dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{R^4}{4} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.5. Cuarto de círculo

Calcular el área, los momentos de inercia y el producto de inercia de la sección que se muestra a continuación.

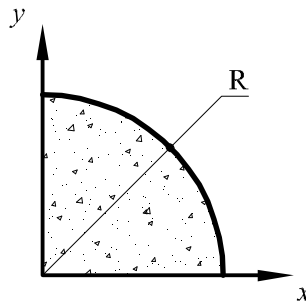


Figura 1.16: *Cuarto de círculo*

1.5.1. Cálculo del área del cuarto de círculo

En este caso, lo más cómodo es trabajar en coordenadas polares, utilizando el radio r y el ángulo θ como variables de integración.

El diferencial de área, dA , que resulta interesante usar, consiste en un pequeño rectángulo de espesor dr y longitud $r d\theta$ como se muestra en la figura 1.17.

$$dA = (r d\theta) dr \quad (1.56)$$

La posición del centroide del diferencial de área se encuentra en:

$$X_G = r \cos \theta \quad (1.57a)$$

$$Y_G = r \sin \theta \quad (1.57b)$$

El área del cuarto de círculo se calcula integrando en todo el dominio utilizando las coordenadas polares:

$$A = \int_A dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R \right) d\theta = \frac{R^2}{2} [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4} \quad (1.58)$$

Para calcular la posición del centroide de la sección, es necesario obtener el valor de los momentos estáticos:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_A Y_G dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 dr \right) \sin \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \sin \theta d\theta \\ &= \frac{R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = \frac{R^3}{3} [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \end{aligned} \quad (1.59a)$$

$$M_y = \int_A X_G dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 dz \right) \cos \theta d\theta = \frac{R^3}{3} [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^3}{3} \quad (1.59b)$$

de tal manera que:

$$X_G = \frac{M_y}{A} = \frac{4R}{3\pi} \quad (1.60a)$$

$$Y_G = \frac{M_x}{A} = \frac{4R}{3\pi} \quad (1.60b)$$

1.5.2. Cálculo de los momentos de inercia del cuarto de círculo

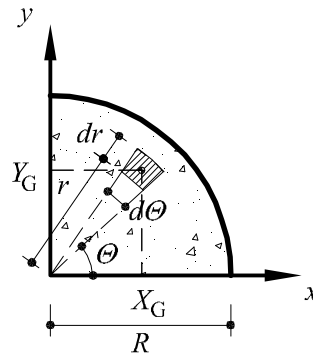


Figura 1.17: Esquema del diferencial de área.

El momento de inercia respecto del eje de las abscisas, I_x , se obtiene resolviendo la siguiente integral:

$$I_x = \int_A Y_G^2 dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \sin^2 \theta d\theta = \frac{R^4}{4} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{16} \quad (1.61)$$

Por un lado se puede observar como el valor del momento de inercia es justamente la cuarta parte del momento de inercia del círculo. Por otro lado, la simetría impone $I_x = I_y$.

Finalmente, utilizando el teorema de los ejes paralelos podemos mover el momento de inercia I_x , hacia el eje que pasa por el centroide de la sección:

$$I_{x_g} = I_x - A \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 = \frac{\pi R^4}{16} - \frac{4R^4}{9\pi} \quad (1.62)$$

El cálculo del producto de inercia I_{xy} se realiza de forma similar:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A X_G Y_G dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^3 dr \right) \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= \frac{R^4}{4} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^4}{8} \end{aligned} \quad (1.63)$$

y utilizando el teorema de los ejes paralelos podemos movernos al eje que pasa por el centroide de la sección:

$$I_{x_g y_g} = I_{xy} - A \left(\frac{4R}{3\pi} \right) \left(\frac{4R}{3\pi} \right) = \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi} \quad (1.64)$$

Secciones compuestas

2.1. Problema 1

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta de figura 2.1a respecto de su centroide.

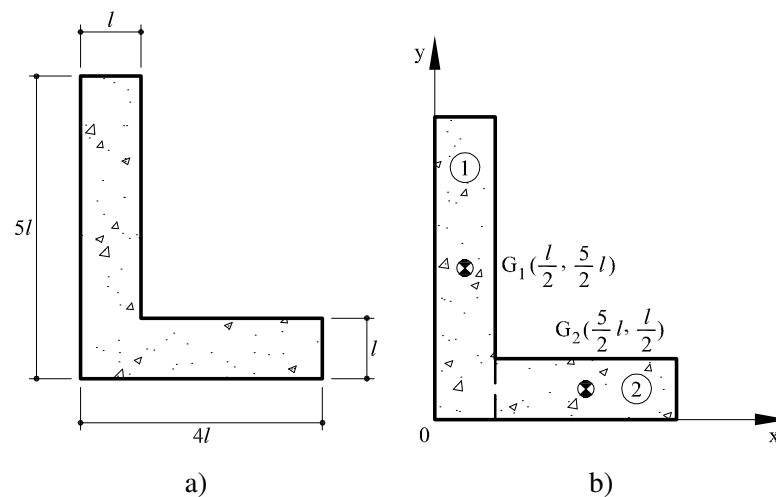


Figura 2.1: *Problema 1: (a) Sección propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece de la sección compuesta*

2.1.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Para resolver el problema, primero se procede al despiece de la sección compuesta en dos rectángulos, (1) y (2), tal y como se muestra en la figura 2.1b.

En primer lugar se calculan las áreas de los dos rectángulos descritos y el área total, A_T :

$$A^{(1)} = 5l^2 \quad (2.1a)$$

$$A^{(2)} = 3l^2 \quad (2.1b)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} = 8l^2 \quad (2.1c)$$

En segundo lugar, se calculan los momentos estáticos (respecto de los ejes de figura 2.1b) como paso previo al cálculo del centroide de la sección compuesta:

$$M_x = A^{(1)}\left(\frac{5l}{2}\right) + A^{(2)}\left(\frac{l}{2}\right) = 14l^3 \quad (2.2a)$$

$$M_y = A^{(1)}\left(\frac{l}{2}\right) + A^{(2)}\left(\frac{5l}{2}\right) = 10l^3 \quad (2.2b)$$

Finalmente, la posición del centroide se obtiene con las siguientes expresiones:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = \frac{5l}{4} = 1,25l \quad (2.3a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{7l}{4} = 1,75l \quad (2.3b)$$

2.1.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calculan los momentos de inercia I_x e I_y , el producto I_{xy} y el momento polar I_o respecto a los ejes x_G e y_G (ver figura 2.2a) que pasan por el centroide de la sección compuesta.

El momento de inercia $I_x^{(i)}$ de cada rectángulo se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$, mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} l (5l)^3 + A^{(1)} \left(\frac{5l}{2} - y_g \right)^2 \quad (2.4a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} 3l (l)^3 + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (2.4b)$$

El valor del momento de inercia de la sección compuesta se obtiene sumando las contribuciones de las diferentes partes del despiece:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 18,16 l^4 \quad (2.5)$$

De la misma forma, se procede con el cálculo de los momentos de inercia, $I_y^{(i)}$:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} (5l) l^3 + A^{(1)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.6a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} l (3l)^3 + A^{(2)} \left(\frac{5l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.6b)$$

y calcula el momento de inercia de la sección compuesta, I_y , sumando las inercias del despiece:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 10,16 l^4 \quad (2.7)$$

Se sigue la misma metodología en el cálculo del producto de inercia:

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right) \left(\frac{5l}{2} - y_g \right) \quad (2.8a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(\frac{5l}{2} - x_g \right) \left(\frac{l}{2} - y_g \right) \quad (2.8b)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = -7,5 l^4 \quad (2.8c)$$

Por último, el valor del momento polar de inercia, I_o , respecto al centroide se calcula fácilmente sumando I_x e I_y .

$$I_o = I_x + I_y = 28,33 l^4 \quad (2.9)$$

2.1.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se puede apreciar en la figura 2.2b los momentos principales de inercia (máximo y mínimo) se dan cuando el producto de inercia se anula ($I_{xy} = 0$), una situación que corresponde a la intersección del círculo Mohr con el eje horizontal.

El centro, I_m , y el radio, R , del círculo de Mohr se obtienen:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 14,16 l^4 \quad (2.10a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = 8,5 l^4 \quad (2.10b)$$

de tal manera que los momentos principales de inercia, I_{max} e I_{min} , resultan:

$$I_{max} = I_m + R = 22,67 l^4 \quad (2.11a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 5,67 l^4 \quad (2.11b)$$

Para finalizar, la rotación de ejes, θ , necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia (figura 2.2b) se calcula como:

$$\theta = 0,5 \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = 30,9^\circ \quad (2.12)$$

El resultado obtenido es positivo, dando lugar a una rotación de ejes en sentido antihorario, o bien (manteniendo los ejes fijos) a una rotación horaria de la sección.

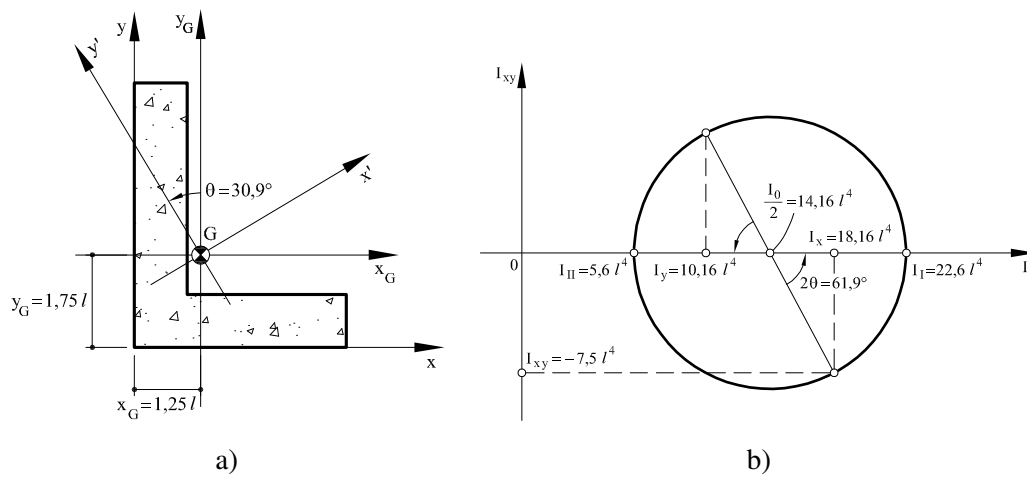


Figura 2.2: Problema 1: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.2. Problema 2

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta de figura 2.3a respecto de su centroide.

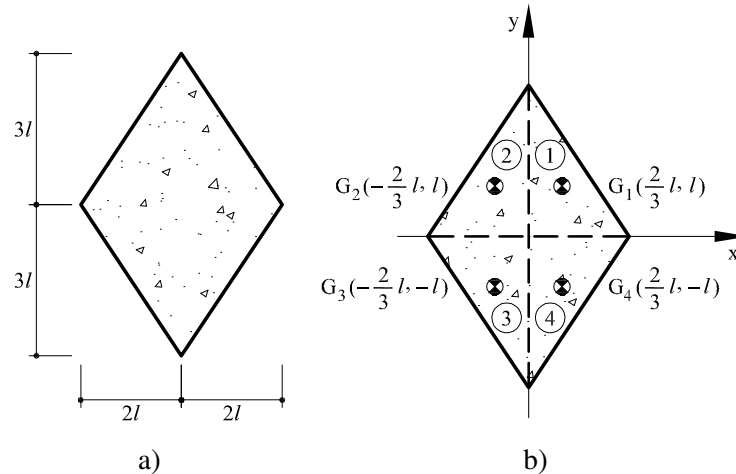


Figura 2.3: Problema 2: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.2.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

La sección dada se puede considerar como la suma de los cuatro triángulos (1), (2), (3) y (4), como se muestra en figura 2.3b. Las áreas de los triángulos descritos son las siguientes:

$$A^{(1)} = (2l)\left(\frac{3l}{2}\right) = 3l^2 \quad (2.13a)$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} \quad (2.13b)$$

$$A^{(3)} = (2l)\left(\frac{3l}{2}\right) = 3l^2 \quad (2.13c)$$

$$A^{(4)} = A^{(3)} \quad (2.13d)$$

Sumando estas áreas se obtiene el área, A_T , de la sección compuesta:

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} = 12l^2 \quad (2.14)$$

Debido a la doble simetría de la sección compuesta, su centroide se sitúa en la intersección de estos ejes de simetría:

$$x_g = 0 \quad (2.15a)$$

$$y_g = 0 \quad (2.15b)$$

2.2.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calculan los momentos de inercia I_x e I_y , el producto de inercia I_{xy} y el momento polar de inercia, I_o , respecto a los ejes x_G e y_G que pasan por el centroide de la sección compuesta (vease figura 2.4a).

El valor del momento de inercia de la sección compuesta, I_x , se obtiene sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de las diferentes partes del despiece:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{36}(2l)(3l)^3 + A^{(1)}(l)^2 = \frac{9l^4}{2} \quad (2.16a)$$

$$I_x^{(2)} = I_x^{(1)} = \frac{9l^4}{2} \quad (2.16b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{36}(2l)(3l)^3 + A^{(3)}(-l)^2 = \frac{9l^4}{2} \quad (2.16c)$$

$$I_x^{(4)} = I_x^{(3)} = \frac{9l^4}{2} \quad (2.16d)$$

Se puede observar como el primero termino corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por el centroide, $G^{(i)}$, de cada parte del despiece, mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner). La suma de los cuatro momentos de inercias parciales permite obtener el valor, I_x , de la sección compuesta:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 18l^4 \quad (2.17)$$

De la misma manera se procede con el cálculo de, I_y . Primero se calculan las inercias parciales

y después, sumándolas, se obtiene el valor del momento de inercia, I_y , de la sección compuesta:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{36}(3l)(2l)^3 + A^{(1)} \left(\frac{2l}{3} \right)^2 = 2l^4 \quad (2.18a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{36}(3l)(2l)^3 + A^{(2)} \left(-\frac{2l}{3} \right)^2 = 2l^4 \quad (2.18b)$$

$$I_y^{(3)} = I_y^{(2)} = 2l^4 \quad (2.18c)$$

$$I_y^{(4)} = I_y^{(1)} = 2l^4 \quad (2.18d)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} = 8l^4 \quad (2.18e)$$

El producto de inercia, $I_{xy} = 0$ debido a la doble simetría de la sección. Esto se puede comprobar siguiendo exactamente el mismo procedimiento anterior:

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{72}(2l)^2(3l)^2 + A^{(1)} \left(\frac{2l}{3} \right) (l) \quad (2.19a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{72}(2l)^2(3l)^2 + A^{(2)} \left(-\frac{2l}{3} \right) (l) \quad (2.19b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = -\frac{1}{72}(2l)^2(3l)^2 + A^{(3)} \left(-\frac{2l}{3} \right) (-l) \quad (2.19c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = \frac{1}{72}(2l)^2(3l)^2 + A^{(4)} \left(\frac{2l}{3} \right) (-l) \quad (2.19d)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} = 0 \quad (2.19e)$$

Por último, el valor del momento polar de inercia, I_o , se obtiene sumando I_x e I_y :

$$I_o = I_x + I_y = 26l^4 \quad (2.20)$$

2.2.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En este caso, los ejes que hemos utilizado para el cálculo de los momentos de inercia son ejes principales de inercia ($I_{xy} = 0$). De ese modo resulta:

$$I_{max} = I_x = 18l^4 \quad (2.21a)$$

$$I_{min} = I_y = 8l^4 \quad (2.21b)$$

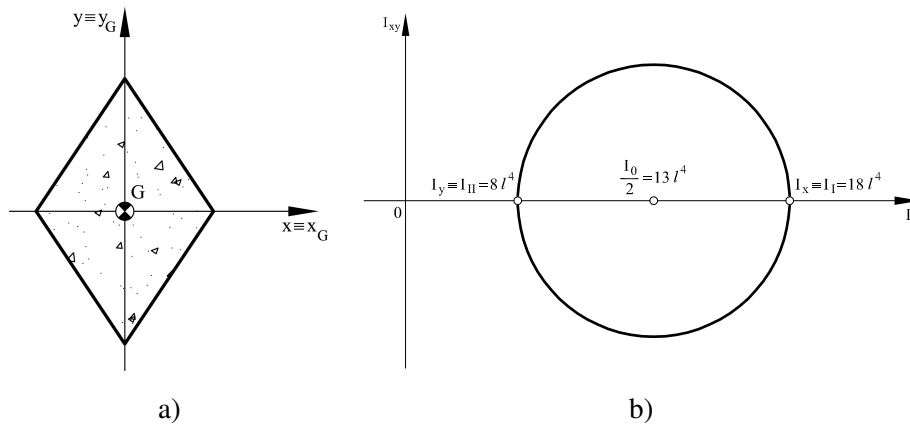


Figura 2.4: Problema 2: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.3. Problema 3

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta de figura 2.5a respecto de su centroide.

