TEMA 1: Función Compleja de Variable Compleja

Revisión de números complejos y sus operaciones.

Definición: Se denomina número complejo a todo par de números reales:

$z=(x,y)$; $\quad z\in\mathbb{C}$; $x\in\mathbb{R}$; $y\in\mathbb{R}$

x: Componente real de z, $x=\operatorname{Re}(z)$

y: Componente imaginaria de z, $\quad y=\operatorname{Im}(z)$

Ejemplo: $z=(-2,3)$ $\qquad \operatorname{Re}(z)=-2$

$\operatorname{Im}(z)=3$

Igualdad: Dados dos números complejos: $z_1=(x_1,y_1)$, $z_2=(x_2,y_2)$:

Def.: $z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\end{cases}$ sus componentes respectivas son iguales.

Convención:

$$\left.\begin{array}{llll}\text{1)} & z=(x,0) & \Rightarrow & z:\ \text{real}\ =x\\ \text{Ejemplo:} & z=(1,0) & \Rightarrow & 1\end{array}\right\} z:(0,0)=0$$

2) $\qquad z=(0,1) \quad\Rightarrow\quad$ unidad imaginaria $=\boldsymbol{i}$

$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

$\mathbb{R}=\{(x,y)\,/\,y=0\}$

$\mathbb{C}=\{(x,y)\,/\,x\in\mathbb{R}\ \wedge\ y\in\mathbb{R}\}$

Suma: Dado dos números complejos $z_1=(x_1,y_1)$ y $z_2=(x_2,y_2)$

$z_1+z_2=z=(x,y)\,/\,x=x_1+x_2\ \wedge\ y=y_1+y_2$

Ejemplo: $(3,2)+(2,4)=(5,6)$

Propiedades:

- Conmutativa: $z_1+z_2=z_2+z_1$
- Asociativa: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

Existencia de neutro: existe neutro en la suma igual a 0, porque

$z+0=z\Rightarrow(x,y)+(0,0)=(x,y)$

Existencia de elemento opuesto: $\forall z,\exists$ elemento opuesto $w\,/\,z+w=(0,0)$

$w=-z$ $\qquad$ Si $z=(x,y)\Rightarrow w=(-x,-y)$

Propiedad uniforme.

$$\begin{array}{l} z_1 = z_2 \\ z_3 = z_4 \end{array} \qquad z_1 + z_3 = z_2 + z_4$$

Producto de un número complejo por un número real.

$z \in \mathbb{C}$; $\quad h \in \mathbb{R}$; $\quad z = (x, y)$

$$h \cdot z = h \cdot (x, y) = (hx, hy)$$

Ejemplo:

$$2 \cdot (3, -1) = (6, -2)$$

$$h \cdot (0,1) = (0, h) = h\boldsymbol{i}$$

$$h \cdot (1,0) = (h, 0) = h$$

El producto es conmutativo, asociativo y distributivo.

Forma binómica de un número complejo.

$z = (x, y)$; $\quad z \in \mathbb{C}$; $\quad x \wedge y \in \mathbb{R}$

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y\boldsymbol{i} \qquad \Rightarrow \boxed{z = (x, y) = x + y\boldsymbol{i}}$$

Suma: $z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i} \quad \wedge \quad z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\boldsymbol{i}$$

Producto de dos números complejos.

Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$; $z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$$

$$(3,4) \cdot (-1,3) = (3 \cdot (-1) - 4 \cdot 3,\ 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1)) = (-15, 5)$$

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 - 1, 0 + 10) = (-1, 0) = -1$$

$$\boxed{\boldsymbol{i}^2 = -1} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2\boldsymbol{i}$$

Producto.

$z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i} \quad \wedge \quad z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1\boldsymbol{i}) \cdot (x_2 + y_2\boldsymbol{i}) = x_1x_2 + x_1y_2\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{i}x_2 + y_1\boldsymbol{i}y_2\boldsymbol{i} = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\boldsymbol{i}$$

Ejemplo:

$$(3 + 2\boldsymbol{i}) \cdot (1 - \boldsymbol{i}) = 3 - 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{i}^2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\boldsymbol{i} = \boxed{5 - \boldsymbol{i}}$$

Inversas:

Del producto → el cociente

De la suma → la resta

Resta de dos números complejos.

$z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i} \quad \wedge \quad z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$

$$\boxed{z_1 - z_2 = z \;\big/\; z + z_2 = z_1}$$

$$(x + y\boldsymbol{i}) + (x_2 + y_2\boldsymbol{i}) = x_1 + y_1\boldsymbol{i}$$

$$(x + x_2) + (y + y_2)\boldsymbol{i} = x_1 + y_1\boldsymbol{i} \qquad \begin{cases} x + x_2 = x_1 \Rightarrow x = x_1 - x_2 \\ y + y_2 = y_1 \Rightarrow y = y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$z = x + y\boldsymbol{i} = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\boldsymbol{i}$$

Opuesto de un número complejo.

Dado $z = x + y\boldsymbol{i}$, se define $w = -x - y\boldsymbol{i}$ como el **opuesto** del número *z*.

$z = (x, y)$ y su **opuesto** $w = (-x, -y)$

Conjugado de un número complejo.

Dado $z = x + y\boldsymbol{i}$, se define $w = x - y\boldsymbol{i}$ como el **conjugado** del número *z*.

$z = (x, y)$ y su **conjugado** $w = (x, -y)$

División de dos números complejos.

$z_1 = x_1 + y_1\boldsymbol{i} \quad \wedge \quad z_2 = x_2 + y_2\boldsymbol{i}$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = z \;\big/\; z \cdot z_2 = z_1}$$

Regla práctica: Multiplicar y dividir por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} \qquad \text{siendo:} \quad \begin{array}{l} \overline{z}_2 = x_2 - y_2\boldsymbol{i} \\ \overline{z}_2 \cdot \overline{z}_2 = x_2{}^2 - y_2{}^2\boldsymbol{i} \end{array}$$

Ejemplo:

$$\frac{1-\boldsymbol{i}}{3+2\boldsymbol{i}} = \frac{(1-\boldsymbol{i})\cdot(3-2\boldsymbol{i})}{(3+2\boldsymbol{i})\cdot(3-2\boldsymbol{i})} = \frac{3-2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{i}-2}{9+4} = \frac{1-5\boldsymbol{i}}{13} = \boxed{\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\boldsymbol{i}}$$

Verificación:

$$\left(\frac{1}{13} - \frac{5}{13}\boldsymbol{i}\right)\cdot(3+2\boldsymbol{i}) = 1 - \boldsymbol{i}$$

Potencia enésima de un número complejo.

$z \in \mathbb{C}; \qquad n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots\ldots z}_{n \text{ factores}} \qquad z^n \cdot z^m = z^{n+m}$$

$$z^0 = 1 \qquad \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$$

$$z^1 = z \qquad \left(z^n\right)^m = z^{n \cdot m}$$

Potencia de la unidad imaginaria.

$\boldsymbol{i}^0 = 1$ $\quad\quad \boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^2 = -1$ $\quad\quad \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$ $\quad\quad \Rightarrow \boldsymbol{i}^3 = \boldsymbol{i}^2 \cdot \boldsymbol{i} = -1 \cdot \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^4 = 1$ $\quad\quad \boldsymbol{i}^5 = \boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^6 = -1$ $\quad\quad \boldsymbol{i}^7 = -\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{i}^8 = 1$

Siendo $\boldsymbol{i}^{4n} = 1;\ n \in \mathbb{R}$. $\quad\quad 4n$: múltiplo de 4

$\boldsymbol{i}^r = \boldsymbol{i}^{4n+d} = \boldsymbol{i}^{4n} \cdot \boldsymbol{i}^d$

División

$$\left.\begin{array}{ll} r & \underline{|4} \\ \underbrace{d}_{0,1,2,3} & n \end{array}\right\} \boldsymbol{i}^r = 1 \cdot \boldsymbol{i}^d = \boldsymbol{i}^d$$

Aplico convención para (0,1,2,3)

Ejemplo:

Para $\boldsymbol{i}^{15}$:

$$\left.\begin{array}{ll} 15 & \underline{|4} \\ \mathit{3} & 3 \end{array}\right\} \boldsymbol{i}^{15} = \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}$$

Para $\boldsymbol{i}^{61}$:

$$\left.\begin{array}{ll} 61 & \underline{|4} \\ \mathit{1} & 15 \end{array}\right\} \boldsymbol{i}^{61} = \boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}$$

$$z^2 = z \cdot z$$

$$(x + y\boldsymbol{i})^2 = x^2 + 2xy\boldsymbol{i} + (y\boldsymbol{i})^2 \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xy\boldsymbol{i}$$

$$(x + y\boldsymbol{i})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} (y\boldsymbol{i})^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

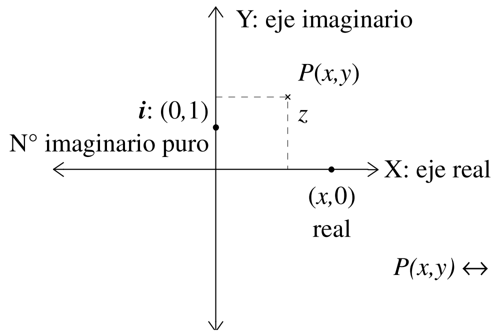
Raíz enésima de un número complejo.

