UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL
UNIDAD ACADEMICA RECONQUISTA

TRANSFORMADA DE LAPLACE

MATEMATICA PARA INGENIERIA ELECTROMECANICA

INGENIERIA ELECTROMECANICA

Trabajo Práctico N° 1 : **<u>Transformada Directa de Laplace</u>**

1) Obtener la T. de L. De una combinación lineal de funciones

   a) $f(t) = a \,.\, t + b$

   b) $f(t) = 8\, t^3 – 3$

   c) $f(t) = 4\, e^{5t} + 6\, t^3 – 3 \,\mathrm{sen}\, (4\, t) + 2 \cos (2t)$

   d) $f(t) = a \,.\mathrm{sen}\, (\, w\, t + c\,)$

   e) $f(t) = \mathrm{sen}^2\, t$

2) Resolver aplicando el primer teorema del desplazamiento

   a) $f(t) = e^{-2t} \,.\, \mathrm{sen}\, (4\, t\,)$

   b) $f(t) = \mathrm{Sh}\, (a \,.\, t\,) \,.\, \cos (\, a \,.\, t)$

   c) $f(t\,) = e^{-t} \,.\, \mathrm{sen}^{\,2}\, t$

   d) $f\, (\, t) = e^{a\,.\,t\,+\,b}$

3) Aplicar el producto por potencia de exponente natural de t

   a) $f(t) = t \,.\, \mathrm{sen}\, t$

   b) $f(t) = t^2 \,.\, \mathrm{sen}\, t$

   c) $f(t) = t \,.\, \mathrm{Sh}\, (\, 2\, t\,)$

   d) $f(t) = u \,.\, e^{-2u} \,.\, \mathrm{sen}\, u$

   e) $f(t) = (\, t^2 – 3.t + 2\,) \,.\, \mathrm{sen}\, (\, 3\, t)$

   f) $f(t) = t^3 \,.\, e^{-3t}$

4) Aplicar la división por t

   a) $f\, (t) = \mathrm{Sh}\, t\, /\, t$

   b) $f(t) = (\, e^{-2t} – e^{-3t}\,) / t$

   c) $f(t) = (\, \cos (2\, t) – \cos (\, 3t))\, /\, t$

5) Resolver por aplicación del segundo Teorema del Desplazamiento

a) $f(t) = (t-2) \cdot u(t-2)$

b) $f(t) = (1-t) \cdot u(t-1)$

c) $f(t) = \cos t \cdot u(t-\pi)$

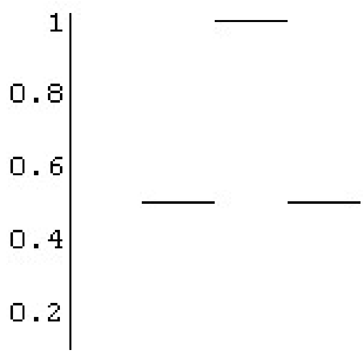
d) $f(t) = t^2 \cdot u(t-1)$

e) $f(t) = e^{-2t} \cdot u(t-1)$

6) Definir las funciones representadas gráficamente y hallar sus correspondientes Transformadas de Laplace.

a)

b)



c)

7) Hallar las Transformadas inversas de Laplace

a) $F(s) = 1 / (s^2 + 9)$

b) $F(s) = 4 / (s - 2)$

c) $F(s) = 1 / s^4$

d) $F(s) = s / (s^2 - 16)$

e) $F(s) = (5s + 4)/ s^3 - (2 s - 18) / (s^2 + 9) + (24 - 30 \sqrt{5}) / s^4$

8) Aplicar el primer Teorema del Desplazamiento

a) $F(s) = (6s - 4) / (s^2 - 4s + 20)$

b) $F(s) = (3s + 7) / (s^2 - 2s - 3)$

c) $F(s) = (s + 1) / (s^2 + s + 1)$

9) Resolver aplicando la descomposición en fracciones parciales simples

9.1) Raíces Reales simples

a) $F(s) = (s+1) / (s^3 + s^2 - 6 s)$

b) $F(s) = (s + 12) / (s^2 + 4s)$

c) $F(s) = 6 s / (s^2 + 6 s - 8)$

d) $F(s) = (3s + 16) / (s^2 - s - 6)$

9.2 Raíces Reales Múltiples

a) $F(s) = (s-+2) / (s^5 - 2 s^4 + s^3)$

b) $F(s) = (10 - 4 s) / (s - 2)^2$

c) $F(s) = (2 - s - s^2) / (s + 1)^3$

d) $F(s) = 1 / (s + 2)^2 . (s - 2)$

9.3 Raíces complejas simples

a) $F(s) = (s^2 + 1) / (s^3 + 4s)$

b) $F(s) = (4s^2 - 3s) / [(s - 2) . (s^2 + 1)]$

c) $F(s) = (s^2 + 2s + 3) / [(s^2 + 2s + 2) . (s^2 + 2s + 5)]$

d) $F(s) = (6s - 2) / (s^2 + 9)$

9.4 Raíces Complejas Múltiples

a) $F(s) = (4s + 32) / [s(s^2 + 4)]$

b) $F(s) = (s + 25) / (s^2 - 4s + 5)^2$

c) $F(s) = (s^2 - 6s + 7) / (s^2 - 4s + 5)^2$

10) Aplicación a la resolución de Ecuaciones Diferenciales Lineales, a Coeficientes constantes, con condiciones iniciales y de contorno.