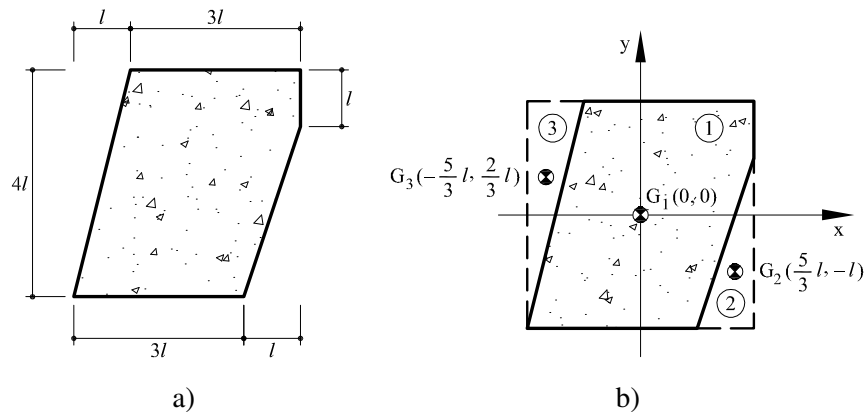


Figura 2.5: Problema 3: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.3.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Si se analiza la geometría de la sección compuesta propuesta (figura 2.5a), se observa como ésta se puede ver como una sección rectangular (1) a la cual se restan los triángulos (2) y (3). De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = (4l)(4l) = 16l^2 \quad (2.22a)$$

$$A^{(2)} = l \left(\frac{3l}{2} \right) = \frac{3l^2}{2} \quad (2.22b)$$

$$A^{(3)} = l \left(\frac{4l}{2} \right) = 2l^2 \quad (2.22c)$$

$$A_T = A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = \frac{25l^2}{2} \quad (2.22d)$$

Los momentos estáticos respecto de los ejes de figura 2.5b se obtienen con las siguientes expresiones:

$$M_x = A^{(1)}(0) - A^{(2)}(-l) - A^{(3)}\left(\frac{2l}{3}\right) = \frac{l^3}{6} = 0,167l^3 \quad (2.23a)$$

$$M_y = A^{(1)}(0) - A^{(2)}\left(\frac{5l}{3}\right) - A^{(3)}\left(-\frac{5l}{3}\right) = \frac{5l^3}{6} = 0,83l^3 \quad (2.23b)$$

de tal manera que el centroide de la sección compuesta se encuentra en la siguiente posición (vease figura 2.6a):

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = \frac{l}{15} = 0,067l \quad (2.24a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{l}{75} = 0,013l \quad (2.24b)$$

2.3.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calculan los momentos de inercia I_x e I_y , el producto I_{xy} y el momento polar I_o respecto a los ejes x_G e y_G (ver figura 2.6a) que pasan por el centroide de la sección compuesta.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.5b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} (4l) (4l)^3 + A^{(1)} (-y_g)^2 \quad (2.25a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{36} (l)(3l)^3 + A^{(2)} (-l - y_g)^2 \quad (2.25b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{36} (l)(4l)^3 + A^{(3)} \left(\frac{2l}{3} - y_g \right)^2 \quad (2.25c)$$

El momento de inercia, I_x , de la sección compuesta se calcula restando a la inercia generada por la sección rectangular $I_x^{(1)}$, las que generan los dos triángulos $I_x^{(2)}$ y $I_x^{(3)}$:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 16,4l^4 \quad (2.26)$$

El cálculo de la inercia I_y sigue el mismo procedimiento, tal y como se muestra a continuación:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} (4l) (4l)^3 + A^{(1)} (-x_g)^2 \quad (2.27a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{36} (l)^3 (3l) + A^{(2)} \left(\frac{5l}{3} - x_g \right)^2 \quad (2.27b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{36} (l)^3 (4l) + A^{(3)} \left(-\frac{5l}{3} - x_g \right)^2 \quad (2.27c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 11,3l^4 \quad (2.27d)$$

y de la misma manera, para el producto de inercia, I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} (-x_g) (-y_g) \quad (2.28a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{72}(l)^2(3l)^2 + A^{(2)} \left(\frac{5l}{3} - x_g \right) (-l - y_g) \quad (2.28b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = \frac{1}{72}(l)^2(4l)^2 + A^{(3)} \left(-\frac{5l}{3} - x_g \right) \left(\frac{2l}{3} - y_g \right) \quad (2.28c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 4,3l^4 \quad (2.28d)$$

Por último, se obtiene el momento polar de inercia, I_o , como la suma de I_x e I_y .

$$I_o = I_x + I_y = 27,7l^4 \quad (2.29)$$

2.3.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr en la figura 2.6b resultan:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 13,9l^4 \quad (2.30a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = 5,04l^4 \quad (2.30b)$$

y los correspondientes momentos de inercia I_{max} e I_{min} tienen por lo tanto el siguiente valor:

$$I_{max} = I_m + R = 18,9l^4 \quad (2.31a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 8,8l^4 \quad (2.31b)$$

Para finalizar, el ángulo, θ , que corresponde a la rotación de ejes necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia (figura 2.6a) vale:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = -29,9^\circ \quad (2.32)$$

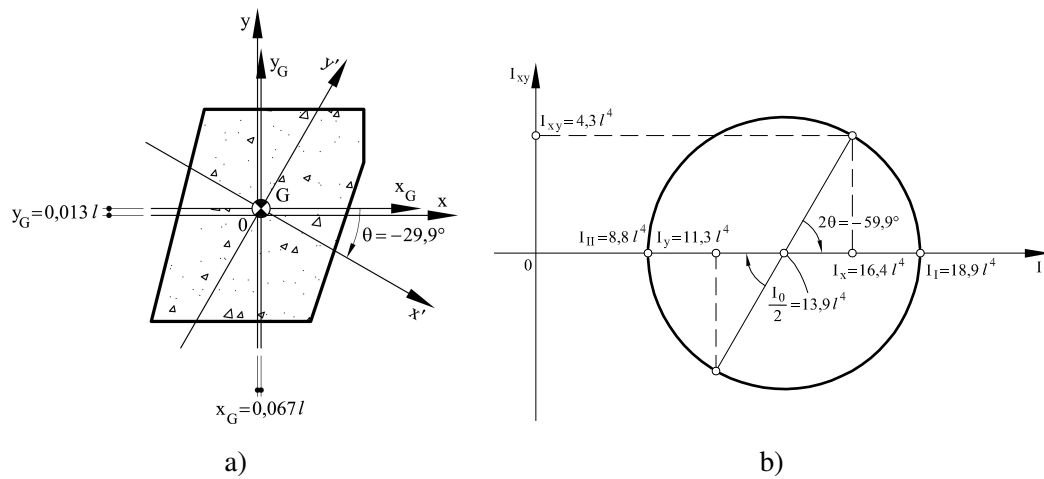


Figura 2.6: Problema 3: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.4. Problema 4

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.7a respecto de su centroide.

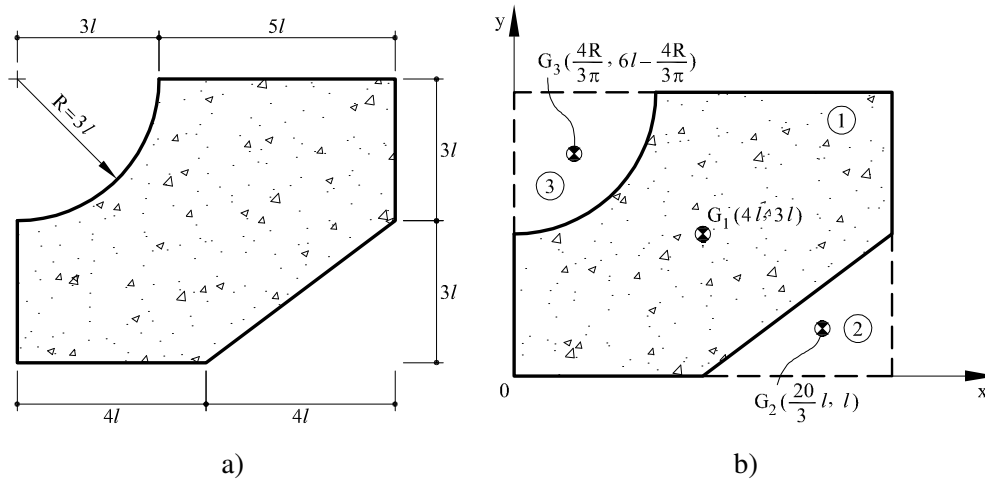


Figura 2.7: Problema 4: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.4.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Si se analiza la geometría de la sección propuesta, se observa como ésta se puede ver como una sección rectangular (1) a la cual se resta un triángulo (2) y un cuarto de círculo (3) como se muestra en la figura 2.7b. De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = (8l)(6l) = 48l^2 \quad (2.33a)$$

$$A^{(2)} = (4l)\left(\frac{3l}{2}\right) = 6l^2 \quad (2.33b)$$

$$A^{(3)} = \frac{1}{4}\pi(3l)^2 = 7,07l^2 \quad (2.33c)$$

$$A_T = A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = 34,93l^2 \quad (2.33d)$$

El valor de los momentos estáticos se calculan como:

$$M_x = A^{(1)}(3l) - A^{(2)}(l) - A^{(3)}\left(6l - \frac{4}{3\pi}(3l)\right) = 104,6l^3 \quad (2.34a)$$

$$M_y = A^{(1)}(4l) - A^{(2)}\left(8l - \frac{4l}{3}\right) - A^{(3)}\frac{4}{3\pi}(3l) = 143l^3 \quad (2.34b)$$

y la posición del centroide (que se muestra en la figura 2.8a) se obtiene como :

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 4,1 l \quad (2.35a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 3 l \quad (2.35b)$$

2.4.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calcula los momentos de inercia, I_x e I_y , el producto de inercia, I_{xy} y el momento polar, I_o , respecto a ejes que pasan por el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta.

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x se calcula restando a la inercia generada por el rectángulo, $I_x^{(1)}$, la que corresponde al triángulo, $I_x^{(2)}$ y al cuarto de círculo, $I_x^{(3)}$.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.7b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner). Observese que en el caso del cuarto de círculo es necesario aplicar la formula del transporte dos veces: primero desde el valor del momento de inercia calculado respecto del centro del círculo hacia el centroide del círculo y una segunda vez hacia el centroide de la sección compuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12}(8l)(6l)^3 + A^{(1)}(3l - y_g)^2 \quad (2.36a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{36}(4l)(3l)^3 + A^{(2)}(l - y_g)^2 \quad (2.36b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\pi(3l)^4\right) - A^{(3)}\left(\frac{4(3l)}{3\pi}\right)^2 + A^{(3)}\left(6l - \frac{4(3l)}{3\pi} - y_g\right)^2 \quad (2.36c)$$

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 91,4l^4 \quad (2.36d)$$

El cálculo de la inercia I_y sigue el mismo procedimiento, tal y como se muestra a continuación:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12}(6l)(8l)^3 + A^{(1)}(4l - x_g)^2 \quad (2.37a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{36}(3l)(4l)^3 + A^{(2)}\left(8l - \frac{4l}{3 - x_g}\right)^2 \quad (2.37b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\pi(3l)^4\right) - A^{(3)}\left(\frac{4 \cdot 3l}{3\pi}\right)^2 + A^{(3)}\left(\frac{4 \cdot 3l}{3\pi} - x_g\right)^2 \quad (2.37c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 150,7l^4 \quad (2.37d)$$

y de la misma manera, para el producto de inercia, I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)}(4l - x_g)(3l - y_g) \quad (2.38a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{72}(4l)^2(3l)^2 + A^{(2)}\left(8l - \frac{4l}{3} - x_g\right)(l - x_g) \quad (2.38b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = -\left[\frac{1}{8}(3l)^4 - A^{(3)}\left(\frac{4(3l)}{3\pi}\right)^2\right] + A^{(3)}\left(\frac{4(3l)}{3\pi} - x_g\right)\left(6l - \frac{4(3l)}{3\pi} - y_g\right) \quad (2.38c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 61,9l^4 \quad (2.38d)$$

Por último, para obtener el momento polar de inercia se debe sumar las inercias I_x e I_y .

$$I_0 = I_x + I_y = 242,16l^4 \quad (2.39)$$

2.4.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se puede apreciar en la figura 2.8b los momento principales de inercia (máximo y mínimo) se dan cuando el producto de inercia se anula ($I_{xy} = 0$), una situación que corresponde a la intersección del círculo Mohr con el eje horizontal.

El centro, I_m , y el radio, R , del círculo de Mohr se obtienen:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 121l^4 \quad (2.40a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 68,68l^4 \quad (2.40b)$$

de tal manera que los momento principales de inercia, I_{max} e I_{min} , resultan:

$$I_{max} = I_m + R = 189,7l^4 \quad (2.41a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 53,4l^4 \quad (2.41b)$$

Para finalizar, la rotación de ejes, θ , necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia (figura 2.8b) se calcula como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = 32,2^\circ \quad (2.42)$$

El resultado obtenido es positivo, dando lugar a una rotación de ejes en sentido antihorario, o bien (manteniendo los ejes fijos) a una rotación horaria de la sección.

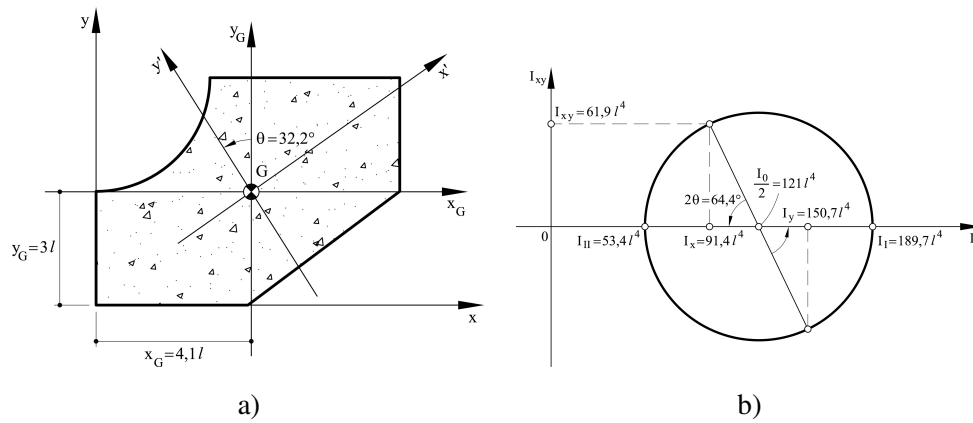


Figura 2.8: Problema 4: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.5. Problema 5

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.9a respecto de su centroide.