$z = x + y\boldsymbol{i}$ $\quad\quad n \in \mathbb{N}\ /\ n > 1$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = w \in \mathbb{C}\ /\ w^n = z}$$

<u>**Representación de un número complejo.**</u>

1) Plano complejo o de Argand.

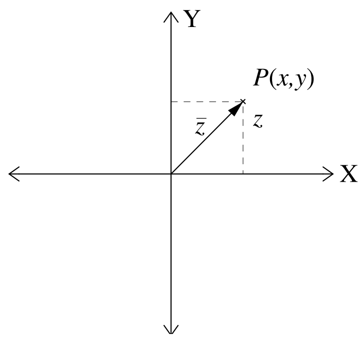


$P \leftrightarrow z$ → Afijo de z

$P(x,y) \leftrightarrow z=(x,y)=x+y\boldsymbol{i}$

Existe una correspondencia entre un número complejo y un punto del plano.

2)

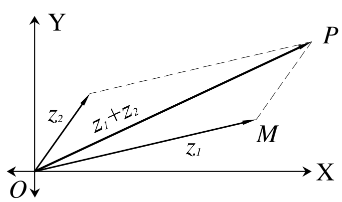


$$\overrightarrow{OP} \leftrightarrow z$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leftrightarrow z:(x,\, y)$$

Existe una correspondencia entre un número complejo y un vector posición.

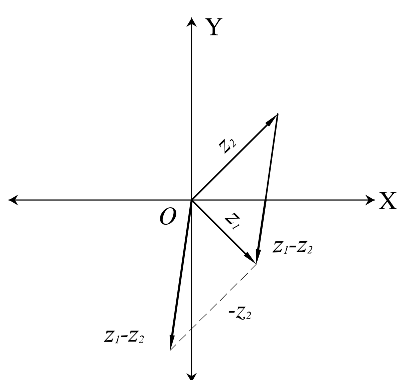
Interpretación geométrica de la suma de dos números complejos.



$$z_1 \overset{\rightarrow}{+} z_2 = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$$

$$\text{en } O\hat{M}P \therefore \quad \begin{aligned} |z_1+z_2| &< |z_1|+|z_2| \\ |z_1+z_2| &> \big||z_1|-|z_2|\big| \end{aligned}$$

Interpretación geométrica de la resta.

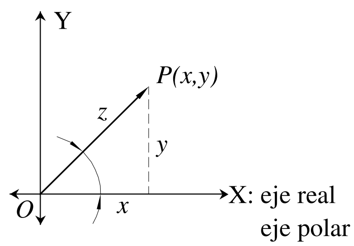


$$z_1 \overset{\rightarrow}{-} z_2 = \vec{z}_1 - \vec{z}_2$$

$$\text{en } O\hat{M}P \therefore \quad \begin{aligned} |z_1-z_2| &< |z_1|+|z_2| \\ |z_1-z_2| &> \big||z_1|-|z_2|\big| \end{aligned}$$

Forma polar de un número complejo.

$z=(x,y)=x+y\boldsymbol{i}\ ;\quad z\in\mathbb{C}\ ;\quad x\in\mathbb{R}\wedge y\in\mathbb{R}$



$P(x,y)\rightarrow P(\rho,\theta)$

$\rho=\left|\overline{OP}\right|=$ módulo del radio vector de $z=|z|$

$\theta=$ argumento de $z=\arg(z)\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned}x=\rho\cdot Cos\ \theta\\ y=\rho\cdot Sen\ \theta\end{aligned}\right\} z=x+y\boldsymbol{i}=\underbrace{\rho\left(Cos\ \theta+Sen\ \theta\boldsymbol{i}\right)}_{\text{forma polar o trig. de z}}$$

Cada complejo tiene infinitos valores de ángulos congruentes, pero tienen el mismo módulo. Entonces $\theta=\theta+2k\pi\ ;\quad k:0,\pm1,\pm2,...$

$(0,0)$ no tiene argumento, solamente lo define el radio vector $\rho=0$

$$z=x+y\boldsymbol{i}\ \overset{pasar}{\rightarrow}\ z=\rho\left(Cos\ \theta+\boldsymbol{i}Sen\ \theta\right)=\rho_\theta$$

$$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

$\theta=\arg z:\ ArcTg\,\dfrac{y}{x}$ (se selecciona el $\sphericalangle$ de los dos posibles teniendo en cuenta el cuadrante al que pertenece el afijo de z)

Ejemplo:

$z=1+\boldsymbol{i}\Rightarrow x=1\wedge y=1$

$\rho=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\theta=ArcTg1\Rightarrow\theta=45°$

$z=1+\boldsymbol{i}=\sqrt{2}\left(Cos45°+\boldsymbol{i}Sen45°\right)=\sqrt{2}_{45°}=\sqrt{2}_{\pi/4}$

Igualdad de dos números complejos en forma polar.

$z_1=\rho_{1\theta_1}\ ;\quad z_2=\rho_{2\theta_2}$

$$z_1=z_2\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_1=\rho_2\\ \theta_1=\theta_2+2k\pi; & k:0,\pm1,\pm2,...\end{cases}$$

Operaciones con números polares.

Producto:

$z_1=\rho_{1\theta_1}\ ;\quad z_2=\rho_{2\theta_2}$

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=\rho_1\theta_1\cdot\rho_2\theta_2=\rho_1\left(Cos\ \theta_1+\boldsymbol{i}Sen\ \theta_1\right)\cdot\rho_2\left(Cos\ \theta_2+\boldsymbol{i}Sen\ \theta_2\right)\\&=\left(\rho_1\rho_2\right)\left[\left(Cos\ \theta_1\cdot Cos\ \theta_2-Sen\ \theta_1\cdot Sen\ \theta_2\right)+\boldsymbol{i}\left(Cos\ \theta_1\cdot Sen\ \theta_2-Sen\ \theta_1\cdot Cos\ \theta_2\right)\right]\\&=\left(\rho_1\rho_2\right)\left[Cos\ \left(\theta_1+\theta_2\right)+\boldsymbol{i}Sen\ \left(\theta_1+\theta_2\right)\right]=R_\varphi\end{aligned}$$

$$\rho_{1\theta_1} \cdot \rho_{2\theta_2} = R_\varphi \Big/ \begin{matrix} R=\rho_1\rho_2 \\ \varphi=\theta_1+\theta_2 \end{matrix}$$

Ejemplo:

$$2_{\frac{\pi}{6}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)_{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{\frac{5\pi}{12}}$$

Potencia de un número complejo.

$$z_1 = \rho_{1\theta_1}\ ; \quad z_2 = \rho_{2\theta_2}\ ; \quad z_3 = \rho_{3\theta_3} \ \dots \ z_n = \rho_{n\theta_n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_n}_{n \text{ factores}} = (z_1 \cdot z_2)\dots z_n = (\rho_1\rho_2)_{\theta_1+\theta_2} \cdot z_3 \dots z_n$$

$$= \left[(\rho_1\rho_2)_{\theta_1+\theta_2} \cdot z_3\right]\dots z_n = \left[(\rho_1\rho_2\rho_3)_{\theta_1+\theta_2+\theta_3} \cdot z_4\right]\dots z_n$$

$$= \underbrace{(\rho_1\rho_2\dots\rho_n)}_{n \text{ factores}}\ \underbrace{{}_{(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)}}_{n \text{ sumandos}}$$

Si $z_1 = z_2 = \dots = z_n = \rho_\theta = z$

$$\underbrace{z \cdot z \cdot z \dots z}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(\rho \cdot \rho \cdot \rho \dots \rho)}_{n \text{ factores}}\ \underbrace{{}_{\theta+\theta+\theta+\dots+\theta}}_{n \text{ sumandos}} = \boxed{z^n = (\rho_\theta)^n = \rho^n{}_{n\theta}}\ ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Ejemplo:

$$z = \left(\frac{1}{2}\right)_{\frac{\pi}{6}}$$

$$z^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4_{\frac{4\pi}{6}} = \left(\frac{1}{16}\right)_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{16}\left(Cos\ 120° + \boldsymbol{i}Sen\ 120°\right) = \boxed{\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{2} + \boldsymbol{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\frac{1}{32} + \frac{\boldsymbol{i}\sqrt{3}}{32}$$

Cociente de dos números complejos en forma polar.

$$z_1 = \rho_{1\theta_1}\ ; \quad z_2 = \rho_{2\theta_2} \qquad z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z \Big/ z \cdot z_2 = z_1 \qquad z = R_\varphi$$

$$R_\varphi \rho_{2\theta_2} = \rho_{1\theta_1}$$

$$(R\rho_2)_{\varphi+\theta_2} = \rho_{1\theta_1} \Leftrightarrow \begin{cases} R\rho_2 = \rho_1 \Rightarrow R = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \\ \varphi + \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow \varphi = \theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

$$\frac{\rho_{1\theta_1}}{\rho_{2\theta_2}} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{(\theta_1-\theta_2)}$$

Ejemplo:

$$\frac{3_{50°}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{30°}} = 6_{20°}$$