En todos los casos, $y = f(t)$; $y' = f'(t)$; $y'' = f''(t)$

a) $y' + 2y = t$; $y(0) = -1$

b) $y' - y = \text{sen } t$; $y(0) = 0$

c) $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2) . y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$

d) $y'' - 3y' + 2y = 4 . e^{2t}$; $y(0) = -3$; $y'(0) = 5$

e) $y'' + 4y = \text{sen } t$; $y(0) = y'(0) = 0$

f) $y'' + 4y' + 4y = 4 . e^{-2t}$; $y'(0) = 4$; $y(0) = -1$

g) $y'' + y = t$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$

h) $y'' + 2y' + y = t . e^{-t}$; $y(0) = -1$; $y'0) = -2$

i) $y'' + 4y' + 4y = f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$; $y(0) = y'(0) = 0$

j) $y^{IV} - 16y = 30 \text{ sen } t$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 2$; $y''(\pi) = 0$; $y^{III}(\pi) = -18$

11) Aplicación a la resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales

En todos los casos, $y = f(t)$; $x = f(t)$; $z = f(t)$

a) $\begin{cases} x' + y' + x + y = 1 \\ y' - 2x - y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y(0) = 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' + z' = t \\ y'' - z = e^{-t} \end{cases}$ $\begin{cases} y(0) = 3 \\ y'(0) = -2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' - z' - 2y + 2z = \text{sen } t \\ y'' + 2z' + y = 0 \end{cases}$ $y(0) = y'(0) = z(0) = 0$

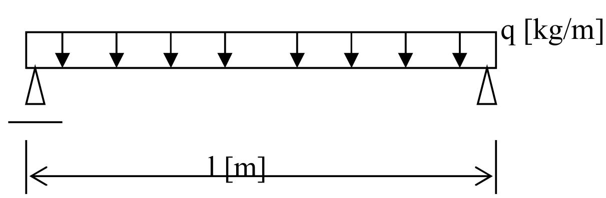
12) <u>Aplicación de las Transformadas de Laplace a la resolución de problemas físicos</u>

Ecuaciones diferenciales lineales

a) Sea la masa **m** apoyada en un plano sin rozamiento y vinculada a un punto fijo **P** mediante un resorte de masa nula y rigidez **k**.
Encontrar la ley del movimiento de la masa **m** cuando se la libera, después de haberla apartado una distancia **x** con velocidad inicial nula.
$m = 2$ [g] $k = 8$ [dyn/cm] $x_0 = 10$ [cm] $x'_0 = 0$

b) En las mismas condiciones del problema anterior se agrega un amortiguador cuyo coeficiente de amortiguamiento es **c** . Obtener la ley del movimiento.
$c = 8$ [dyn . seg/cm]

c) Una viga simplemente apoyada soporta una carga uniformemente repartida **q** por unidad de longitud. Hallar la flecha en cualquier punto de la misma.
$l = 4$ [m]
$q = 200$ [kg/m]



d) Un inductor **L** , una resistencia **R** , y un capacitor **C** se conectan en serie con una fuente de tensión **E**. En el instante inicial t=0 tanto la carga del condensador como la intensidad del circuito son nulas. Encontrar la función Carga e Intensidad en cualquier instante, si :

$L = 2$ [H] $R = 16$ [Ω] $C = 0,02$ [f]

d1) Para el caso en que la tensión vale $E = 300$ [v]

d2) Para el caso en que la tensión sigue la ley $E = 100 \text{ sen } t$ [v]

13) <u>Aplicación de las Transformadas de Laplace a la resolución de problemas físicos</u>

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

a) En el circuito de la figura, plantear las ecuaciones que relacionan la Intensidad de corriente con el tiempo, y hallar la ley de variación de dichas funciones.

$E_0 = 50$ [v] $L = 1$ [H] $C = 0,004$ [F] $R_1 = 15$ [Ω] $R_2 = 50$ [Ω]

b) En el circuito de la figura, plantear las ecuaciones que relacionan la Intensidad de corriente con el tiempo, y hallar la ley de variación de dichas funciones.

$E(t) = 50 \cdot \text{sen}(50\, t)$ [v]

$L = 2$ [H] $R_1 = 25$ [Ω] $R_2 = 10$ [Ω]

c) Considere dos tanques de salmuera conectados como se muestra en la figura. El tanque 1 posee una concentración **x** [kg/l] y el tanque 2 **y** [kg/l]. Se conservan uniformes por agitamiento y se bombean de un tanque a otro con un caudal de 50 [l/min] y 100 [l/min] , respectivamente. Además al tanque 1 fluye agua pura a 100 [l/min] y del tanque 2 salen 100 [l/min], por lo que el volumen de salmuera en los tanques permanece constante.
Plantear las ecuaciones de la velocidad de variación de la concentración en ambos Tanques **x = f(t)** e **y = f(t)**

d) d) Un sistema de dos masas m_1 y m_2 y tres resortes de constante elástica k_1, k_2 y k_3, se montan como lo muestra la figura.
Hallar las ecuaciones de los desplazamientos desde la posición de equilibrio de las dos masas, $\mathbf{x_1(t)}$ y $\mathbf{x_2(t)}$.