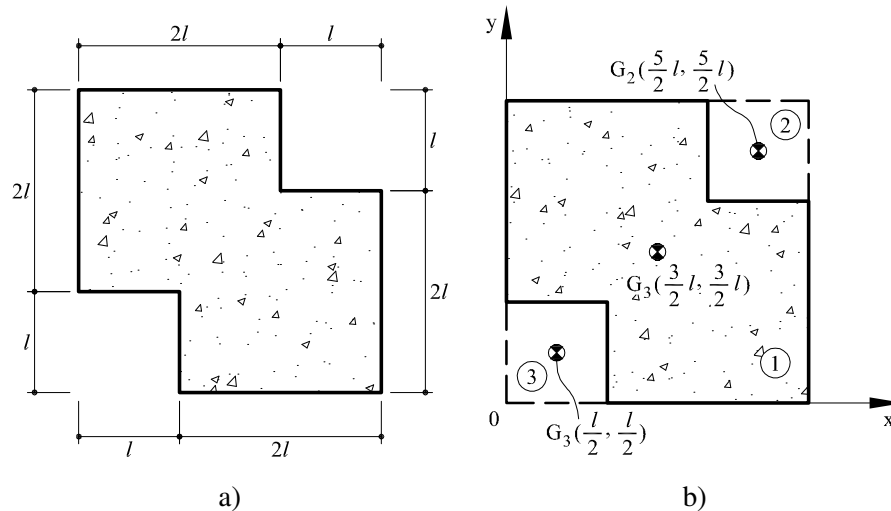


Figura 2.9: Problema 5: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.5.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Si se analiza la geometría de la sección propuesta, se observa como ésta se puede ver como una sección rectangular (1) a la cual se restan dos secciones cuadradas, (2) y (3), tal y como se muestra en la figura 2.9b. De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = (3l)(3l) = 9l^2 \quad (2.43a)$$

$$A^{(2)} = l^2 \quad (2.43b)$$

$$A^{(3)} = A^{(2)} = l^2 \quad (2.43c)$$

$$A_T = A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = 7l^2 \quad (2.43d)$$

Los momentos estáticos tienen el siguiente valor:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} \right) - A^{(2)} \left(2l + \frac{l}{2} \right) - A^{(3)} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{21l^3}{2} = 10,5l^3 \quad (2.44a)$$

$$M_y = A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} \right) - A^{(2)} \left(2l + \frac{l}{2} \right) - A^{(3)} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{21l^3}{2} = 10,5l^3 \quad (2.44b)$$

ya posición del centroide de la sección compuesta (vease figura 2.10a) es la siguiente:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = \frac{3l}{2} = 1,5l \quad (2.45a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{3l}{2} = 1,5l \quad (2.45b)$$

2.5.2. Cálculo de los momentos de inercia

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x se calcula restando a la inercia generada por el rectángulo, $I_x^{(1)}$, las que corresponden a los cuadrados, $I_x^{(2)}$ y $I_x^{(3)}$.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.9b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} (3l)^4 \quad (2.46a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(2)} \left(2l + \frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (2.46b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (2.46c)$$

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 4,58 l^4 \quad (2.46d)$$

El cálculo de la inercia I_y sigue el mismo procedimiento, tal y como se muestra a continuación:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} (3l)^4 + A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.47a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(2)} \left(2l + \frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.47b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.47c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 4,58 l^4 \quad (2.47d)$$

y de la misma manera, para el producto de inercia, I_{xy} (en este caso el primer termino es nulo por ser todas secciones simetricas):

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} - x_g \right) \left(\frac{3l}{2} - y_g \right) \quad (2.48a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(2l + \frac{l}{2} - x_g \right) \left(2l + \frac{l}{2} - y_g \right) \quad (2.48b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right) \cdot \left(\frac{l}{2} - y_g \right) \quad (2.48c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = -2l^4 \quad (2.48d)$$

Finalmente, el momento polar de inercia se calcula como suma de I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 9,16l^4 \quad (2.49)$$

2.5.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se puede apreciar en la figura 2.10b los momento principales de inercia inercias (máximo y mínimo) se dan cuando el producto de inercia se anula ($I_{xy} = 0$), una situación que corresponde a la intersección del círculo Mohr con el eje horizontal.

El centro, I_m , y el radio, R , del círculo de Mohr se obtienen:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{55l^4}{12} = 4,58l^4 \quad (2.50a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = 2l^4 \quad (2.50b)$$

Los momentos principales de inercia asumen los siguientes valores:

$$I_{max} = I_m + R = 6,58l^4 \quad (2.51a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 2,58l^4 \quad (2.51b)$$

Para finalizar, la rotación de ejes, θ , necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia (figura 2.10b) se calcula como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = -45^\circ \quad (2.52)$$

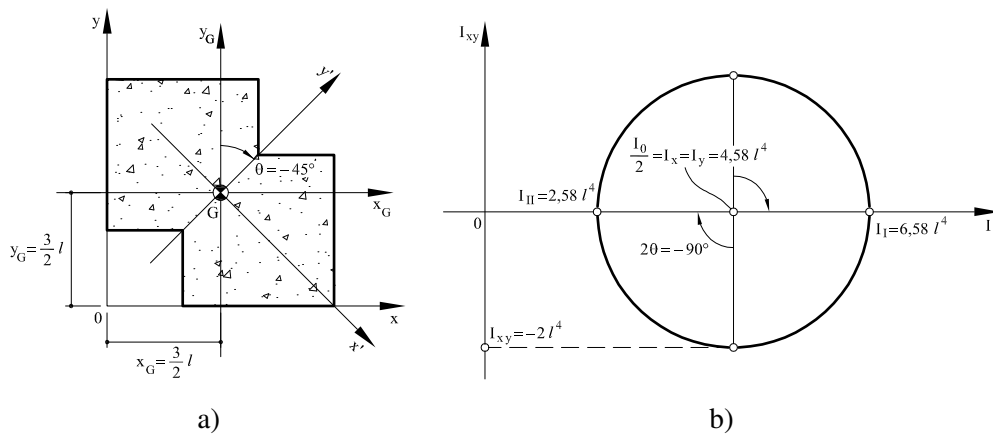


Figura 2.10: Problema 5: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.6. Problema 6

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.11a respecto de su centroide.

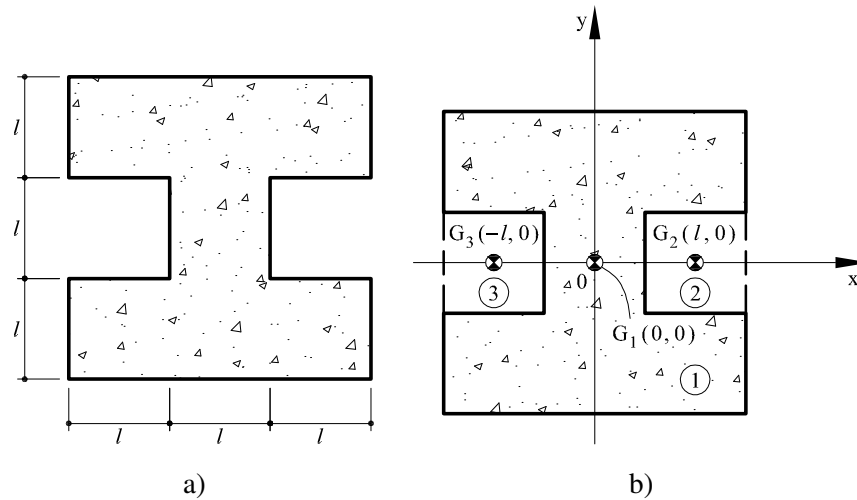


Figura 2.11: Problema 6: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.6.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Como se puede observar en la figura 2.11b la sección está definida por un cuadrado, (1), de lado $3l$ al cual se le han sacado otros dos cuadrados, (2) y (3), de lado l . De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = (3l)(3l) = 9l^2 \quad (2.53a)$$

$$A^{(2)} = l^2 \quad (2.53b)$$

$$A^{(3)} = A^{(2)} = l^2 \quad (2.53c)$$

$$A_T = A^{(1)} - A^{(2)} - A^{(3)} = 7l^2 \quad (2.53d)$$

El centroide se encuentra en la origen de los ejes elegidos debido a la doble simetría de la sección. Esto se puede verificar calculando los correspondientes momentos estatico de la sección,

M_x y M_y :

$$M_x = A^{(1)}(0) - A^{(2)}(0) - A^{(3)}(0) = 0 \quad (2.54a)$$

$$M_y = A^{(1)}(0) - A^{(2)}(l) - A^{(3)}(-l) = 0 \quad (2.54b)$$

así que resulta:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0 \quad (2.55a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 0 \quad (2.55b)$$

2.6.2. Cálculo de los momentos de inercia

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x se calcula restando a la inercia generada por el rectángulo, $I_x^{(1)}$, las que corresponden a los cuadrados, $I_x^{(2)}$ y $I_x^{(3)}$:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} (3l)^4 \quad (2.56a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} (l)^4 \quad (2.56b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} (l)^4 \quad (2.56c)$$

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 6,58 l^4 \quad (2.56d)$$

Para calcular la I_y se procede exactamente de la misma forma. En este caso, el momento de inercia, $I_y^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.11b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o fórmula del transporte de Steiner):

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} (3l)^4 \quad (2.57a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(2)} (l)^2 \quad (2.57b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12} (l)^4 + A^{(3)} (-l)^2 \quad (2.57c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 4,58 l^4 \quad (2.57d)$$

y de la misma manera, para el producto de inercia, I_{xy} (en este caso el primer término es nulo por ser todas secciones simétricas):

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + 0 \quad (2.58a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} (l) (0) \quad (2.58b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} (-l) \cdot (0) \quad (2.58c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 0 \quad (2.58d)$$

Observese que el resultado final es $I_{xy} = 0$ debido a la doble simetría de la sección compuesta propuesta. Finalmente, el momento polar de inercia, I_0 , se calcula sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 11,16 l^4 \quad (2.59)$$

2.6.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se vió en el apartado anterior el producto de inercia de la sección compuesta es nulo. Esto quiere decir que los ejes elegidos son también ejes principales de inercia, de tal manera que:

$$I_{max} = I_x = 6,58 l^4 \quad (2.60a)$$

$$I_{min} = I_y = 4,58 l^4 \quad (2.60b)$$

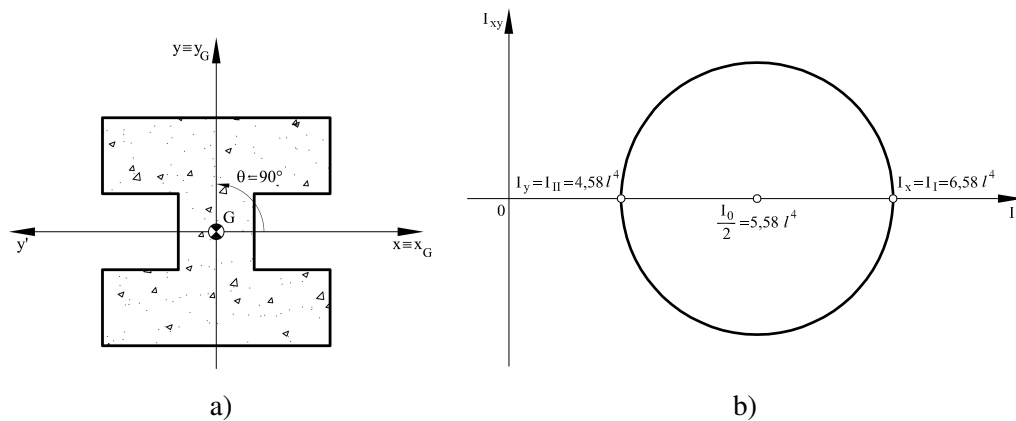


Figura 2.12: Problema 6: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.7. Problema 7

Calcular los momentos principales de inercia de la sección maciza representada en la figura 2.13a respecto de su centroide.

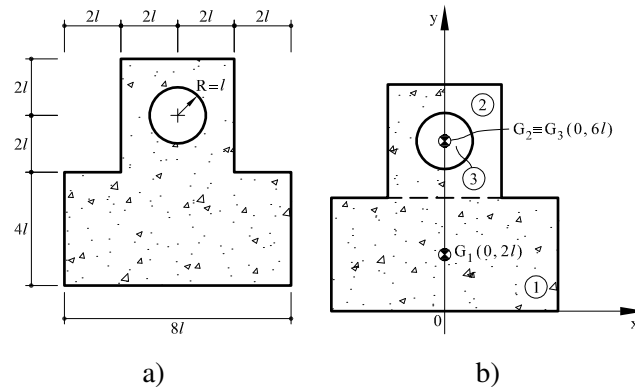


Figura 2.13: Problema 7: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece.

2.7.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Como se puede observar en la figura 2.13b la sección está compuesta por un rectángulo (1) y un cuadrado (2) a los cuales se le ha substraído el círculo (3). De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = (8l)(4l) = 32l^2 \quad (2.61a)$$

$$A^{(2)} = (4l)(4l) = 16l^2 \quad (2.61b)$$

$$A^{(3)} = \pi l^2 = \pi l^2 \quad (2.61c)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)} = 48l^2 - \pi l^2 = 44,86l^2 \quad (2.61d)$$

Los momentos estáticos de la sección compuesta resultan:

$$M_x = A^{(1)}(2l) - A^{(2)}(4l + 2l) - A^{(3)}(4l + 2l) = 160l^3 - 6\pi l^3 = 141,15l^3 \quad (2.62a)$$

$$M_y = 0 \quad (2.62b)$$

Por lo que la posición del centroide es la siguiente:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0 \quad (2.63a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{160l^3 - 6\pi l^3}{48l^2 - \pi l^2} = 3,14l \quad (2.63b)$$

2.7.2. Cálculo de los momentos de inercia

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x se calcula restando a la inercia generada por el rectángulo, $I_x^{(1)}$, las que corresponden a los cuadrados, $I_x^{(2)}$ y $I_x^{(3)}$.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.13b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} (8l) \cdot (4l)^3 + A^{(1)} (2l - y_g)^2 \quad (2.64a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} (4l)^4 + A^{(2)} (6l - y_g)^2 \quad (2.64b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{4} \pi (l)^4 + A^{(3)} (6l - y_g)^2 \quad (2.64c)$$

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = 210l^4 \quad (2.64d)$$

El cálculo de la inercia, I_y , sigue el mismo procedimiento, tal y como se muestra a continuación:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} (4l) \cdot (8l)^3 \quad (2.65a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} (4l)^4 \quad (2.65b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{4} \pi (l)^4 \quad (2.65c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = 191,2 l^4 \quad (2.65d)$$

El producto de inercia, I_{xy} , se anula por la simetría de la sección compuesta respecto del eje de ordenadas, como se muestra a continuación:

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} \cdot (0) \cdot (2l - y_g) \quad (2.66a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} (0) (6l - y_g) \quad (2.66b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} (0) \cdot (6l - y_g) \quad (2.66c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} - I_{xy}^{(3)} = 0 \quad (2.66d)$$

El cálculo del momento polar de inercia, I_0 , se obtiene sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 401,2l^4 \quad (2.67)$$

2.7.3. Cálculo de los Momentos Principales de Inercia

Como se vió en el apartado anterior el producto de inercia de la sección compuesta es nulo. Esto quiere decir que los ejes elegidos son también ejes principales de inercia (como se muestra en la figura 2.14), de tal manera que:

$$I_{max} = I_x = 210l^4 \quad (2.68a)$$

$$I_{min} = I_y = 191,2l^4 \quad (2.68b)$$

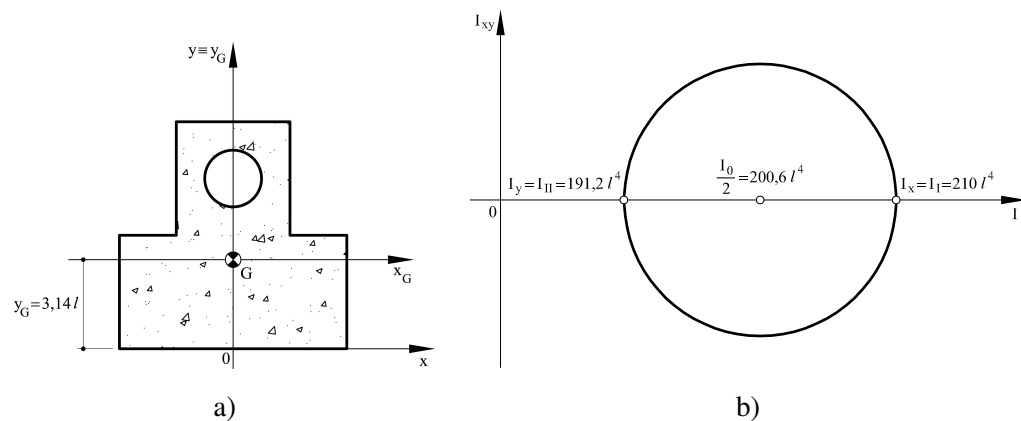


Figura 2.14: Problema 7: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.8. Problema 8

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.15a respecto de su centroide.