Caso particular.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\rho_\theta}=\frac{1_{0°}}{\rho_\theta}=\left(\frac{1}{\rho}\right)_{-\theta}=\rho^{-1}\left[\left(Cos-\theta+\boldsymbol{i}Sen-\theta\right)\right]$$

$\boxed{z^{-1}=\rho^{-1}{}_{-\theta}}$ Forma de Moivre para $n=-1$

$$\frac{1}{z^{+n}}=z^{-n}=\frac{1_{0°}}{z^n}=\frac{1_{0°}}{\rho^n{}_{n\theta}}=\left(\frac{1}{\rho^n}\right)_{-n\theta}\boxed{=\rho^{-n}{}_{(-n\theta)}}$$

$\boxed{z^{-n}=\rho^{-n}{}_{(-n\theta)}}$ Forma de Moivre (forma generalizada para exponente θ)

Ejemplo:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)_{15°}\right]^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}_{15°(-2)}=4_{(-30°)}=4\left[Cos\left(-30°\right)+\boldsymbol{i}Sen(-30°)\right]$$

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\boldsymbol{i}\frac{1}{2}\right)\boxed{=2\sqrt{3}-2\boldsymbol{i}}$$

$$\left(1+i\right)^{-5}=\left(\sqrt{2}_{45°}\right)^{-5}=\left(\sqrt{2}\right)^{-5}_{-\frac{5\pi}{4}}=\frac{1}{\left(4\sqrt{2}\right)_{-\frac{5\pi}{4}}}\boxed{=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)_{-\frac{5\pi}{4}}}$$

Radicación en forma polar.

$z=\rho_\theta;\quad n\in\mathbb{N}>1$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho_\theta}=W=R_\varphi\big/w^n=z$$

$$\left(R_\varphi\right)^n=\rho_\theta\Rightarrow R^n{}_{n\varphi}=\rho_\theta\Leftrightarrow\begin{cases}R^n=\rho\Rightarrow R=\sqrt[n]{\rho}\\ n\varphi=\theta+2k\pi\Rightarrow\varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n};\quad k:0,\pm1,\pm2\end{cases}$$

$$w=\sqrt[n]{\rho_\theta}=R_\varphi\Bigg/\begin{matrix}R=\sqrt[n]{\rho}\\ \varphi=\dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{\theta}{n}+\dfrac{2k\pi}{n}\end{matrix}\qquad n:0,\pm1,\pm2$$

Son solamente n raíces:

$$\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}$$

$$\underset{w=f(z)}{\longrightarrow}$$

$$k:1....\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}$$

$$k:2....\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{4\pi}{n}$$

$$k:n....\varphi=\frac{\theta}{n}+\frac{n\pi}{n}=\underbrace{\frac{\theta}{n}+\pi}_{\text{se repite con }k:1}$$

$$k:n+1....$$

se repite con k:2

Esto nos demuestra que hay solamente n argumentos de φ en:

$\sqrt{2}_{7\pi/4}$; $\quad k: 0,1,2,3 \ldots n$

Las raíces enésimas son n complejos con k valores diferentes.

$$\sqrt[n]{\rho_\theta} = \sqrt[n]{\rho}\left(Cos\ \frac{\theta + 2k\pi}{n} + \boldsymbol{i}Sen\ \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right); \quad k: 0,1,2,\ldots(n-1)$$

Ejemplo:

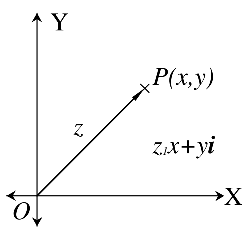
Halle $\sqrt[3]{z}$; $\quad z = 1 - i = \sqrt{2}_{7\pi/4}$

$$z_1 = (\sqrt{2})^{1/3}{}_{\frac{7\pi/4 + 2.0.\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\ {}_{7\pi/12} \qquad \text{k} = 0$$

$$z_2 = (\sqrt{2})^{1/3}{}_{\frac{7\pi/4 + 2.1.\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\ {}_{15\pi/12} \qquad \text{k} = 1$$

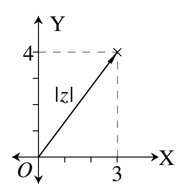
$$z_3 = (\sqrt{2})^{1/3}{}_{\frac{7\pi/4 + 2.3.\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}\ {}_{23\pi/12} \qquad \text{k} = 2$$

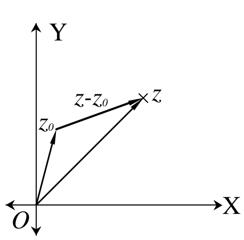
Conjuntos de puntos en el plano complejo



1) $|z|$: geométricamente representa la distancia entre el origen y el afijo del complejo z.

Ejemplo: $|3 + 4\boldsymbol{i}| = 5$



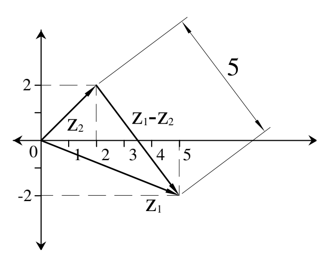


2) $|z - z_0|$: distancia entre z y z_0.

$|z_1 - z_0|$ si $\quad z_1 = 5 - 2\boldsymbol{i}$

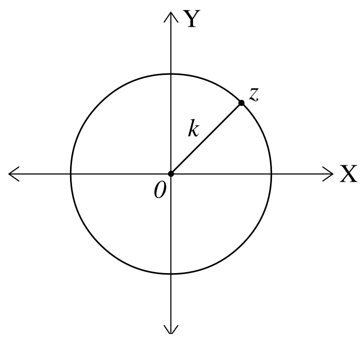
$z_2 = 2 + 2\boldsymbol{i}$

$|z_1 - z_2| = |3 - 4\boldsymbol{i}| = 5$



I) $|z| = k$; $\quad z = x + y\boldsymbol{i}$; $\quad x \in \mathbb{R}$; $\quad k \in \mathbb{R}^+$; $\quad y \in \mathbb{R}$

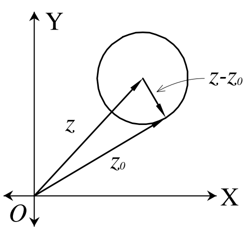
Representa geométricamente el conjunto de puntos siguiente:
Circunferencia con centro en el origen y radio *k*. Porque la distancia del origen a cada uno de ellos se mantiene constante.
Gráficamente:



$$Circ: \left\{ z \in \mathbb{C} \big/ |z| = k;\ k \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

II) $|z - z_0| = k; \quad k \in \mathbb{R}^+$

Define una circunferencia de centro z_0 y radio *k.*

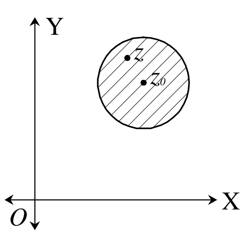


$$Circ: \left\{ z \in \mathbb{C} \big/ |z - z_0| = k;\ k \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

Si $z_0 = 0$, tendríamos el caso anterior.

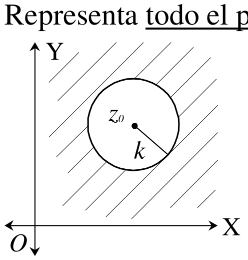
III) $|z - z_0| \leq k; \quad k \in \mathbb{R}^+$

Representa geométricamente a un círculo de centro z_0 y radio k, cuyo borde es la circunferencia anterior.



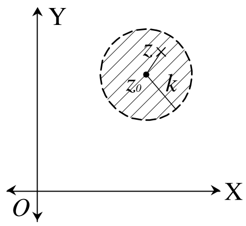
IV) $|z - z_0| \geq k$

Representa todo el plano exterior a la circunferencia, incluyendo los del borde.



V) $\left\{ z \in \mathbb{C} / \left| z - z_0 \right| < k;\ k \in \mathbb{R}^+ \right\}$

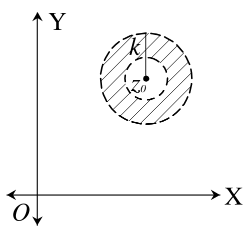
Representa los puntos interiores de la circunferencia, pero sin incluir el borde. Se llama **entorno de centro** z_0 **y radio** k**.**



$E\left(z_0; k\right)$

VI) $\left\{ z \in \mathbb{C} / 0 < \left| z - z_0 \right| < k;\ k \in \mathbb{R}^+ \right\}$

Representa una circunferencia donde se excluye el punto z_0 y también el borde. Lo llamamos **entorno reducido de centro** z_0 **y radio** k**.**



$E'\left(z_0; k\right) = E\left(z_0; k\right) - \left| z_0 \right|$

VII) $\left\{ z \in \mathbb{C} / \wedge \operatorname{Re}(z) > 0 \right\}$

Representa al semiplano cuya frontera es el eje y.

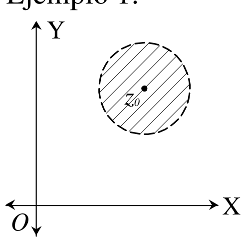
VIII) $\left\{ z \in \mathbb{C} / \wedge \operatorname{Im}(z) \leq 0 \right\}$

Representa al semiplano cuya frontera es el eje x.

Clasificación de los conjuntos de puntos del plano complejo.