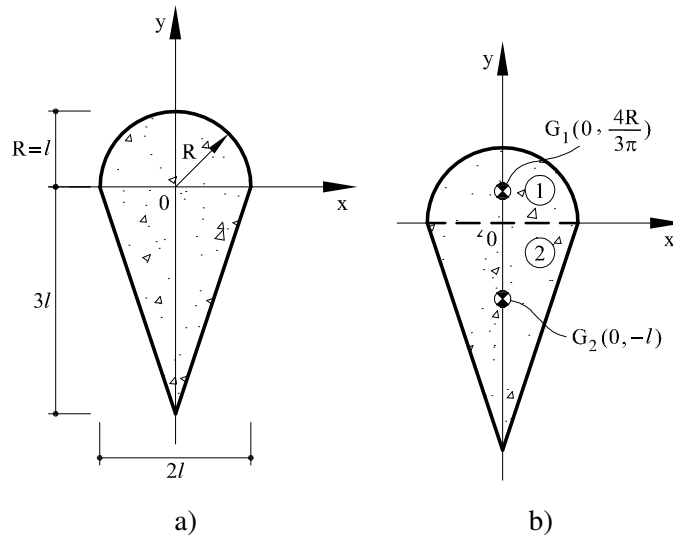


Figura 2.15: Problema 8: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.8.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Como se puede observar en la figura 2.15b la sección está compuesta por un semicírculo (1) y un triángulo (2). De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}\pi l^2 \quad (2.69a)$$

$$A^{(2)} = \frac{(3l)(2l)}{2} \quad (2.69b)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} = \frac{\pi l^2}{2} + 3l^2 = 4,57l^2 \quad (2.69c)$$

El valor de los momentos estáticos se obtienen con las siguientes expresiones:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right) + A^{(2)} (-l) = -2,3 l^3 \quad (2.70a)$$

$$M_y = 0 \quad (2.70b)$$

de tal manera que la posición del centroide es:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0 \quad (2.71a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = -0,51l \quad (2.71b)$$

2.8.2. Cálculo de los momentos de inercia

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x , se calcula sumando a la inercia generada por el semicírculo, $I_x^{(1)}$, la que corresponde al triángulo, $I_x^{(2)}$.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada sección del despiece se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.15b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) - A^{(1)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(1)} \left(\frac{4l}{3\pi} - y_g \right)^2 \quad (2.72a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{36} (2l) (3l)^3 + A^{(2)} (-l - y_g)^2 \quad (2.72b)$$

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 3,7 l^4 \quad (2.72c)$$

El cálculo de la inercia, I_y , sigue el mismo procedimiento, tal y como se muestra a continuación:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) + 0 = \frac{\pi l^4}{8} \quad (2.73a)$$

$$I_y^{(2)} = 2 \left[\frac{1}{36} (3l) l^3 + \frac{A^{(2)}}{2} \left(\frac{l}{3} \right)^2 \right] = \frac{l^4}{2} \quad (2.73b)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 0,9 l^4 \quad (2.73c)$$

El producto de inercia, $I_{xy} = 0$ por la simetría de la sección compuesta respecto del eje de ordenadas. Finalmente, el valor del momento polar de inercia se obtiene:

$$I_0 = I_x + I_y = 4,6 l^4 \quad (2.74)$$

2.8.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se vió en el apartado anterior el producto de inercia de la sección compuesta es nulo. Esto quiere decir que los ejes elegidos son también ejes principales de inercia (como se muestra en la figura 2.16), de tal manera que:

$$I_{max} = I_x = 3,7 l^4 \quad (2.75a)$$

$$I_{min} = I_y = 0,9 l^4 \quad (2.75b)$$

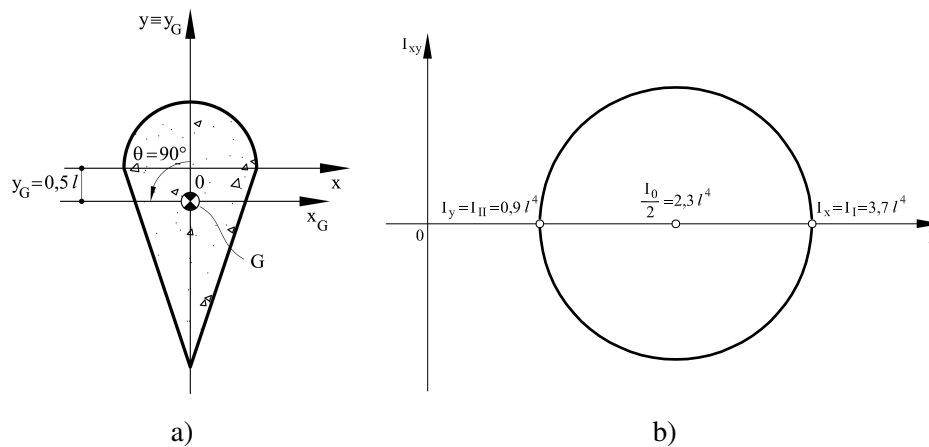


Figura 2.16: Problema 8: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.9. Problema 9

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.17a respecto de su centroide.

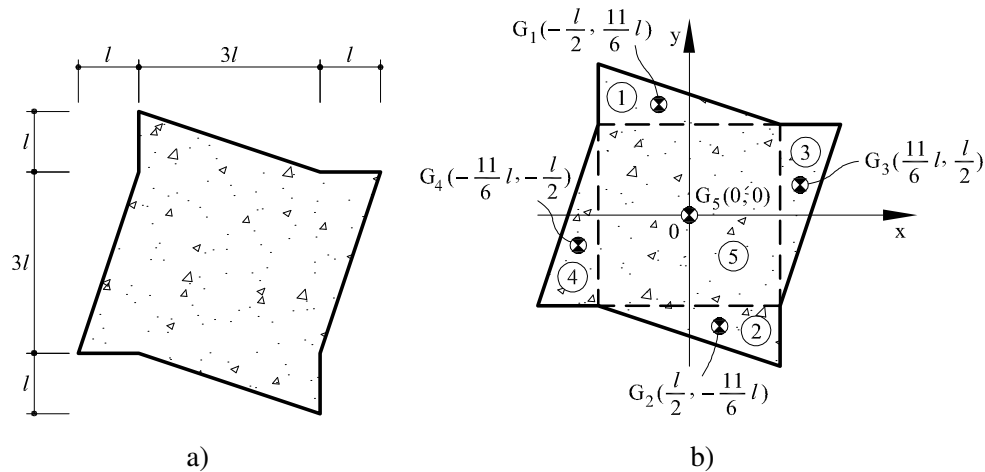


Figura 2.17: Problema 9: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.9.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Para resolver el problema primero se procede al despiece de la sección en un cuadrado (5) y cuatro triángulos (1), (2), (3) y (4) tal y como se muestra en la figura 2.17b. De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = \frac{3l^2}{2} \quad (2.76a)$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} = \frac{3l^2}{2} \quad (2.76b)$$

$$A^{(3)} = A^{(1)} = \frac{3l^2}{2} \quad (2.76c)$$

$$A^{(4)} = A^{(1)} = \frac{3l^2}{2} \quad (2.76d)$$

$$A^{(5)} = 9l^2 \quad (2.76e)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} + A^{(5)} = 15l^2 \quad (2.76f)$$

La posición del centroide coincide con la origen de los ejes elegidos debido a la simetría de la sección. Este resultado lo podemos comprobar verificando como se anulan ambos momentos estáticos:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right) + A^{(2)} \left(\frac{-3l}{2} - \frac{l}{3} \right) + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} - 1 \right) + A^{(4)} \left(\frac{-3l}{2} + 1 \right) + A^{(5)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right)$$

$$M_y = A^{(1)} \left(\frac{-3l}{2} + 1 \right) + A^{(2)} \left(\frac{-3l}{2} - l \right) + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{1}{3} \right) + A^{(4)} \left(\frac{-3l}{2} - \frac{l}{3} \right) + A^{(5)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right)$$

de tal manera que:

$$x_g = \frac{M_y}{A} = 0 \quad (2.78a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 0 \quad (2.78b)$$

2.9.2. Cálculo de los momentos de inercia

El momento de inercia de la sección compuesta, I_x se calcula sumando a la inercia generada por el cuadrado, $I_x^{(5)}$, las que corresponden a los cuatro triángulos, $I_x^{(1)}$, $I_x^{(2)}$, $I_x^{(3)}$ y $I_x^{(4)}$.

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, de cada triángulo se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.17b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{36} 3l(l)^3 + A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right)^2 = \frac{41l^4}{8} \quad (2.79a)$$

$$I_x^{(2)} = I_x^{(1)} = \frac{41l^4}{8} \quad (2.79b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{36} l(3l)^3 + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} - 1 \right)^2 = \frac{9l^4}{8} \quad (2.79c)$$

$$I_x^{(4)} = I_x^{(3)} = \frac{9l^4}{8} \quad (2.79d)$$

$$I_x^{(5)} = \frac{1}{12} (3l)^4 = \frac{27l^4}{4} \quad (2.79e)$$

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} + I_x^{(5)} = \frac{77l^4}{4} = 19,25 l^4 \quad (2.79f)$$

Con un procedimiento análogo se calcula el momento de inercia, I_y y el producto de inercia, I_{xy} :

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{36} l(3l)^3 + A^{(1)} \left(\frac{-3l}{2} - 1 \right)^2 = \frac{9l^4}{8} \quad (2.80a)$$

$$I_y^{(2)} = I_y^{(1)} = \frac{9l^4}{8} \quad (2.80b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{36} (3l)l^3 + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right)^2 = \frac{41l^4}{8} \quad (2.80c)$$

$$I_y^{(4)} = I_y^{(3)} = \frac{41l^4}{8} \quad (2.80d)$$

$$I_y^{(5)} = \frac{1}{12} (3l)^4 = \frac{27l^4}{4} \quad (2.80e)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} + I_y^{(5)} = \frac{77l^4}{4} = 19,25 l^4 \quad (2.80f)$$

Es importante observar que por razones de simetría resulta: $I_y = I_x$ y como se demuestra a continuación: $I_{xy} = 0$.

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{-1}{72} (3l)^2 l^2 + A^{(1)} \left(\frac{-3l}{2} + 1 \right) \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right) = -\frac{3l^4}{2} \quad (2.81a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{-1}{72} (3l)^2 l^2 + A^{(2)} \left(\frac{3l}{2} - 1 \right) \left(\frac{-3l}{2} - \frac{l}{3} \right) = -\frac{3l^4}{2} \quad (2.81b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = \frac{1}{72} l^2 (3l)^2 + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} + \frac{l}{3} \right) \left(\frac{3l}{2} - 1 \right) = \frac{3l^4}{2} \quad (2.81c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = \frac{1}{72} l^2 (3l)^2 + A^{(4)} \left(\frac{-3l}{2} - \frac{l}{3} \right) \left(\frac{-3l}{2} + 1 \right) = \frac{3l^4}{2} \quad (2.81d)$$

$$I_{xy}^{(5)} = 0 \quad (2.81e)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} + I_{xy}^{(5)} = 0 \quad (2.81f)$$

El momento de inercia polar se calcula como la suma de I_x e I_y .

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{77l^4}{2} = 38,5 l^4 \quad (2.82)$$

2.9.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

Como se vió en el apartado anterior el producto de inercia de la sección compuesta es nulo. Además tenemos que $I_x = I_y$ de tal manera que el círculo de Mohr se reduce a un punto como

se muestra en la figura 2.18b. Esto significa que los ejes elegidos son principales de inercia y los momentos principales de inercia tienen el mismo valor:

$$I_{max} = I_{min} = I_x = I_y = 19,25 \text{ l}^4 \quad (2.83)$$

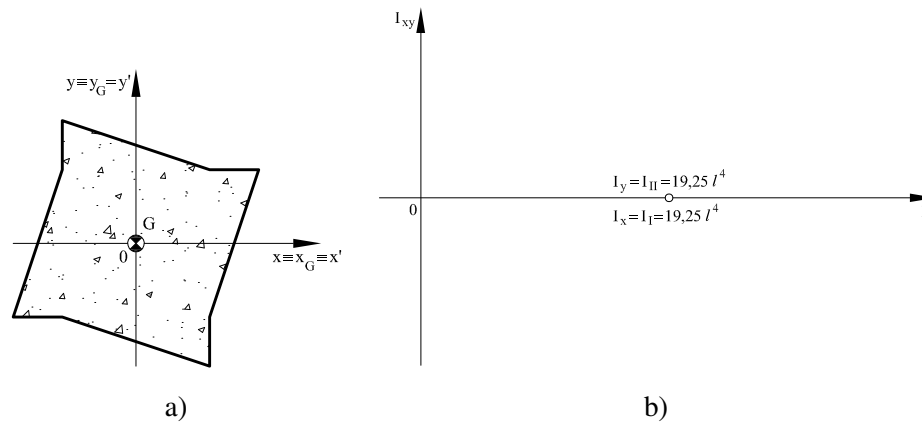


Figura 2.18: Problema 9: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

2.10. Problema 10

Calcular los momentos principales de inercia de la sección compuesta representada en la figura 2.19a respecto de su centroide.

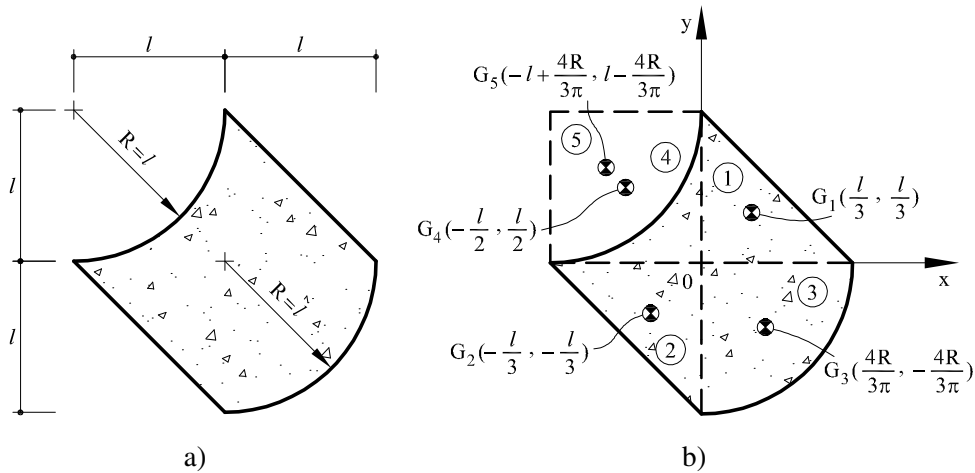


Figura 2.19: Problema 10: (a) Sección compuesta propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

2.10.1. Cálculo del área y del centroide de la sección compuesta

Para resolver el problema primero se procede al despiece de la sección en dos triángulos (1) y (2) a los cuales sumamos un cuarto de círculo (3) y una última sección que calculamos como un cuadrado (4) menos el cuarto de círculo (5), tal y como se muestra en la figura 2.19b. De esta forma, el área de la sección compuesta, A_T , resulta:

$$A^{(1)} = \frac{l^2}{2} \quad (2.84a)$$

$$A^{(2)} = \frac{l^2}{2} \quad (2.84b)$$

$$A^{(3)} = \frac{\pi l^2}{4} \quad (2.84c)$$

$$A^{(4)} = l^2 \quad (2.84d)$$

$$A^{(5)} = \frac{\pi l^2}{4} \quad (2.84e)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} - A^{(5)} = 2l^2 \quad (2.84f)$$

Para situar el centroide, se debe calcular los momentos estáticos de la sección:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{l}{3} \right) + A^{(2)} \left(-\frac{l}{3} \right) + A^{(3)} \left(-\frac{4l}{3\pi} \right) + A^{(4)} \left(\frac{l}{2} \right) - A^{(5)} \left(l - \frac{4l}{3\pi} \right) = -0,28.83a$$

$$M_y = A^{(1)} \left(\frac{l}{3} \right) + A^{(2)} \left(-\frac{l}{3} \right) + A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right) + A^{(4)} \left(-\frac{l}{2} \right) - A^{(5)} \left(-l + \frac{4l}{3\pi} \right) = 0,28.83b$$

La posición del centro de masas resultante es la siguiente:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0,14 l \quad (2.86a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = -0,14 l \quad (2.86b)$$

2.10.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calculan los momentos de inercia, I_x e I_y , el producto de inercia, I_{xy} , y el momento polar de inercia, I_o , respecto a los ejes que pasan por el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta.