I. Conjunto abierto: un conjunto de puntos del plano complejo se dice que es abierto si existe para cada punto un entorno que contiene únicamente puntos de ese conjunto.

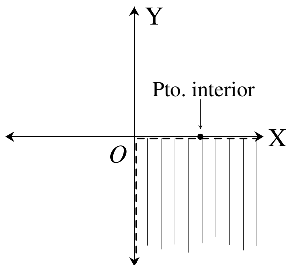
Ejemplo 1:



$\left\{ z \in \mathbb{C} / \left| z - z_0 \right| < k;\ k \in \mathbb{R}^+ \right\}$

Se puede decir que un entorno es un conjunto abierto porque para cada punto existe un entorno que contiene solamente puntos del conjunto.

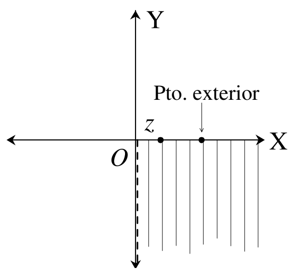
Ejemplo 2:



$$\left\{z/z\in\mathbb{C}\wedge\operatorname{Re} z>0\wedge\operatorname{Im}(z)<0\right\}$$

Es un conjunto abierto porque todo punto perteneciente al cuarto cuadrante por más que nos aproximemos al semieje, siempre tenemos un entorno que contenga puntos del conjunto.

Ejemplo 3:



$$\left\{z/z\in\mathbb{C}\wedge\operatorname{Re} z>0\wedge\operatorname{Im}(z)\le 0\right\}$$

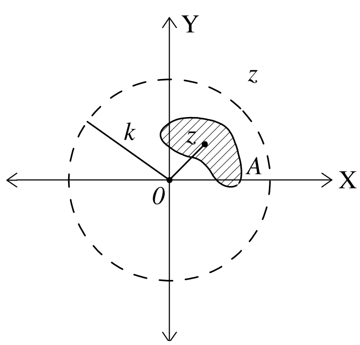
No es un conjunto abierto pertenece al eje X^+, tiene puntos que pertenecen al conjunto dado y puntos que no le pertenecen.

Todo punto de un conjunto abierto se denomina punto interior del mismo. Se llaman abiertos a los conjuntos que "rodean" a todos sus puntos.

II. Conjunto acotado: un conjunto de puntos del plano complejo se dice acotado si para cada uno de sus puntos "z" se cumple que sus módulos son menores que una constante real positiva.

A es acotado $\Leftrightarrow \underline{|z|<k}$, $\underline{\forall z\in A}$; $k\in\mathbb{R}^+$

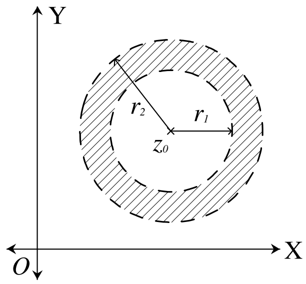
Geométricamente: se cumple la relación anterior subrayada.



En el ejemplo 2: no es acotado porque no existe ninguna circunferencia dentro de la cual se lo puede incluir.
En II, es un conjunto acotado, un entorno reducido, porque se lo puede incluir en una circunferencia.

Ejemplo 4:

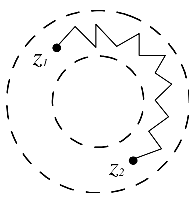
$$b:\left\{z\in\mathbb{C}/r_1<|z-z_0|<r_2,\ r_1\in\mathbb{R}^+,\ r_2\in\mathbb{R}^+\right\}$$



Corona circular abierta o anillo circular. Es un conjunto acotado, porque por grande que sea r_2; se puede incluir en una circunferencia

III. Conjunto conexo: un conjunto de puntos del plano complejo se dice conexo cuando dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse mediante una poligonal con un número finito de lados contenida en ese conjunto.

El ejemplo 4 es conexo, porque un par de puntos puede unirse mediante una poligonal sin salir de la corona.

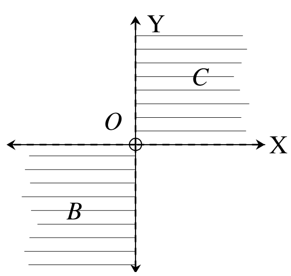


El entorno es un conjunto conexo.

Ejemplo 5:

$$A:\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,\underbrace{\operatorname{Re}(z)>0\wedge\operatorname{Im}(z)>0}_{C}\right\}\cup\left\{z\in\mathbb{C}\,/\,\overbrace{\operatorname{Re}(z)<0\wedge\operatorname{Im}(z)<0}^{B}\right\}$$

Es no conexo porque no incluye al origen, siendo ambos conjuntos conexos.

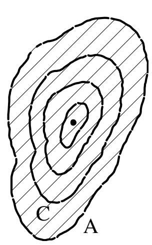


$C\rightarrow$ conjunto conexo

$B\rightarrow$ conjunto conexo

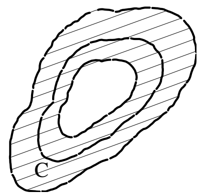
$A=C+B\rightarrow$ conjunto no conexo

Conexo simple: cuando cualquier curva cerrada perteneciente al mismo puede estrecharse continuamente hasta reducirse a un punto sin salir del conjunto.



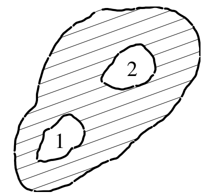
Los conjuntos múltiplemente conexo: son los que no cumplen con la definición anterior. Pueden ser:

Doblemente -- conexo



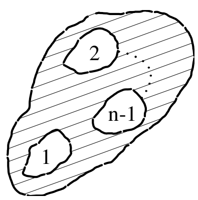
Tiene dos fronteras. Al reducirse a un punto se sale del conjunto. Se dice que tiene un agujero o una laguna.

Triplemente -- conexo

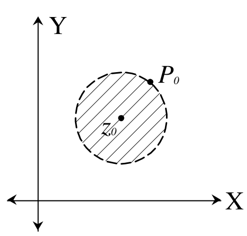


Tiene tres fronteras o dos agujeros o lagunas.

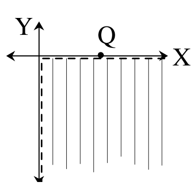
***n* – conexo:** Tiene n fronteras, una exterior y $(n-1)$ interiores. Tiene $(n-1)$ agujeros o lagunas.



Punto frontera: Dado un conjunto A de puntos en el plano complejo, punto frontera del mismo es todo punto que puede o no pertenecer a A, pero en todo entorno de él existen puntos que pertenecen al conjunto A y puntos que no le pertenecen.



P_0 es un punto frontera, aunque no le pertenece, porque todos sus entornos tienen puntos del conjunto y puntos que no le pertenecen al entorno.



$\mathrm{Re}(z) > 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) < 0$

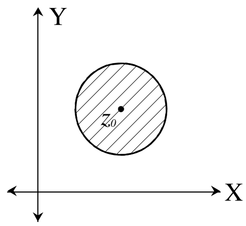
Es punto frontera del conjunto.

El conjunto de puntos frontera de un conjunto dado se denomina la frontera del mismo.
En el ejemplo 3:
la frontera: $\underbrace{\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) > 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) = 0\}}_{\text{línea horizontal}} \cup \underbrace{\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) = 0 \ \wedge \ \mathrm{Im}(z) < 0\}}_{\text{línea vertical}}$

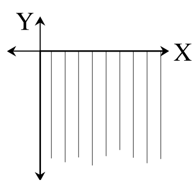
La frontera del ejemplo 4: $\{z / |z - z_0| = r_1\} \cup \{z / |z - z_0| = r_2\}$

IV. Conjunto cerrado: un conjunto se dice cerrado si a él le pertenecen todos sus puntos frontera.

El ejemplo 1 no es cerrado.
El ejemplo 2 no es cerrado.
El ejemplo 3 no es cerrado (aunque parte le pertenece y parte no le pertenece).



Es un conjunto cerrado y también acotado.
Lo acotado no se contrapone con lo cerrado y lo no acotado no se contrapone con lo no cerrado.



$\{z/x \geq 0 \wedge y = 0\} \cup \{z/x = 0 \wedge y \leq 0\}$
Es no abierto, no acotado, es conexo simple y es cerrado.

Dominio: se llama así a todo conjunto abierto y conexo.
Ejemplo 1: el entorno y también el reducido.
Ejemplo 2 : es dominio.
Ejemplo 3: no es dominio.

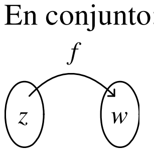
Región: se denomina así del plano complejo tanto a un dominio como a un dominio más una parte o toda su frontera. En toda región su interior es siempre un dominio.

<u>Función compleja: de una variable compleja</u>

Definición: dado un conjunto A incluido en el conjunto de los complejos, se denomina función compleja de una variable compleja con dominio en A y con valores en $\mathbb{C}$, a toda ley que haga corresponder a cada uno de los elementos de A un único elemento en $\mathbb{C}$.
$f : A \to \mathbb{C}$
$z \in A \qquad w \in \mathbb{C} \qquad \Rightarrow f(z) = w$
Se conviene llamar a z variable independiente, y a w variable dependiente.