Según el despiece propuesto, el momento de inercia I_x se consigue sumando las contribuciones de todas las secciones que forman el área compuesta. En particular, cada momento de inercia, $I_x^{(i)}$, se obtiene sumando dos términos: el primero corresponde al valor del momento de inercia respecto a unos ejes que pasan por su propio centroide, $G^{(i)}$ (vease figura 2.19b), mientras el segundo término corresponde al valor del transporte hacia el centroide (x_g, y_g) de la sección compuesta (teorema de los ejes paralelos o formula del transporte de Steiner):

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{36} l (l)^3 + A^{(1)} \left(\frac{l}{3} - y_g \right)^2 \quad (2.87a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{36} l (l)^3 + A^{(2)} \left(-\frac{l}{3} - y_g \right)^2 \quad (2.87b)$$

$$I_x^{(3)} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) - A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(3)} \left(-\frac{4l}{3\pi} - y_g \right)^2 \quad (2.87c)$$

$$I_x^{(4)} = \frac{1}{12} l^4 + A^{(4)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (2.87d)$$

$$I_x^{(5)} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) - A^{(5)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(5)} \left(l - \frac{4l}{3\pi} - y_g \right)^2 \quad (2.87e)$$

de tal manera que el valor de I_x , resulta:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} - I_x^{(5)} = 0,34 l^4 \quad (2.88)$$

Observese que en el caso del cuarto de círculo es necesario aplicar la formula del transporte dos veces: primero desde el valor del momento de inercia calculado respecto del centro del círculo hacia el centroide del círculo; y una segunda vez hacia el centroide de la sección compuesta:

De forma similar el momento de inercia, I_y se calcula como:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{36}(l) l^3 + A^{(1)} \left(\frac{l}{3} - x_g \right)^2 \quad (2.89a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{36}(l) l^3 + A^{(2)} \left(-\frac{l}{3} - x_g \right)^2 \quad (2.89b)$$

$$I_y^{(3)} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) - A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} - x_g \right)^2 \quad (2.89c)$$

$$I_y^{(4)} = \frac{1}{12}(l)^4 + A^{(4)} \left(-\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (2.89d)$$

$$I_y^{(5)} = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \pi l^4 \right) - A^{(5)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(5)} \left(-l + \frac{4l}{3\pi} - x_g \right)^2 \quad (2.89e)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} - I_y^{(5)} = 0,34 l \quad (2.89f)$$

Siguiendo exactamente el mismo proceso, el producto de inercia, I_{xy} , resulta:

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{72} l^2 l^2 + A^{(1)} \left(\frac{l}{3} - x_g \right) \left(\frac{l}{3} - y_g \right) \quad (2.90a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = -\frac{1}{72} l^2 l^2 + A^{(2)} \left(-\frac{l}{3} - x_g \right) \left(-\frac{l}{3} - y_g \right) \quad (2.90b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = -\left[\frac{1}{8} l^4 - A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(3)} \left(\frac{4l}{3\pi} - x_g \right) \left(l - \frac{4l}{3\pi} - y_g \right) \quad (2.90c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = A^{(4)} \left(-\frac{l}{2} - x_g \right) \left(\frac{l}{2} - y_g \right) \quad (2.90d)$$

$$I_{xy}^{(5)} = -\left[\frac{1}{8} l^4 - A^{(5)} \left(\frac{4l}{3\pi} \right)^2 \right] + A^{(5)} \left(-l + \frac{4l}{3\pi} - x_g \right) \left(l - \frac{4l}{3\pi} - y_g \right) \quad (2.90e)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} - I_{xy}^{(5)} = -0,0072 l^4 \quad (2.90f)$$

Finalmente, para calcular el momento polar de inercia, I_o , hay que sumar los valores de I_x e I_y :

$$I_o = I_x + I_y = 0,68 l^4 \quad (2.91)$$

2.10.3. Cálculo de los Momentos Principales de Inercia

Como se puede apreciar en la figura 2.20b los momentos principales de inercia (máximo y mínimo) se dan cuando el producto de inercia se anula ($I_{xy} = 0$), una situación que corresponde a la intersección del círculo Mohr con el eje horizontal.

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr se obtienen:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 0,34 l^4 \quad (2.92a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 0,0072 l^4 \quad (2.92b)$$

Los momentos principales de inercia asumen los siguientes valores:

$$I_{max} = I_m + R = 0,347 l^4 \quad (2.93a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 0,333 l^4 \quad (2.93b)$$

Para finalizar, la rotación de ejes, θ , necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia (vease figura 2.20) se calcula como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = -45^\circ \quad (2.94)$$

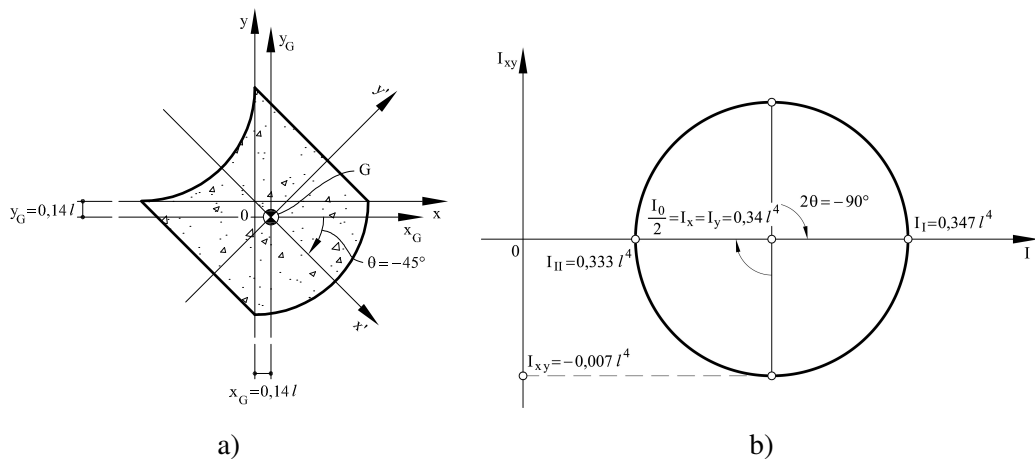


Figura 2.20: Problema 10: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Círculo de Mohr.

Secciones de pared delgada

3.1. Problema 1

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.1a respecto de su centroide.

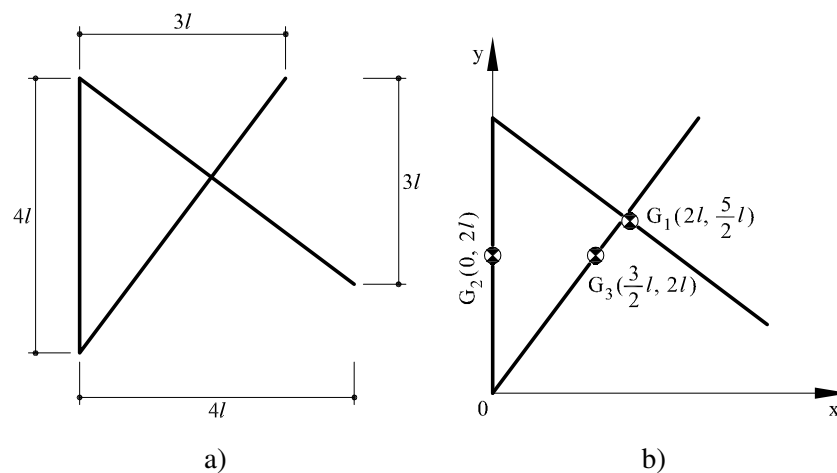


Figura 3.1: Problema 1: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.1.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

El primer paso para la solución del problema consiste en el despiece de la sección original en tres áreas rectangulares de pared delgada, como se muestra en la figura 3.1b. Se procede al cálculo del área de cada rectángulo que forma la sección:

$$A^{(1)} = 5tl \quad (3.1a)$$

$$A^{(2)} = 4tl \quad (3.1b)$$

$$A^{(3)} = 5tl \quad (3.1c)$$

El área total, A_T , se obtiene sumando las diferentes contribuciones obtenidas con el despiece:

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = 14tl \quad (3.2)$$

Los momentos estáticos, M_x y M_y , se calculan de forma análoga en función de la posición de los centroides de los diferentes rectángulos que forman la sección propuesta respecto de los ejes cartesianos de referencia que se muestran en la figura 3.1b:

$$M_x = A^{(1)}\left(\frac{3l}{2} + l\right) + A^{(2)}(2l) + A^{(3)}(2l) = \frac{61}{2}tl^2 = 30,5tl^2 \quad (3.3a)$$

$$M_y = A^{(1)}(2l) + A^{(2)}(0) + A^{(3)}\left(\frac{3l}{2}\right) = \frac{35}{2}tl^2 = 17,5tl^2 \quad (3.3b)$$

Finalmente, la posición del centroide de la sección (vease figura 3.2a) se obtiene como:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 1,25l \quad (3.4a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 2,18l \quad (3.4b)$$

3.1.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.2a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.1b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(1)}(3l)^2 + A^{(1)}\left(\frac{3l}{2} + l - y_g\right)^2 \quad (3.5a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(4l)^2 + A^{(2)}(2l - y_g)^2 \quad (3.5b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12}A^{(3)}(4l)^2 + A^{(3)}(2l - y_g)^2 \quad (3.5c)$$

de tal manera que el momento de inercia, I_x , sumando las diferentes contribuciones del despiece:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 16,5tl^3 \quad (3.6)$$

De forma análoga se procede con el cálculo de los momento de inercia, $I_y^{(i)}$:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(1)}(4l)^2 + A^{(1)}(2l - x_g)^2 \quad (3.7a)$$

$$I_y^{(2)} = 0 + A^{(2)}(-x_g)^2 \quad (3.7b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12}A^{(3)}(3l)^2 + A^{(3)}\left(\frac{3l}{2} - x_g\right)^2 \quad (3.7c)$$

y del correspondiente momento de inercia, I_y , de la sección:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 19,8 tl^3 \quad (3.8)$$

A continuación se calculan las diferentes contribuciones, $I_{xy}^{(i)}$, necesarias para el cálculo del producto de inercia, I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{12}A^{(1)}(4l)(3l) + A^{(1)}(2l - x_g)\left(\frac{3l}{2} + 1 - y_g\right) \quad (3.9a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)}(-x_g)(2l - y_g) \quad (3.9b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = \frac{1}{12}A^{(3)}(3l)(4l) + A^{(3)}\left(\frac{3l}{2} - x_g\right)(2l - y_g) \quad (3.9c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = 1,87 tl^3 \quad (3.9d)$$

Finalmente, el momento polar de inercia, I_o , calculado con respecto al centroide de la sección (polo), se obtiene sumando de los momento de inercia inercias I_x y I_y :

$$I_o = I_x + I_y = 36,3 tl^3 \quad (3.10)$$

3.1.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.2b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar en esta figura los momentos principales de inercia se obtienen cuando se anula el producto de inercia. El centro del círculo de Mohr está definido por el momento de inercia medio, I_m :

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 18,2 tl^3 \quad (3.11)$$

mientras su radio, R , se puede calcular como:

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 2,47 tl^3 \quad (3.12)$$

Los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se encuentran en los extremos del diámetro horizontal ($I_{xy} = 0$) y se calculan fácilmente como:

$$I_{max} = I_m + R = 20,6tl^3 \quad (3.13a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 15,7tl^3 \quad (3.13b)$$

El círculo de Mohr nos indica además la rotación de ejes necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia como se muestra en las figuras 3.2a-b. En el plano de Mohr, las rotaciones (positivas en sentido *antihorario*) corresponden a *dos veces* el valor del ángulo, θ , necesario para que los ejes originales de la sección, (x, y) , coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') . Esta rotación se puede calcular como:

$$\theta = 0,5 \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = 24,6^\circ \quad (3.14)$$

Finalmente, se puede observar que, en lugar de mover los ejes de referencia y mantener fija la posición de la sección, se consigue el mismo resultado manteniendo los ejes de referencia fijos y rotando la sección en sentido *horario*.

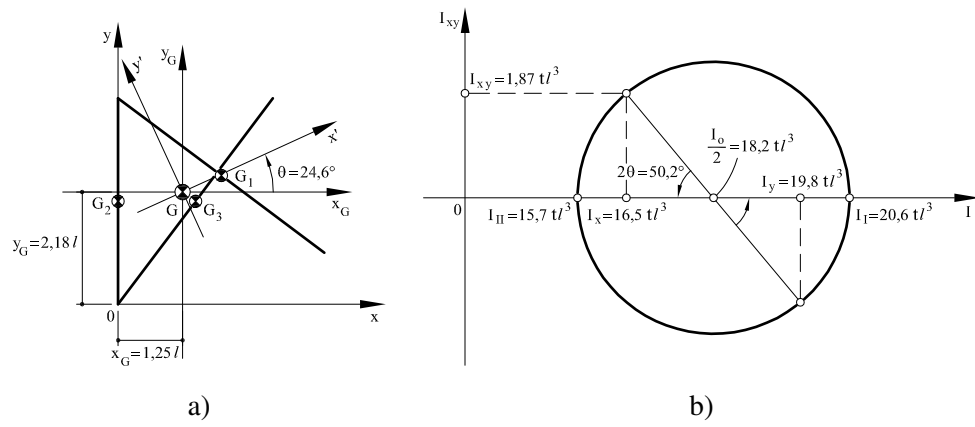


Figura 3.2: Problema 1: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.2. Problema 2

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.3a respecto de su centroide.

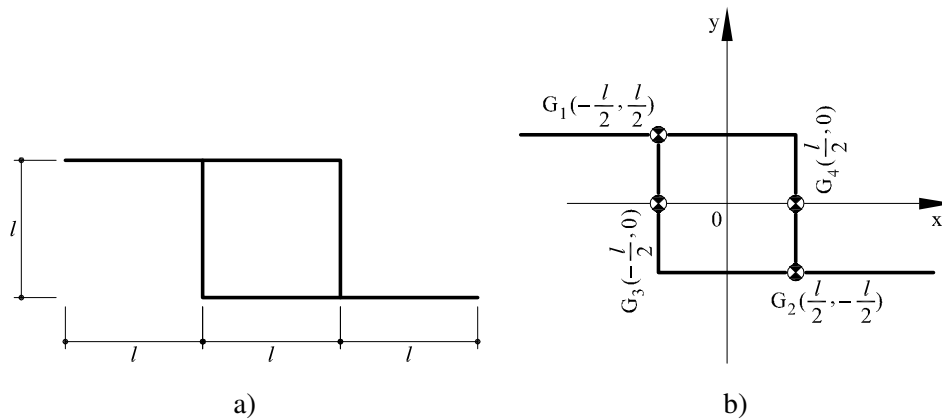


Figura 3.3: Problema 2: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.2.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

Para la resolución del problema planteado, se procederá en primer lugar al despiece de la sección en cuatro áreas rectangulares tal y como se muestra en la 3.3b. Las áreas de los diferentes rectángulos valen:

$$A^{(1)} = 2tl \quad (3.15a)$$

$$A^{(2)} = 2tl \quad (3.15b)$$

$$A^{(3)} = tl \quad (3.15c)$$

$$A^{(4)} = tl \quad (3.15d)$$

Por un lado, el área total, A_T , se obtiene sumando las diferentes contribuciones obtenidas en el despiece:

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} = 14tl \quad (3.16)$$

Por otro lado, debido a la simetría, el centroide coincide con el origen de los ejes elegidos, que se muestran en la misma figura 3.3b.