El recorrido de la función es el conjunto de imágenes de los elementos del conjunto A, según la ley f. También se lo denomina imagen del conjunto A dado por f.
$R : f(A) = \{w \in \mathbb{C} / w = f(z),\ z \in A\}$

En conjunto:



Ejemplo de funciones en el campo complejo:

$w = f(z) = \dfrac{1}{z} \qquad A:\{z \in \mathbb{C} / z \neq 0\}$

$w = f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} \qquad A:\{z \in \mathbb{C} / z^2+1 \neq 0\}$

$z^2 + 1 = 0$

$z^2 = -1 \Rightarrow z = \sqrt{-1} = \pm \boldsymbol{i}$

$= \{z \in \mathbb{C} / z \neq \boldsymbol{i} \wedge z \neq -\boldsymbol{i}\}$

Función racional entera de grado n: si n es un número natural definimos la función racional entera de la siguiente manera:

$f(z) = a_0.z^n + a_1.z^{n-1} + a_2.z^{n-2} + ... + a_{n-1}.z + a_n$

Donde $a_0....a_n$, son en general números complejos.

Ejemplo:

$f(z) = \boldsymbol{i}\ z^3 + \dfrac{2}{3} z + 4$

Observar que:
Los valores de z que hacen nulo al polinomio se denominan ceros del mismo.
Un polinomio en el campo complejo tiene a lo sumo tantos ceros como unidades tiene su grado.

Función racional fraccionaria: se denomina así al cociente entre dos polinomios, donde el polinomio del denominador tenga grado distinto de uno.

$f(z) = \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)} \qquad \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N},\ m \neq 0 \end{array}$

Los ceros de estas funciones son los ceros del numerador que no anulen también al denominador. El dominio es el conjunto de valores que no anulen al denominador $Q_m(z)$, o también es el conjunto de valores de z que no hacen cero al denominador.

Forma binómica de una función compleja de una variable compleja.

Sea: $z : x + y\boldsymbol{i} \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$

Vemos en esta función que z es función de $x \wedge y$. Por lo tanto, en la función $w = f(z)$, w será función de $x \wedge y$. Pero como también w es función de un número complejo también, podemos escribirla en forma binómico y también en función de $x \wedge y$.

$w = f(z) = f(z + y\boldsymbol{i}) = u(x, y) + \boldsymbol{i}\ v(x, y) \qquad u, v:$ función de dos variables reales

$\text{Re}(w) = u(x, y)$

$\text{Im}(w) = v(x, y)$

Ejemplo:

$w : f(z) = z^2 \qquad z : x + y\boldsymbol{i}$

$w : (x + y\boldsymbol{i})^2 = x^2 + 2xy\boldsymbol{i} + y^2(-1) = (x^2 - y^2) + 2xy\boldsymbol{i}$

$\text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$

$\text{Im}(z^2) = 2xy$

Si: $\left.\begin{array}{l} u(x, y) = 3x^2 - 2y + 1 \\ v(x, y) = sen\ x \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) = (3x^2 - 2y + 1) + \boldsymbol{i}.sen\ x$

Ejemplo:

$f(z) = w = |z|^2$

$w = |x + y\boldsymbol{i}|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2$

Donde:

$\text{Re}(w) = x^2 + y^2$

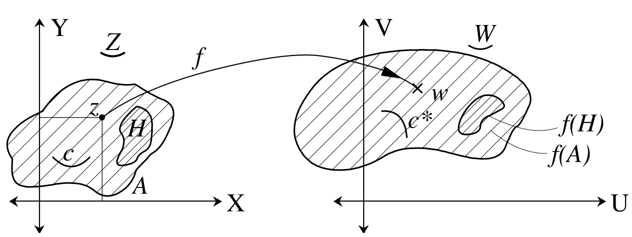
$\text{Im}(w) = 0$

Interpretación geométrica de una función compleja de una variable compleja.

Sea:

$w : f(z) = u(x, y) + \boldsymbol{i}\ v(x, y) \qquad z : x + y\boldsymbol{i} \qquad w \in \mathbb{C}$

Convenimos en representar a w en el plano complejo "Z".



El conjunto imagen es un conjunto del plano complejo Z.
Si en el dominio tiene una curva c, en la imagen tengo una curva c^*.
Si en el dominio tengo un subconjunto H, en la imagen tengo un subconjunto $f(H)$.

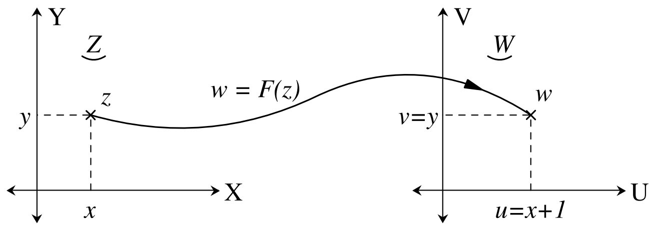
A: Dominio $(f(z))$

Como w se representa en el plano, el dominio se representa también en el plano complejo z.

Se define como una aplicación o transformación de puntos del plano complejo Z, en puntos del plano W, entendiendo por transformación a toda ley o regla que asocie a cada punto del plano complejo Z, en el dominio, un único punto del plano W, en el conjunto imagen del dominio.
A veces para analizar características de una cierta función dada es conveniente analizar las imágenes de subconjuntos incluidos en el dominio de esa función.

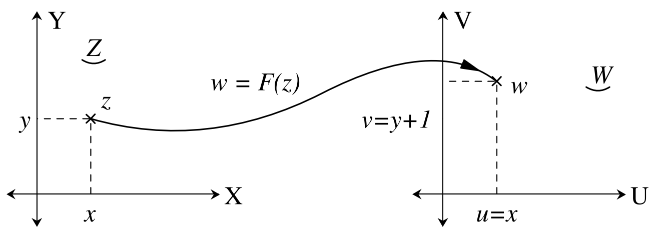
Transformaciones.

a) La función lineal $w = F(z) = z + 1$ efectúa un desplazamiento de los puntos del plano complejo Z de una unidad hacia la derecha.



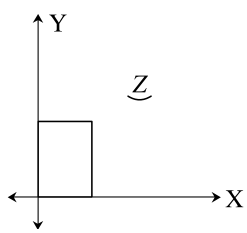
$$w = F(z) = x + 1 + \boldsymbol{i}y \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = x + 1 \rightarrow \text{desplazamiento una unidad} \\ \operatorname{Im}(w) = y \end{cases}$$

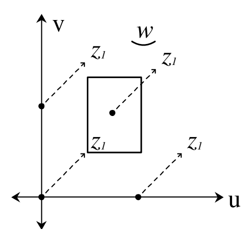
b) La función $w = F(z) = z + \boldsymbol{i}$ efectúa una traslación de los puntos del plano Z de una unidad hacia arriba.



$$w = F(z) = z + \boldsymbol{i} = (x + \boldsymbol{i}y) + \boldsymbol{i} = x + (y+1)\boldsymbol{i} \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = x \\ \operatorname{Im}(w) = y + 1 \rightarrow \text{desplazamiento una unidad} \end{cases}$$

c) En general, la Función $w = F(z) = z + z_1$, donde z_1 es cualquier número complejo, aplica o transforma a una región del plano complejo en otra, de la <u>misma forma y orientación</u> que la anterior, aunque cada punto ha sufrido una traslación dirigida según el vector posición de z_1.





d) La función lineal $w = z_2.z$, donde z_2 es cualquier número complejo, es una transformación que consiste en un giro del mismo valor que el argumento de z_2 y multiplicación por una constante que es el módulo de $|z_2|$.

Si $z = \rho_\theta$; $\quad w = f(z) = z_2.z$; $\quad z_2 = \rho_{2_{\theta_2}}$

$$w = z.z_2 = R_\varphi \begin{cases} R = \rho.\rho_2 \\ \varphi = \theta + \theta_2 \end{cases}$$

Representaciones conformes.

Se dice que una aplicación o transformación del plano complejo es conforme cuando conserva los ángulos.

En general, las figuras geométricas del plano $\underline{Z}$ sufren una rotación, un aumento / disminución de tamaño en el plano $\underline{w}$ siempre que se les aplique una transformación definida por una función analítica. Toda transformación conforme transforma curvas ortogonales en curvas ortogonales.

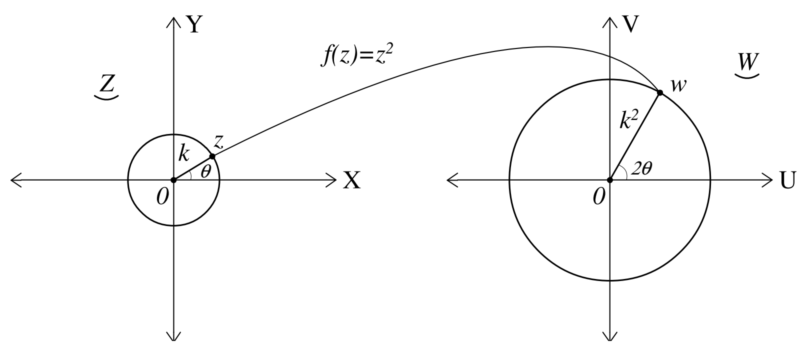
Sea por ejemplo $w = f(z) = z^2$

Hallar las imágenes de los subconjuntos siguientes, que están incluidos en su dominio.