3.2.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.4a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.3b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = 0 + A^{(1)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{tl^3}{2} \quad (3.17a)$$

$$I_x^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(\frac{-l}{2} \right)^2 = \frac{tl^3}{2} \quad (3.17b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} l^2 = \frac{tl^3}{12} \quad (3.17c)$$

$$I_x^{(4)} = \frac{1}{12} A^{(4)} l^2 = \frac{tl^3}{12} \quad (3.17d)$$

Se puede observar como en el caso de secciones horizontales (1) y (2), solo se considera el término de transporte. El momento de inercia, I_x , de la sección resultante es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = \frac{7tl^3}{6} = 1,16tl^3 \quad (3.18)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y . En este caso son la secciones verticales (3) y (4), las que se calculan utilizando sólo el término de transporte:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (2l)^2 + A^{(1)} \left(-\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{7tl^3}{6} \quad (3.19a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (2l)^2 + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{7tl^3}{6} \quad (3.19b)$$

$$I_y^{(3)} = 0 + A^{(3)} \left(-\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{tl^3}{4} \quad (3.19c)$$

$$I_y^{(4)} = 0 + A^{(4)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{tl^3}{4} \quad (3.19d)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} = \frac{17}{6} tl^3 = 2,84tl^3 \quad (3.19e)$$

A continuación se calculan las diferentes contribuciones, $I_{xy}^{(i)}$, necesarias para el cálculo del producto de inercia, I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} \left(\frac{-l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{tl^3}{2} \quad (3.20a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(\frac{-l}{2} \right) \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{tl^3}{2} \quad (3.20b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} \left(-\frac{l}{2} \right) \cdot 0 = 0 \quad (3.20c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = 0 + A^{(4)} \left(\frac{l}{2} \right) \cdot 0 = 0 \quad (3.20d)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} = -tl^3 \quad (3.20e)$$

Finalmente, el momento polar de inercia, I_0 , calculado respecto al centroide de la sección (polo), se consigue sumando los valores de I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 4tl^3 \quad (3.21)$$

3.2.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.4b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar, los momentos principales de inercia se obtienen cuando el producto de inercia, I_{xy} , se anula.

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr se calculan como:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 2tl^3 \quad (3.22a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{\sqrt{61}tl^3}{6} = 1,3tl^3 \quad (3.22b)$$

de tal manera que los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se calculan fácilmente como:

$$I_{max} = I_m + R = 3,3tl^3 \quad (3.23a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 0,67tl^3 \quad (3.23b)$$

El Círculo de Mohr también nos indica la rotación de ejes necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia como se muestra en la figura 3.4a. En el plano de Mohr las rotaciones (positivas en sentido *antihorario*) corresponden a *dos veces* el valor del ángulo, θ ,

necesario para que los ejes originales de la sección, (x, y) , coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') . Esta rotación se puede calcular como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = -25^\circ \quad (3.24)$$

Finalmente, es interesante observar que, manteniendo los ejes de referencia fijos, podemos girar la sección, según sus ejes principales de inercia, aplicando una rotación, θ , positiva *horaria*.

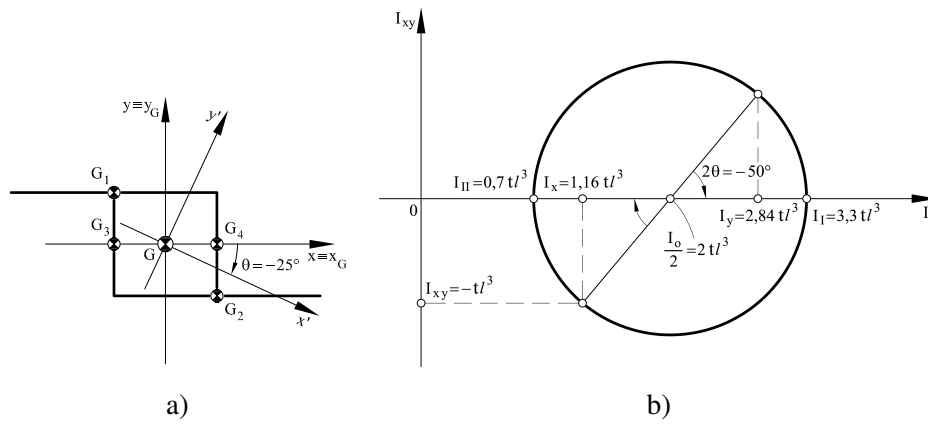


Figura 3.4: Problema 2: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.3. Problema 3

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.5a respecto de su centroide.

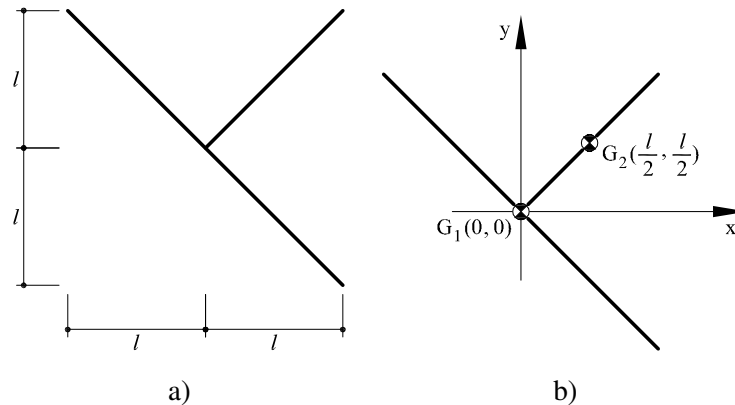


Figura 3.5: Problema 3: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.3.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

Para facilitar la resolución del problema planteado, se procede al despiece de la sección en dos rectángulos, tal y como se observa en la figura 3.5b.

En primer lugar, se calcula el área de cada rectángulo y el de la sección global:

$$A^{(1)} = 2tl\sqrt{2} \quad (3.25a)$$

$$A^{(2)} = tl\sqrt{2} \quad (3.25b)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} = 3\sqrt{2}tl \quad (3.25c)$$

Para situar el centroide de la sección, se calculan previamente los momentos estáticos, M_x y M_y , respecto a los ejes de referencia representados en la figura 3.5b:

$$M_x = \frac{A^{(2)}l}{2} = \frac{tl^2\sqrt{2}}{2} = 0,71tl^2 \quad (3.26a)$$

$$M_y = \frac{A^{(2)}l}{2} = \frac{tl^2\sqrt{2}}{2} = 0,71tl^2 \quad (3.26b)$$

de tal manera que el centroide se situa en (vease figura 3.6a):

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = \frac{l}{6} = 0,1667l \quad (3.27a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{l}{6} = 0,1667l \quad (3.27b)$$

3.3.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.6a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los dos rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura figura 3.5b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(1)}(2l)^2 + A^{(1)}(-y_g)^2 \quad (3.28a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}l^2 + A^{(2)}\left(\frac{l}{2} - y_g\right)^2 \quad (3.28b)$$

El valor total del momento de inercia, I_x , se calcula como la suma de las inercias parciales, $I_x^{(i)}$:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = 1,3tl^3 \quad (3.29)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y :

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(1)}(2l)^2 + A^{(1)}(-x_g)^2 \quad (3.30a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}l^2 + A^{(2)}\left(\frac{l}{2} - x_g\right)^2 \quad (3.30b)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 1,2964tl^3 \quad (3.30c)$$

y del producto de inercia I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{12}A^{(1)}(2l)(2l) + A^{(1)}(-x_g)(-y_g) \quad (3.31a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(l)(l) + A^{(2)}\left(\frac{l}{2} - x_g\right)\left(\frac{l}{2} - y_g\right) \quad (3.31b)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} = -0,6tl^3 \quad (3.31c)$$

Finalmente, el valor del momento polar de inercia, I_0 , se obtiene sumando los momentos de inercia, I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 2,6tl^3 \quad (3.32a)$$

3.3.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.6b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar, los momentos principales de inercia se obtienen cuando el producto de inercia, I_{xy} , se anula.

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr se calculan como:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 1,3tl^3 \quad (3.33a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 0,6tl^3 \quad (3.33b)$$

de tal manera que los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se calculan fácilmente como:

$$I_{max} = I_m + R = 1,9tl^3 \quad (3.34a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 0,7tl^3 \quad (3.34b)$$

El Círculo de Mohr también nos indica la rotación de ejes necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia, como se muestra en la figura 3.6a. En el plano de Mohr las rotaciones (positivas en sentido *antihorario*) corresponden a *dos veces* el valor del ángulo, θ , necesario para que los ejes originales de la sección, (x, y) , coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') . Esta rotación se puede calcular como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = -45^\circ \quad (3.35)$$

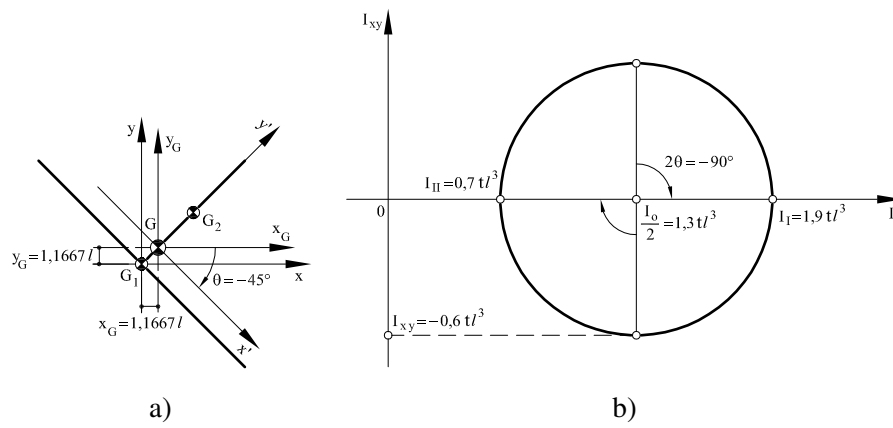


Figura 3.6: Problema 3: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.4. Problema 4

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.7a respecto de su centroide.

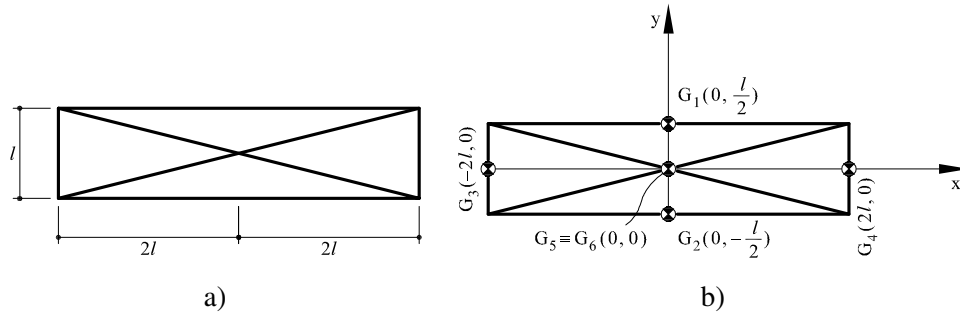


Figura 3.7: Problema 4: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.4.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

El primer paso a realizar en la resolución del problema planteado consiste en separar la sección en diferentes áreas rectangulares como se muestra en la figura 3.7b. El área de la sección delgada propuesta resulta:

$$A^{(1)} = 4tl \quad (3.36a)$$

$$A^{(2)} = 4tl \quad (3.36b)$$

$$A^{(3)} = tl \quad (3.36c)$$

$$A^{(4)} = tl \quad (3.36d)$$

$$A^{(5)} = \sqrt{17} tl \quad (3.36e)$$

$$A^{(6)} = \sqrt{17} tl \quad (3.36f)$$

$$A_T = 18,24 tl \quad (3.36g)$$

Por razones de simetría el centroide de la sección coincide con el origen de los ejes de referencia.

3.4.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.8a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.7b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = 0 + A^{(1)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 = tl^3 \quad (3.37a)$$

$$I_x^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(-\frac{l}{2} \right)^2 = tl^3 \quad (3.37b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} l^2 + 0 = \frac{1}{12} tl^3 \quad (3.37c)$$

$$I_x^{(4)} = I_x^{(3)} = \frac{1}{12} tl^3 \quad (3.37d)$$

$$I_x^{(5)} = \frac{1}{12} A^{(5)} l^2 + 0 = \frac{\sqrt{17}}{12} tl^3 \quad (3.37e)$$

$$I_x^{(6)} = I_x^{(5)} = \frac{\sqrt{17}}{12} tl^3 \quad (3.37f)$$

Se puede observar como en el caso de secciones horizontales (1) y (2), solo se considera el término de transporte. El momento de inercia, I_x , de la sección resultante es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} + I_x^{(5)} + I_x^{(6)} = 2,8tl^3 \quad (3.38)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y . En este caso son las secciones verticales (3) y (4) donde se considera unicamente el término de transporte:

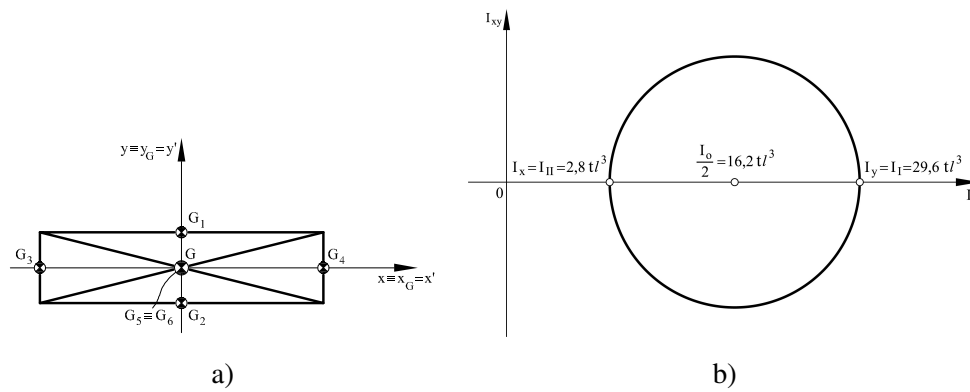


Figura 3.8: Problema 4: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.5. Problema 5

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.9a respecto de su centroide.

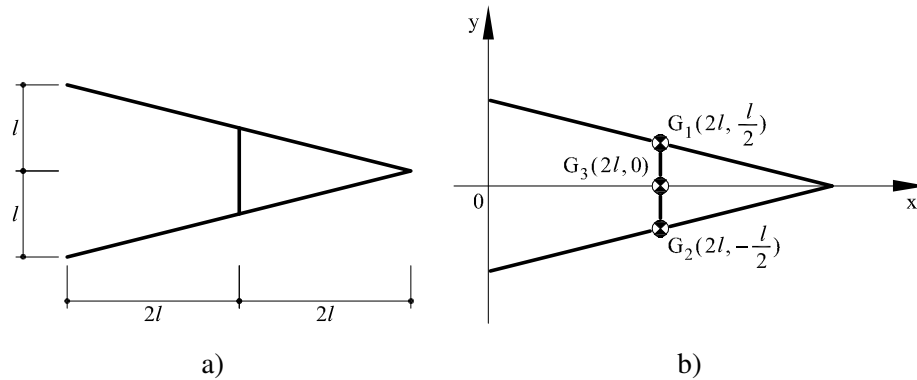


Figura 3.9: Problema 5: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.5.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

El primer paso para la resolución del problema consiste en el despiece de la sección en tres áreas rectangulares como se muestra en la figura 3.9b. A continuación se procede a calcular el área de cada rectángulo:

$$A^{(1)} = \sqrt{17} tl \quad (3.43a)$$

$$A^{(2)} = \sqrt{17} tl \quad (3.43b)$$

$$A^{(3)} = tl \quad (3.43c)$$

El área total será la suma de las áreas calculadas:

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = 9,24 tl \quad (3.44)$$

Para situar el centroide de la sección, primero es necesario calcular los momentos estáticos, M_x y M_y , respecto a los ejes cartesianos de referencia que se muestran figura 3.9b:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{1}{2} \right) + A^{(2)} \left(\frac{1}{2} \right) + A^{(3)} (0) = 0 \quad (3.45a)$$

$$M_y = A^{(1)} (2l) + A^{(2)} (2l) + A^{(3)} (2l) = 18,5 tl^2 \quad (3.45b)$$

La posición del centroide de la sección se obtiene como:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 2l \quad (3.46a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 0 \quad (3.46b)$$

3.5.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.10a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.9b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (l)^2 + A^{(1)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 \quad (3.47a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (l)^2 + A^{(2)} \left(-\frac{l}{2} \right)^2 \quad (3.47b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} (l)^2 \quad (3.47c)$$

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 2,8tl^3 \quad (3.47d)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y :

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (4l)^2 + A^{(1)} (2l - x_g)^2 \quad (3.48a)$$

$$I_y^{(2)} = I_y^{(1)} \quad (3.48b)$$

$$I_y^{(3)} = 0 + A^{(3)} (2l - x_g)^2 \quad (3.48c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 11tl^3 \quad (3.48d)$$

Como se comprueba a continuación, por razones de simetría, el producto de inercia, I_{xy} , debe

ser nulo:

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{12}A^{(1)}(4l)(l) + A^{(1)}(2l - x_g)\left(\frac{l}{2}\right) \quad (3.49a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(4l)(l) + A^{(2)}(2l - x_g)\left(-\frac{l}{2}\right) \quad (3.49b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)}(2l - x_g)(0) = 0 \quad (3.49c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = 0 \quad (3.49d)$$

Por último, el valor del momento polar de inercia respecto al centroide se calcula fácilmente sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 13,8tl^3 \quad (3.50)$$

3.5.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En este caso, los ejes que hemos utilizado para el cálculo de los momentos de inercia son ejes principales de inercia ($I_{xy} = 0$). De ese modo resulta:

$$I_{max} = I_y = 11tl^3 \quad (3.51a)$$

$$I_{min} = I_x = 2,8tl^3 \quad (3.51b)$$

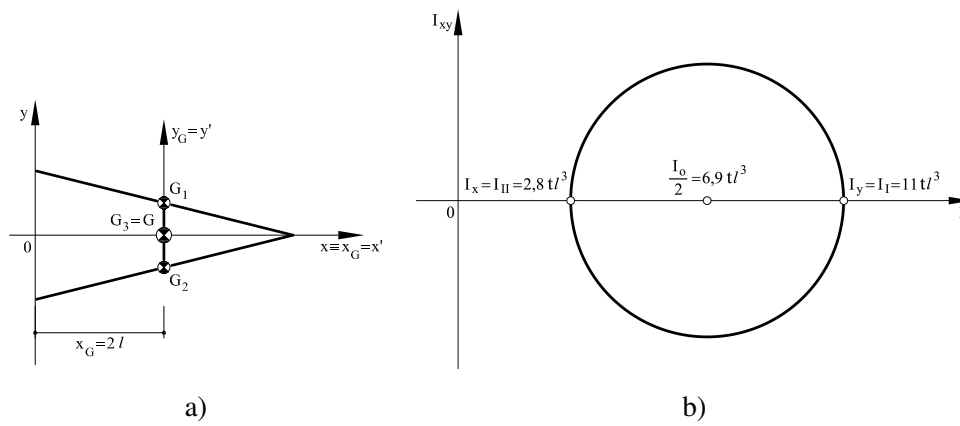


Figura 3.10: Problema 5: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

Con los momentos estáticos y el área total se calcula la posición del centroide:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0,21l \quad (3.54a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 0,085l \quad (3.54b)$$

3.6.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.12a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.11b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (l)^2 + A^{(1)} (-y_g)^2 \quad (3.55a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (l)^2 + A^{(2)} (-y_g)^2 \quad (3.55b)$$

$$I_x^{(3)} = 0 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.55c)$$

El momento de inercia, I_x , resultante es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 0,3tl^3 \quad (3.56)$$

y análogamente:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (l)^2 + A^{(1)} (-x_g)^2 \quad (3.57a)$$

$$I_y^{(2)} = 0 + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (3.57b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} \left(\frac{l}{2} \right)^2 + A^{(3)} \left(\frac{l}{4} - x_g \right)^2 \quad (3.57c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 0,275tl^3 \quad (3.57d)$$

Para el cálculo de el producto de inercia se sigue también la misma metodología:

$$I_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{12}A^{(1)}(l)(l) + A^{(1)}(-x_g)(-y_g) \quad (3.58a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)}\left(\frac{l}{2} - x_g\right)(-y_g) \quad (3.58b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)}\left(\frac{l}{4} - x_g\right)\left(\frac{l}{2} - y_g\right) \quad (3.58c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = -0,11tl^3 \quad (3.58d)$$

Por último, el momento polar de inercia, I_0 , se obtiene sumando las inercias, I_x e I_y calculadas:

$$I_0 = I_x + I_y = 0,575tl^3 \quad (3.59a)$$

3.6.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.12b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar en esta figura los momentos principales de inercia se obtienen cuando se anula el producto de inercia. El centro del círculo de Mohr está definido por el momento de inercia medio, I_m :

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 0,29tl^3 \quad (3.60)$$

mientras su radio, R , se puede calcular como:

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 0,11tl^3 \quad (3.61)$$

Los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se encuentran en los extremos del diámetro horizontal ($I_{xy} = 0$) y se calculan como:

$$I_{max} = I_m + R = 0,4tl^3 \quad (3.62a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 0,18tl^3 \quad (3.62b)$$

Por último, la rotación de ejes (positiva en sentido *antihorario*) necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') , se calcula como (ver figuras 3.12):

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}\right) = 41^\circ \quad (3.63)$$

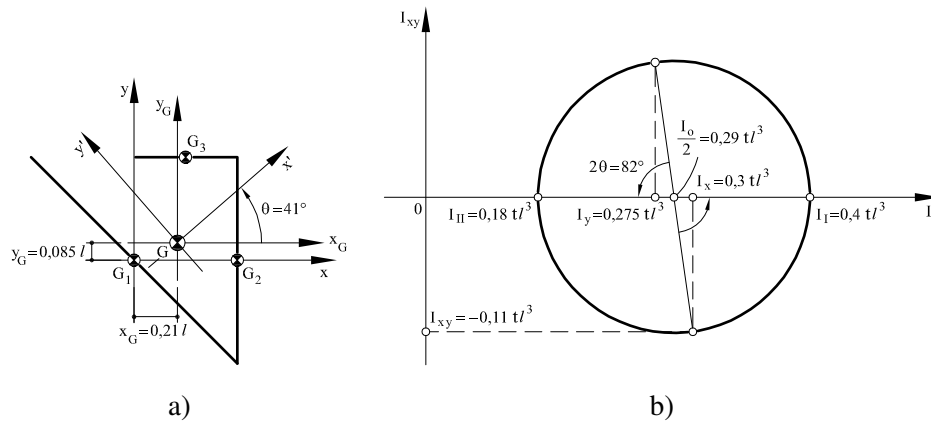


Figura 3.12: Problema 6: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.7. Problema 7

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.13a respecto de su centroide.

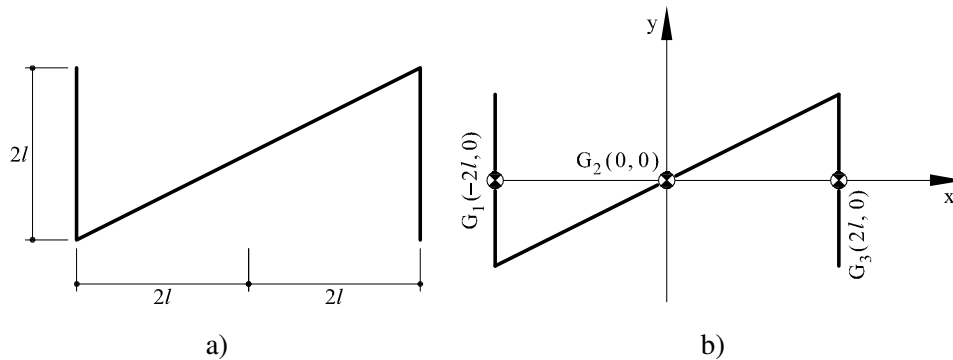


Figura 3.13: Problema 7: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.7.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

Se puede observar como se nos presenta una sección compuesta por tres rectángulos de sección delgada. El despiece de la sección se muestra en la figura 3.13b.

El área de la sección resulta:

$$A^{(1)} = 2tl \quad (3.64a)$$

$$A^{(2)} = 2\sqrt{5}tl \quad (3.64b)$$

$$A^{(3)} = 2tl \quad (3.64c)$$

$$A_T = 8,47tl \quad (3.64d)$$

mientras su centroide coincide con el origen de los ejes de referencia por razones de simetría.

3.7.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado se calcularán los momentos de inercia I_x e I_y , el producto, I_{xy} y el momento polar de inercia, I_0 , respecto a los ejes que pasan por el centroide de la sección (vease figura 3.14a).

El momento de inercia, $I_x^{(i)}$, relativo a cada rectángulo del despiece resulta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(1)}(2l)^2 \quad (3.65a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(2l)^2 \quad (3.65b)$$

$$I_x^{(3)} = I_x^{(1)} = \frac{1}{12}A^{(3)}(2l)^2 \quad (3.65c)$$

de tal manera que el momento de inercia de la sección, I_x , se calcula sumando las contribuciones de cada rectángulo:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 2,8tl^3 \quad (3.66)$$

y análogamente:

$$I_y^{(1)} = 0 + A^{(1)}(-2l)^2 \quad (3.67a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(4l)^2 \quad (3.67b)$$

$$I_y^{(3)} = 0 + A^{(3)}(2l)^2 \quad (3.67c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 21,9tl^3 \quad (3.67d)$$

El cálculo del producto de inercia, I_{xy} , sigue la misma metodología:

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)}(-2l)(0) \quad (3.68a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{12}A^{(2)}(2l)(4l) \quad (3.68b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)}(2l)(0) \quad (3.68c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = 3tl^3 \quad (3.68d)$$

Finalmente, el momento polar de inercia, I_0 , resulta:

$$I_0 = I_x + I_y = 24,7tl^3 \quad (3.69)$$

3.7.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.14b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar, los momentos principales de inercia se obtienen cuando el producto de inercia, I_{xy} , se anula.

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr se calculan como:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 12,4tl^3 \quad (3.70a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 10tl^3 \quad (3.70b)$$

de tal manera que los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se calculan fácilmente como:

$$I_{max} = I_m + R = 22,4 t l^3 \quad (3.71a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 2,4 t l^3 \quad (3.71b)$$

Por último, la rotación de ejes (positiva en sentido *antihorario*) necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') , se calcula como (ver figuras 3.14):

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = 8,6^\circ \quad (3.72)$$

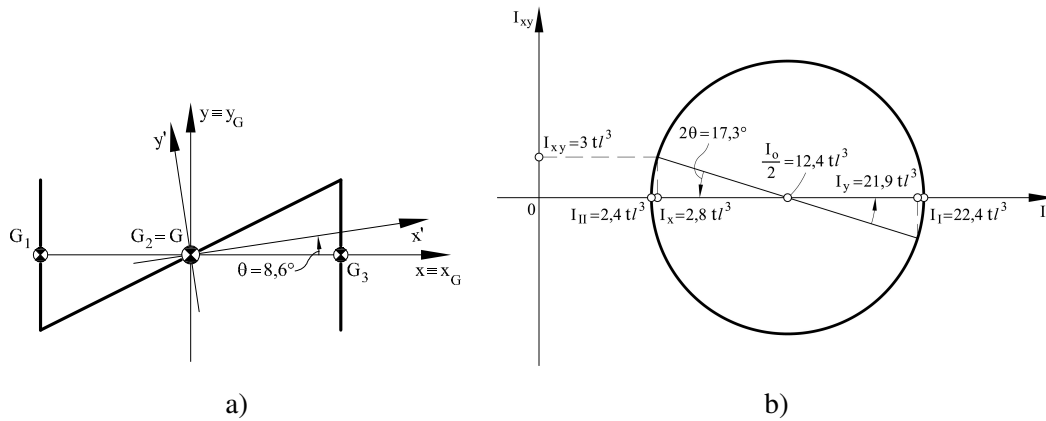


Figura 3.14: Problema 7: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.8. Problema 8

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.15a respecto de su centroide.

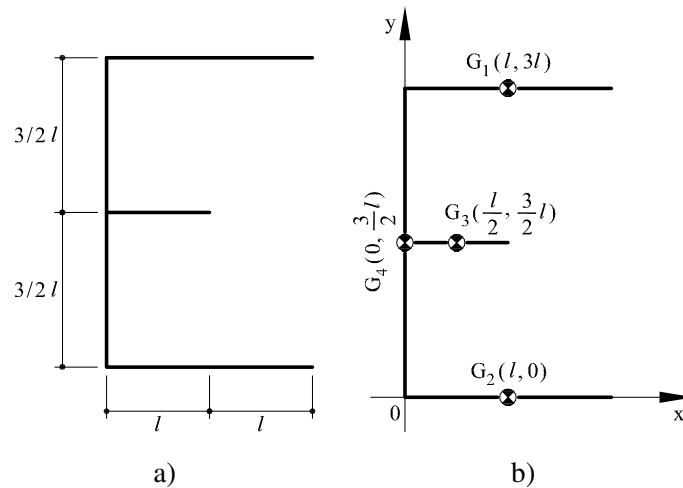


Figura 3.15: Problema 8: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.8.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

El primer paso para la resolución del problema planteado consiste en romper la sección propuesta en cuatro áreas rectangulares tal y como se muestra en figura 3.15b.

El área de cada rectángulo, $A^{(i)}$, así como el área total resultante, A_T :

$$A^{(1)} = 2tl \quad (3.73a)$$

$$A^{(2)} = 2tl \quad (3.73b)$$

$$A^{(3)} = tl \quad (3.73c)$$

$$A^{(4)} = 3tl \quad (3.73d)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} = 8tl \quad (3.73e)$$

Para situar el centroide de la sección es necesario calcular los momentos estáticos, M_x y M_y :

$$M_x = A^{(1)}(3l) + A^{(2)}(0) + A^{(3)}\left(\frac{3l}{2}\right) + A^{(4)}\left(\frac{3l}{2}\right) = 12tl^2 \quad (3.74a)$$

$$M_y = A^{(1)}l + A^{(2)}l + A^{(3)}\left(\frac{l}{2}\right) + A^{(4)}(0) = \frac{9l^2t}{2} = 4,5tl^2 \quad (3.74b)$$

de tal manera que la posición del centroide resulta como:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = \frac{9}{16}l = 0,56l \quad (3.75a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = \frac{3l}{2} = 1,5l \quad (3.75b)$$

3.8.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.16a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.15b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = 0 + A^{(1)}(3l - y_g)^2 \quad (3.76a)$$

$$I_x^{(2)} = 0 + A^{(2)}(-y_g)^2 \quad (3.76b)$$

$$I_x^{(3)} = 0 + A^{(3)}\left(\frac{3l}{2} - y_g\right)^2 \quad (3.76c)$$

$$I_x^{(4)} = \frac{1}{12}A^{(4)}(3l)^2 + A^{(4)}\left(\frac{3l}{2} - y_g\right)^2 \quad (3.76d)$$

Se puede observar como en el caso de secciones horizontales (1), (2) y (3), solo se considera el término de transporte. El momento de inercia, I_x , de la sección resultante es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 11,25tl^3 \quad (3.77)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y . En este caso la sección

vertical (4) es la que se calcula utilizando sólo el término de transporte:

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (2l)^2 + A^{(1)} (l - x_g)^2 \quad (3.78a)$$

$$I_y^{(2)} = I_y^{(1)} \quad (3.78b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} (l)^2 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (3.78c)$$

$$I_y^{(4)} = 0 + A^{(4)} (-x_g)^2 \quad (3.78d)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} = 3,15tl^3 \quad (3.78e)$$

El cálculo del producto de inercia, I_{xy} , sigue la misma metodología:

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} (l - x_g) (3l - y_g) \quad (3.79a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = 0 + A^{(2)} (l - x_g) (-y_g) \quad (3.79b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right) \left(\frac{3l}{2} - y_g \right) \quad (3.79c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = 0 + A^{(4)} (-x_g) (0) \left(\frac{3l}{2} - y_g \right) \quad (3.79d)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} = 0 \quad (3.79e)$$

Finalmente, se puede calcular el momento polar de inercia, I_0 , sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 14,4tl^3 \quad (3.80)$$

3.8.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En este problema, los ejes que hemos utilizado para el cálculo de los momentos de inercia son ejes principales de inercia ($I_{xy} = 0$). De ese modo resulta:

$$I_{max} = I_x = 11,25tl^3 \quad (3.81a)$$

$$I_{min} = I_y = 3,15tl^3 \quad (3.81b)$$

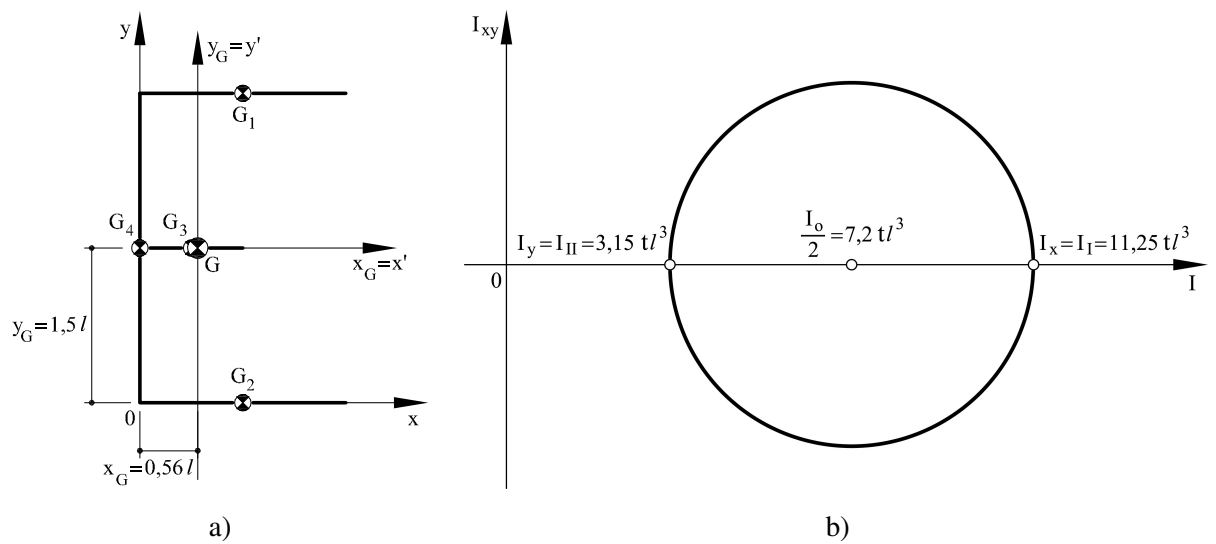


Figura 3.16: Problema 8: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.9. Problema 9

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.17a respecto de su centroide.