$Dom(z^2) \subset \mathbb{C}$ más estrictamente $Dom(z^2) = \mathbb{C}$

Curva C $\underset{w=f(z)}{\longrightarrow}$ Curva C*

a) $c : \left\{ z \in \mathbb{C} / |z| = k, \;\; k \in \mathbb{R}^+ \right\}$



Dominio Z

$z_1 = x + y\boldsymbol{i} = \rho_\theta$

$|z| = k, \quad k \in \mathbb{R}^+$

$0 \le \theta \le 2\pi$

Imagen W

$w = z^2 = (\rho_\theta)^2 = \rho^2{}_{2\theta} = R_\varphi$

$R = \rho^2 = k^2, \quad k \in \mathbb{R}^+$

$0 \le \theta \le 4\pi$

Conclusión:

$c^* = \left\{ w \in \mathbb{C} / |w| = k^2, k \in \mathbb{R}^+ \right\}$ La función $w = f(z) = z^2$ transforma una circunferencia de radio k en otra de radio k^2.

b) $c:\{z\in\mathbb{C}/\arg z=k,\ \ k\in\mathbb{R}\}$

Dominio Z

$z=\rho_\theta/\theta:\arg z=k$

$\rho\in\mathbb{R}^+$

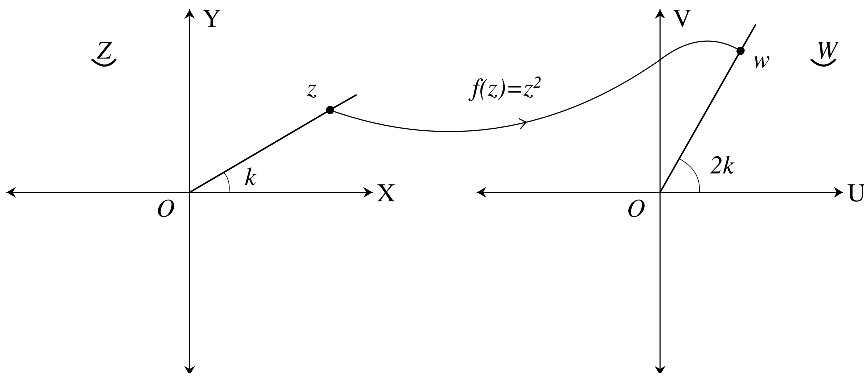
$R=|w|\in\mathbb{R}$

Imagen W

$w=f(z)=z^2=(\rho_\theta)^2=\rho^2{}_{2\theta}=R_\varphi$

$\varphi=\arg w=2\theta=2k,\quad k\in\mathbb{R}$

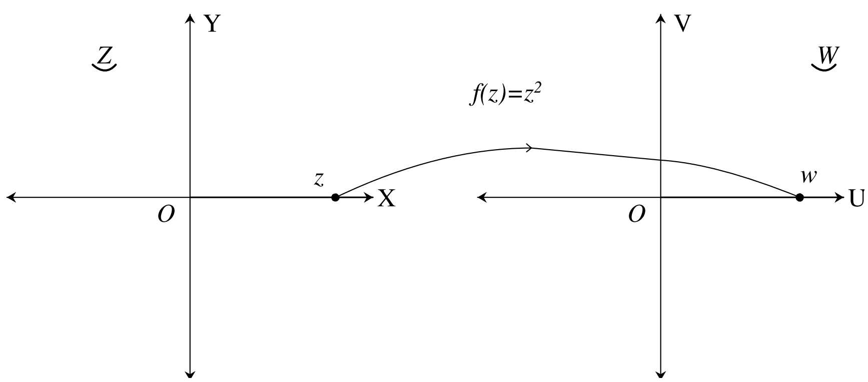
$R=|w|\in\mathbb{R}$



$c^*:\{w\in\mathbb{C}/\arg w=2k,\ \ k\in\mathbb{R}\}$ La función $w=f(z)=z^2$ transforma la semirrecta r de argumento k en otra r* de argumento 2k.

c) Casos particulares del anterior.

$c:\{z\in\mathbb{C}/\,y=0,\ x>0\}$ *en polares* $c:\{z\in\mathbb{C}/z=\rho_\theta,\ \rho>0,\theta=\arg(z)=0\}$



Dominio Z

$z:x+y\boldsymbol{i}$

Imagen W

$w=z^2=R_\varphi$

$w=\rho^2_{(2\theta)}$

$c^*=\{w\in\mathbb{C}/\arg w=0\}$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$R=\rho^2=x^2+\underbrace{y^2}_{0}\quad si\ x>0$

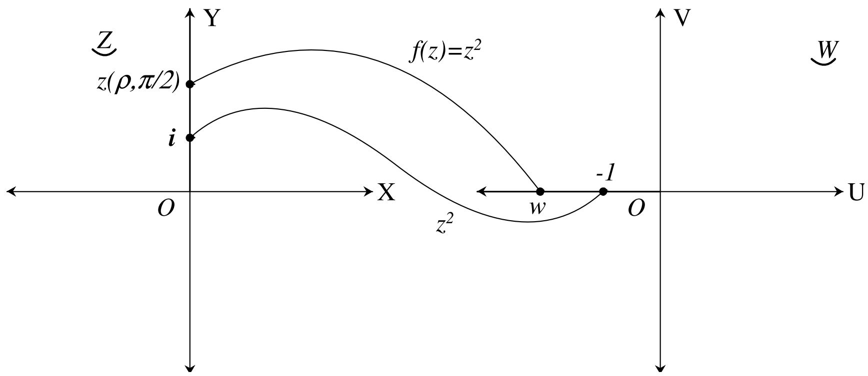
$\boxed{\rho>0}$

$\arg z=y/x$

$2\theta=\boxed{\varphi\to 0}$

La función $w=f(z)=z^2$ transforma puntos del semieje positivo de la variable $\boldsymbol{x}$ en puntos del semieje positivo de la variable $\boldsymbol{u}$.

$c:\{z\in\mathbb{C}/x=0\wedge y>0\}$



Dominio $\underline{Z}$

$z: x+y\boldsymbol{i}=\rho_\theta$

$\rho>0;\quad \theta=\pi/2$

Imagen $\underline{W}$

$w: z^2=\rho^2_{2\theta}$

$R=\rho^2>0$

$\varphi=2\theta=2.\pi/2=\pi$

$c^*=\left\{w\in\mathbb{C}/\arg w=\pi;\quad \rho>0\right\}$ La función $w=f(z)=z^2$ transforma puntos del semieje positivo de la variable ***y*** en puntos del semieje negativo de la variable ***u***.

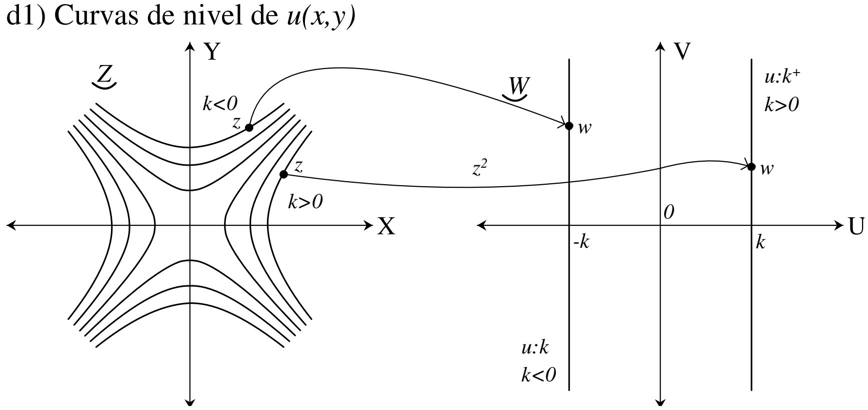
d) Hallar las imágenes según la misma función de las curvas de nivel de las componentes imaginarias de $w: z^2$.

$Dom\left(z^2\right)=\mathbb{C}$

$c_1=\left\{z\in\mathbb{C}/z\in \text{curvas de nivel de } u(x,y)\right\}$

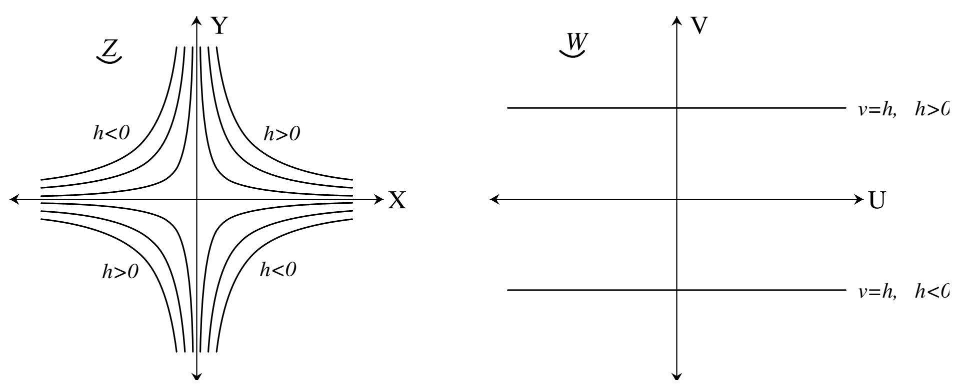
$c_2=\left\{z\in\mathbb{C}/z\in \text{curvas de nivel de } v(x,y)\right\}$

d1) Curvas de nivel de *u(x,y)*



Dominio Z	Imagen W
$z : x + y\boldsymbol{i}$	$w : z^2 = (x + y\boldsymbol{i})^2 = (x^2 - y^2) + 2xy$ $u(x, y) = x^2 - y^2$ $v(x, y) = 2xy$
$c_1 \to x^2 - y^2 = k, \quad k \in \mathbb{R} \quad y = \pm\sqrt{x^2 - k}$ $c_2 \to 2xy = h, \quad h \in \mathbb{R} \quad y = \dfrac{h}{2x}$	$w/u : k$ $w/v(x, y) = h$

d2) Curvas de nivel de $v(x,y)$

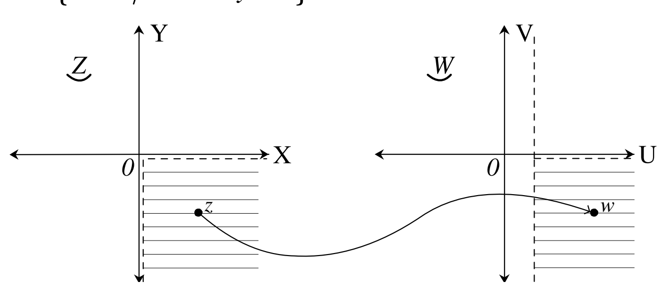


para cada h una hipérbola distinta.

Ejemplo N° 2:

Hallar la imagen del conjunto de puntos complejos según la función $f(z) = w = 2z + 1$

$c = \{ z \in \mathbb{C} / x > 0 \wedge y < 0 \}$



en z)

$$z = x + y\boldsymbol{i} \qquad x > 0,\ y < 0$$

en w)

$$w = 2z + 1 = 2(x + y\boldsymbol{i}) + 1 = 2x + 2y\boldsymbol{i} + 1$$
$$w = u(x, y) + v(x, y) = (2x + 1) + 2y\boldsymbol{i}$$
$$\left.\begin{array}{llll} u = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{u-1}{2} & > 0 & u - 1 > 0; & \boxed{u > 1} \\ v = 2y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v}{2} = y & < 0 & \dfrac{v}{2} < 0; & \boxed{v < 0} \end{array}\right\} c^*$$

$$c^* = \{ w \in \mathbb{C} / u > 1, v < 0 \}$$

<u>Ejemplo N° 3:</u>
Imagen de $z: f(z) = z - 3$

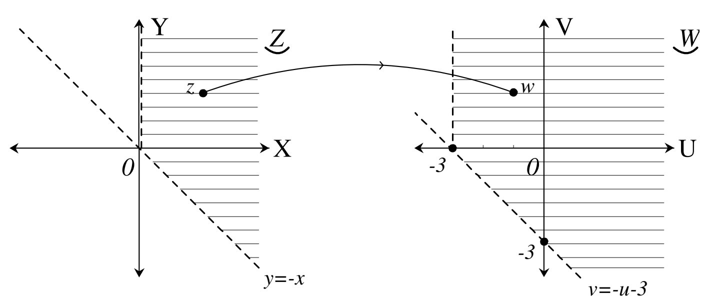
$$c = \left\{ z \in \mathbb{C} \Big/ \begin{array}{l} x + y > 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} y > -x \\ x > 0 \end{array}$$

$$z = x + y\boldsymbol{i}$$
$$w = f(z) = z - 3 = x + y\boldsymbol{i} - 3 = (x - 3) + y\boldsymbol{i}$$
$$\left.\begin{array}{l} u(x, y) = x - 3 \\ v(x, y) = y \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = x + y - 3 \Rightarrow x + y = u + v + 3$$

Las condiciones en z: $\begin{Bmatrix} x + y > 0 \\ x > 0 \end{Bmatrix}$

Las condiciones en w: $\begin{Bmatrix} \boxed{u + v + 3 > 0} \\ u + 3 > 0 \\ \boxed{u > -3} \end{Bmatrix}$

$$c^* \{ w \in \mathbb{C} / u + v + 3 > 0 \ \wedge \ u + 3 > 0 \}$$



Límite de una función compleja de una variable compleja:

Sea una función $f(z)$ definida en un dominio D, incluido en el conjunto de los complejos y z_0 un punto que pertenece a D, y podría ocurrir en particular que $f(z)$ podría no estar definida en z_0.

Definición: se dice que el número L complejo es el límite de $f(z)$ para $z \to z_0$, y se simboliza así:

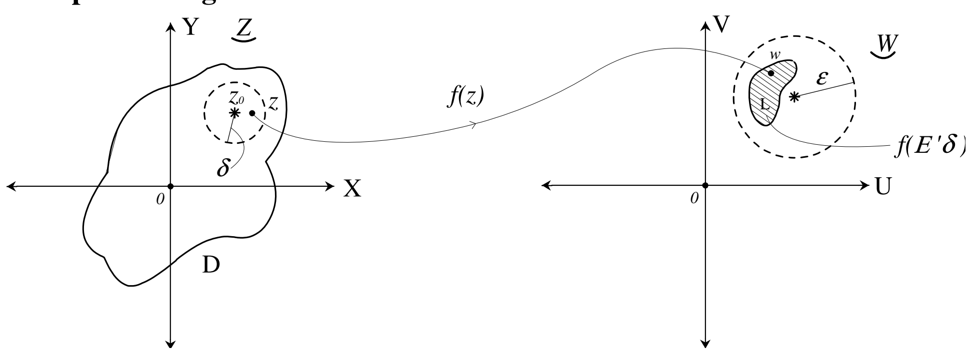
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$

Si y sólo si para todo entorno con centro L y radio ε $(\varepsilon \in \mathbb{R}^+)$ existe en correspondencia con él un entorno reducido al centro z_0 y radio δ $(\delta \in \mathbb{R}^+)$/ que para todo z perteneciente a este entorno reducido su imagen pertenezca al entorno de centro L y radio ε.

Simbólicamente:

$\forall \mathrm{E}(L,\varepsilon), \exists \mathrm{E}'(z_0,\delta) / f\left(\mathrm{E}'(z_0,\delta)\right) \subset \mathrm{E}(L,\varepsilon)$

Interpretación geométrica.



La existencia del $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L = u_0 + \mathrm{i}.v_0$ implica la existencia simultánea de los dos límites de las funciones reales $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(z) = u_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(z) = v_0$$

Función infinitésima en un punto.

Una función compleja se dice infinitésima en z_0 si en ese punto el límite de $f(z)$ es cero.

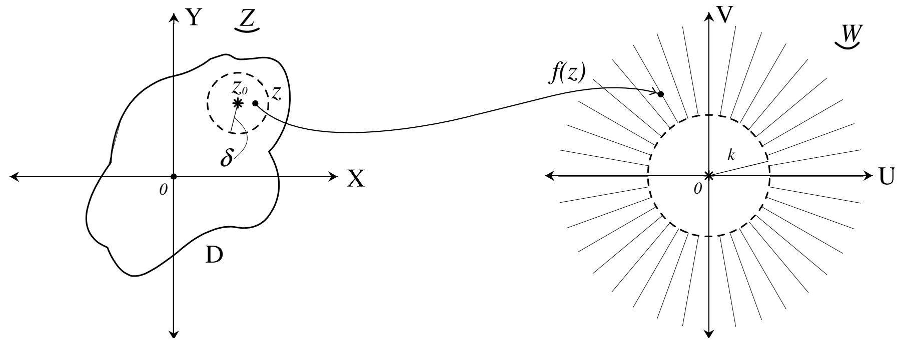
$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$

Límite infinito en z_0:

Se dice que el $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ si se verifica que fijado un número real k (+) en correspondencia con él para todo entorno reducido de centro z_0 y radio δ resulta que las imágenes de los puntos de ese entorno reducido pertenece al exterior del entorno de $f(z)$ y radio k.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall k > 0, \exists \delta > 0 / \forall z \in \mathrm{E}'(z_0, \delta) : \left| f(z) \right| > k$$

Gráficamente:



1) La definición de límite infinito dada antes no expresa condiciones a la forma de tender z a z_0, por lo tanto si el límite existe por cumplir dicha definición, ese límite es único y es el mismo, cualquiera sea la forma de tender z a z_0.

2) Las operaciones con límite de funciones de variables complejas cumplen con las mismas propiedades que ya conocemos para los límites de varias variables. Y eso se debe a que las definiciones de límite son formalmente análogas.

Relación entre límite de una función de variable compleja y los límites de sus componentes reales e imaginarias.

$w = f(z) = u(x, y) + \boldsymbol{i}v(x, y)$ $\qquad z_0 = x_0 + \boldsymbol{i}y_0$ $\qquad z = x + \boldsymbol{i}y$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L = L_1 + L_2\boldsymbol{i} \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = L_1$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = L_2$$

Continuidad de una función compleja en un punto.

$$f(z) \text{ cont. en } z = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \\ \exists f(z) \\ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z) \end{cases}$$

$$f(z) \text{ cont. en } z = z_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall z \in \mathrm{E}(z_0, \delta) : \left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon$$

$$f(z) \text{ cont. en } z = z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \left[f(z) - f(z_0) \right] = 0$$

Las propiedades de las funciones complejas son análogas a las de funciones de varias variables.