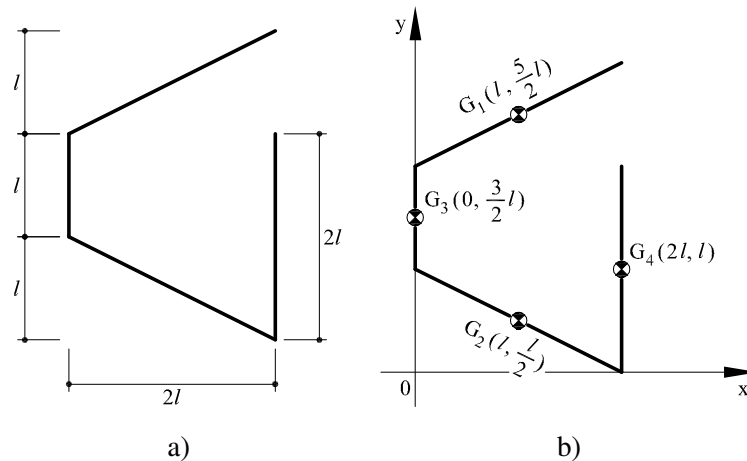


Figura 3.17: Problema 9: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.9.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

Para la resolución del problema planteado, se procederá en primer lugar al despiece de la sección en cuatro áreas rectangulares tal y como se muestra en la 3.17b. Las áreas de los diferentes rectángulos valen:

$$A^{(1)} = \sqrt{5} tl \quad (3.82a)$$

$$A^{(2)} = \sqrt{5} tl \quad (3.82b)$$

$$A^{(3)} = tl \quad (3.82c)$$

$$A^{(4)} = 2tl \quad (3.82d)$$

El área total A_T será por lo tanto:

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} + A^{(4)} = 7,47tl \quad (3.83a)$$

Una vez calculada el área, se procede a situar el centroide de la sección. Para ello se calculan los momentos estáticos, M_x y M_y :

$$M_x = A^{(1)} \left(2l + \frac{l}{2} \right) + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} \right) + A^{(3)} \left(l + \frac{l}{2} \right) + A^{(4)} l = 10,2tl^2 \quad (3.84a)$$

$$M_y = A^{(1)} l + A^{(2)} l + A^{(3)} (0) + 2A^{(4)} (2l) = 8,47tl^2 \quad (3.84b)$$

El centroide de la sección se sitúa en:

$$x_g = \frac{M_y}{A} = 1,13l \quad (3.85a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A} = 1,36l \quad (3.85b)$$

3.9.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.18a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los diferentes rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es el momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.17b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (l)^2 + A^{(1)} \left(\frac{5l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.86a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (l)^2 + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.86b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} (l)^2 + A^{(3)} \left(\frac{3l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.86c)$$

$$I_x^{(4)} = \frac{1}{12} A^{(4)} (2l)^2 + A^{(4)} (l - y_g)^2 \quad (3.86d)$$

El momento de inercia, I_x , de la sección propuesta es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} + I_x^{(4)} = 5,96tl^3 \quad (3.87)$$

Análogamente, se procede al cálculo del momento de inercia, I_y :

$$I_y^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (2l)^2 + A^{(1)} (l - x_g)^2 \quad (3.88a)$$

$$I_y^{(2)} = I_y^{(1)} \quad (3.88b)$$

$$I_y^{(3)} = 0 + A^{(3)} (0 - x_g)^2 \quad (3.88c)$$

$$I_y^{(4)} = 0 + A^{(4)} (2l - x_g)^2 \quad (3.88d)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} + I_y^{(4)} = 4,35 \, tl^3 \quad (3.88e)$$

El cálculo del producto de inercia, I_{xy} , sigue la misma metodología:

$$I_{xy}^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (2l)^2 + A^{(1)} (l - x_g) \left(\frac{5l}{2} - y_g \right) \quad (3.89a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = -\frac{1}{12} A^{(2)} (2l)^2 + A^{(2)} (l - x_g) \left(\frac{l}{2} - y_g \right) \quad (3.89b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = 0 + A^{(3)} (-x_g) \left(\frac{3l}{2} - y_g \right) \quad (3.89c)$$

$$I_{xy}^{(4)} = 0 + A^{(4)} (2l - x_g) (l - y_g) \quad (3.89d)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} + I_{xy}^{(4)} = -0,86 \, tl^3 \quad (3.89e)$$

Finalmente, se puede calcular el momento polar de inercia, I_0 , sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 10,3 \, tl^3 \quad (3.90)$$

3.9.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.18b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. Como se puede observar, los momentos principales de inercia se obtienen cuando el producto de inercia, I_{xy} , se anula.

El centro, I_m y el radio, R , del círculo de Mohr se calculan como:

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 5,15 \, tl^3 \quad (3.91a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = 1,18 \, tl^3 \quad (3.91b)$$

de tal manera que los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se calculan fácilmente como:

$$I_{max} = I_m + R = 6,33 \, tl^3 \quad (3.92a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 3,97 \, tl^3 \quad (3.92b)$$

El círculo de Mohr nos indica además la rotación de ejes necesaria para que éstos coincidan con los ejes principales de inercia, como se muestra en las figuras 3.18a-b. En el plano de Mohr, las rotaciones (positivas en sentido *antihorario*) corresponden a *dos veces* el valor del ángulo, θ , necesario para que los ejes originales de la sección, (x, y) , coincidan con los ejes principales de inercia, (x', y') . Esta rotación se puede calcular como:

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = 23,6^\circ \quad (3.93)$$

Finalmente, se puede observar que, en lugar de mover los ejes de referencia y mantener fija la posición de la sección, se consigue el mismo resultado manteniendo los ejes de referencia fijos y rotando la sección en sentido *horario*.

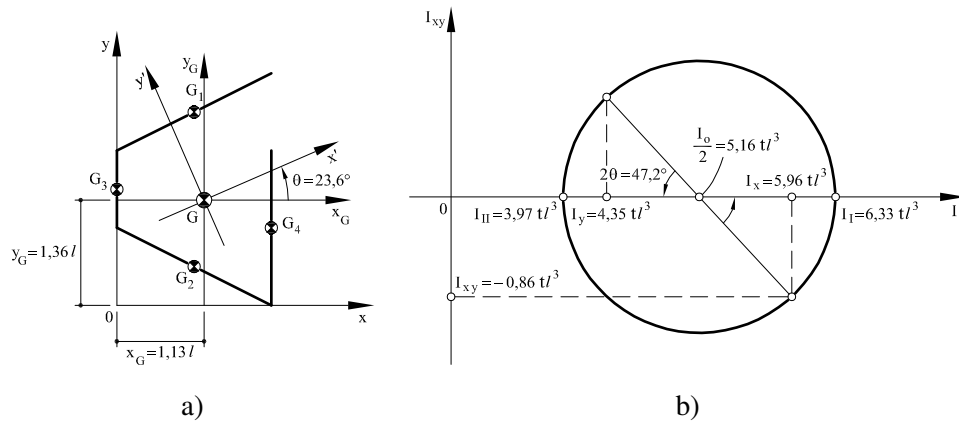


Figura 3.18: Problema 9: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.

3.10. Problema 10

Calcular los momentos principales de inercia para la sección de pared delgada que se presenta en la figura 3.19a respecto de su centroide.

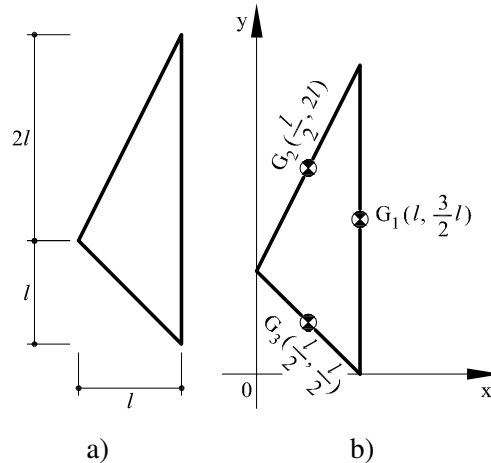


Figura 3.19: Problema 10: (a) Sección de pared delgada propuesta; (b) Posición de los centroides considerados en el despiece

3.10.1. Cálculo del área y del centroide de la sección

En primer lugar, se realiza el despiece de la sección original en tres áreas rectangulares de pared delgada según se muestra en la figura 3.19b. A continuación se procede con el cálculo del área de cada rectángulo, $A^{(i)}$, así como al cálculo del área total, A_T :

$$A^{(1)} = 3tl \quad (3.94a)$$

$$A^{(2)} = \sqrt{5}tl \quad (3.94b)$$

$$A^{(3)} = \sqrt{2}tl \quad (3.94c)$$

$$A_T = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = 6,65tl \quad (3.94d)$$

Los momentos estáticos, M_x y M_y , se calculan de forma análoga en función de la posición de los centroides de los diferentes rectángulos que forman la sección propuesta respecto de los ejes

cartesianos de referencia que se muestran en la figura 3.19b:

$$M_x = A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} \right) + A^{(2)} (2l) + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} \right) = 9,68tl^2 \quad (3.95a)$$

$$M_y = A^{(1)} (l) + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} \right) + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} \right) = 4,82tl^2 \quad (3.95b)$$

Finalmente, la posición del centroide de la sección (vease figura 3.20a) se obtiene como:

$$x_g = \frac{M_y}{A_T} = 0,72l \quad (3.96a)$$

$$y_g = \frac{M_x}{A_T} = 1,45l \quad (3.96b)$$

3.10.2. Cálculo de los momentos de inercia

En este apartado calcularemos los momentos de inercia I_x y I_y , el producto de inercia I_{xy} así como el momento polar de inercia I_o respecto de los ejes x_G e y_G (ver figura 3.20a) que pasan por el centroide de la sección.

El momento de inercia, I_x , se calcula sumando las contribuciones, $I_x^{(i)}$, de los tres rectángulos del despiece que forman la sección propuesta. Cada momento de inercia $I_x^{(i)}$ se obtiene sumando dos términos: el primero término es al momento de inercia calculado respecto a ejes que pasan por su propio centroide, G_i , (ver figura 3.19b), mientras el segundo término corresponde al transporte (*teorema de los ejes paralelos*) hacia el centroide, $G(x_g, y_g)$, de la sección propuesta:

$$I_x^{(1)} = \frac{1}{12} A^{(1)} (3l)^2 + A^{(1)} \left(\frac{3l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.97a)$$

$$I_x^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (2l)^2 + A^{(2)} (2l - y_g)^2 \quad (3.97b)$$

$$I_x^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} l^2 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - y_g \right)^2 \quad (3.97c)$$

El momento de inercia, I_x , de la sección propuesta es:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 5,1tl^3 \quad (3.98)$$

De igual forma se procede con el cálculo de I_y :

$$I_y^{(1)} = 0 + A^{(1)} (l - x_g)^2 \quad (3.99a)$$

$$I_y^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} l^2 + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (3.99b)$$

$$I_y^{(3)} = \frac{1}{12} A^{(3)} l^2 + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right)^2 \quad (3.99c)$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 0,71tl^3 \quad (3.99d)$$

y análogamente con el producto de inercia, I_{xy} :

$$I_{xy}^{(1)} = 0 + A^{(1)} (l - x_g) \left(\frac{3l}{2} - y_g \right) \quad (3.100a)$$

$$I_{xy}^{(2)} = \frac{1}{12} A^{(2)} (l) (2l) + A^{(2)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right) (2l - y_g) \quad (3.100b)$$

$$I_{xy}^{(3)} = -\frac{1}{12} A^{(3)} (l) (l) + A^{(3)} \left(\frac{l}{2} - x_g \right) \left(\frac{l}{2} - y_g \right) \quad (3.100c)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)} + I_{xy}^{(3)} = 0,32 \, tl^3 \quad (3.100d)$$

Finalmente, se puede calcular el momento polar de inercia, I_0 , sumando I_x e I_y :

$$I_0 = I_x + I_y = 5,8 \, tl^3 \quad (3.101)$$

3.10.3. Cálculo de los momentos principales de inercia

En la figura 3.20b se muestra el círculo de Mohr relativo a la sección de pared delgada propuesta. El centro de este círculo está definido por el momento de inercia medio, I_m (centro del círculo) y por su radio, R :

$$I_m = \frac{I_x + I_y}{2} = 2,9 \, tl^3 \quad (3.102a)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} = 2,2 \, tl^3 \quad (3.102b)$$

Los momentos principales de inercia, I_{max} y I_{min} , se calculan como:

$$I_{max} = I_m + R = 5,1 \, tl^3 \quad (3.103a)$$

$$I_{min} = I_m - R = 0,7 \, tl^3 \quad (3.103b)$$

Por último, la rotación, θ , necesaria para que los ejes originales de la sección, (x, y) , sean ejes principales de inercia, (x', y') , se muestra en la figura 3.20b (rotación positiva antihoraria):

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right) = -4,2^\circ \quad (3.104)$$

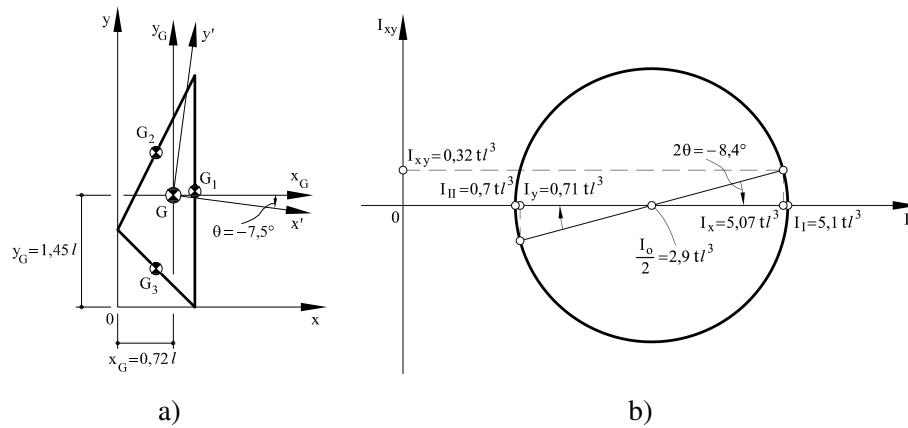


Figura 3.20: Problema 10: (a) Posición del centroide y de los ejes principales de inercia; (b) Circulo de Mohr.