Continuidad en un dominio.

Una $f(z)$ es continua en un dominio si es continua en cada uno de los puntos de ese dominio.

$f(z)$ es cont. en $D \Leftrightarrow f(z)$ es cont. $\forall\ z \in D$

Relación entre una función continua y la continuidad de sus componentes real e imaginaria.
Si $f(z)$ es continua en z_0 siendo $f(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}v(x,y)$.

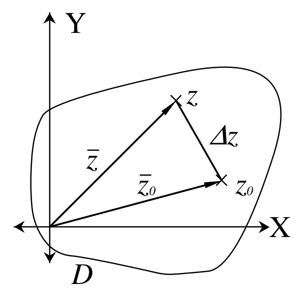
$f(z)$ cont. en $z_0 \Leftrightarrow u(x,y)$ y $v(x,y)$ cont. en (x_0, y_0) $\qquad z_0 = x_0 + \boldsymbol{i}y_0$

$z = x + \boldsymbol{i}y$

Ejemplo:
$w = Sen(xy) + 2x\boldsymbol{i}$ es continua para cualquier valor de z porque sus funciones son continuas para todo los valores de x e y.

Derivada de una función compleja de variable compleja en un punto.
Para definir este concepto consideremos una $f(z)$ definida en un conjunto D, y sea z_0 un punto de ese dominio D y formemos la siguiente expresión:v

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$



Si existe el límite de esta expresión y es finito para $z \to z_0$, entonces dicho límite recibe el nombre de derivada de la función $f(z)$ en el punto z_0.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

$$f'(z_0) = D\left[f(z_0)\right] = D\left[f(z)\right]_{z=z_0}$$

$$w = f(z)$$

$$f'(z_0) = w'(z_0) = D\left[w(z_0)\right] = D\left[w(z)\right]_{z=z_0}$$

Se puede observar que la definición que acabamos de dar significa un límite, si la derivada en z_0 existe éste es único y es el mismo cualquiera que sea la forma de tender z a z_0.

Otra forma de escribir la derivada.
$\Delta z = z - z_0 \Rightarrow z = z_0 + \Delta z$
Reemplazando:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Función derivada.
$w : f(z)$ está definida en un dominio D y tiene derivada en cada punto del dominio, entonces queda definida una función que se denomina $f'(z)$ en D, que simbolizamos:

$f'(z),\ \forall z \in D,\ \vee\ z \in D \Rightarrow f'(z)$

Ejemplo de una función que no tiene derivada en ningún punto:
$w = f(z) = \overline{z}$ definida para toda $z \in \mathbb{C}$.

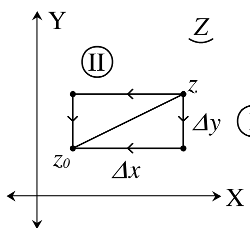
$$f(z)=\overline{z}$$
$$f(z+\Delta z)=\overline{z+\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}$$

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\left(\overline{z+\Delta z}\right)-\overline{z}}{\Delta z}=$$
$$=\frac{\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$z=x+y\boldsymbol{i}$ $\quad\Delta z=\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y$ $\quad\overline{\Delta z}=\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y$ $\quad\Delta z\to 0\Rightarrow\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\qquad(1)$$

Para resolver elegimos dos caminos.



$$\text{(I)}\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\text{(II)}\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-\boldsymbol{i}\Delta y}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\right]=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\boldsymbol{i}\Delta y}{\boldsymbol{i}\Delta y}=-1$$

Como $\text{(I)}\neq\text{(II)}$ significa que no existe el límite planteado, esto implica que no existe su derivada en ningún punto del plano complejo.

Reglas de derivación:
Hemos visto que la definición de límite en el campo complejo es análoga al campo real, por las mismas razones las reglas de derivación son análogas al del campo real.

$$D\left[f(z)+g(z)\right]=f'(z)+g'(z)$$
$$D\left[f(z)\cdot g(z)\right]=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z)$$
$$D\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}\qquad\forall z/g(z)\neq 0$$

Función derivable:
Una función $f(z)$ se dice derivable en un punto z_0 si existe la derivada de $f(z)$ en ese punto, y en un dominio es derivable si existe derivada en cada punto del dominio.

$f(z)$ derivable en $z_0\Leftrightarrow\exists f'(z_0)$

$f(z)$ derivable en $D\Leftrightarrow\exists f'(z),\forall z\in D$

Propiedad:

Si una función $f(z)$ es derivable en un punto, entonces es continua en dicho punto.

La continuidad de una función en un punto es condición necesaria para la derivabilidad en dicho punto.

H) $\exists f'(z_0)$

T) $f(z)$ cont. en z_0

Para demostrarlo tengamos en cuenta la H) que dice que existe la derivada. Por lo tanto por definición de derivada podemos efectuar el siguiente procedimiento:

-Escribimos la diferencia $f(z)-f(z_0)$ y dividamos y multipliquemos por $(z-z_0)$.

$$f(z)-f(z_0)=\frac{\left[f(z)-f(z_0)\right]}{(z-z_0)}\cdot(z-z_0) \qquad \forall z\neq z_0$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-f(z_0)\right]=\underbrace{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}_{f'(z_0)}\cdot\underbrace{\lim_{z\to z_0}(z-z_0)}_{0}$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)-f(z_0)\right]=0$$

Decimos entonces que $f(z)$ es continua en z_0, que es la tesis.

El contra recíproco de este teorema:

$f(z)$ no es cont. en $z_0 \Rightarrow \nexists f'(z_0)$

Condición necesaria para la existencia de la derivada.

Si $f(z)=u(x,y)+\boldsymbol{i}v(x,y)$ tiene derivada en $z_0=x_0+\boldsymbol{i}y_0$, entonces existen las derivadas parciales primeras de las componentes reales e imaginarias en el punto (x_0,y_0) y además ellas satisfacen en ese punto las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\end{cases}$$

Forma polar:

Si $f(z)=u(r,\theta)+\boldsymbol{i}v(r,\theta)$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

<u>Demostración:</u> partimos de la hipótesis que nos indica la existencia de la derivada de $f(z)$ en z_0. Para ello escribamos el cociente incremental:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=$$

$$f(z)=u+v\boldsymbol{i} \qquad \Delta z=\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y$$

$$f(z_0)=u(x_0,y_0)+\boldsymbol{i}v(x_0,y_0)$$

$$f(z_0+\Delta z)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\boldsymbol{i}$$

$$z_0=x_0+\boldsymbol{i}y_0$$

$$\Delta z=\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y$$

Volviendo al cociente incremental:

$$\frac{f\left(z_0+\Delta z\right)-f\left(z_0\right)}{\Delta z}=\frac{u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)+v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\boldsymbol{i}-\left[u\left(x_0, y_0\right)+\boldsymbol{i}v\left(x_0, y_0\right)\right]}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}$$

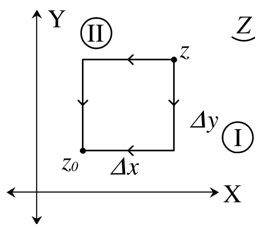
Agrupando parte real e imaginaria:

$$\frac{u\left[\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)\right]+\boldsymbol{i}\left[v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)\right]}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}$$

Luego tomando límite para $\Delta z \to 0$:

$$f'\left(z_0\right)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}+\boldsymbol{i}\,\frac{v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\right] \quad (1)$$

Podemos elegir caminos diferentes para calcular este límite, pero ambos tienen que tener el mismo resultado.



$$\text{(I)}\; f'\left(z_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}+\boldsymbol{i}\,\frac{v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-u\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}+\boldsymbol{i}\,\frac{v\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-v\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}\right]$$

$$\boxed{f'\left(z_0\right)=\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}+\boldsymbol{i}\,\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}} \quad (2)$$

Resolvemos el mismo límite por (II):

$$\text{(II)}\; f'\left(z_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0}\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}+\boldsymbol{i}\,\frac{v\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x+\boldsymbol{i}\Delta y}\right)\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-u\left(x_0, y_0\right)}{\boldsymbol{i}\Delta y}+\boldsymbol{i}\,\frac{v\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-v\left(x_0, y_0\right)}{\boldsymbol{i}\Delta y}\right]$$

$$\boxed{f'\left(z_0\right)=\frac{1}{\boldsymbol{i}}\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}+\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}} \quad (3)$$

Igualando (2) y (3): A la expresión (3) la multiplicamos y dividimos por $\boldsymbol{i}$

$$\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}+\boldsymbol{i}\,\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial x}=-\boldsymbol{i}\,\frac{\partial u\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}+\frac{\partial v\left(x_0, y_0\right)}{\partial y}$$

Dos números complejos son iguales si sus componentes son iguales.

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \wedge \quad -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Estas ecuaciones definen la tesis. $\{$Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Consecuencia de las expresiones (2) **y** (3) **del teorema anterior.**

Obtenemos la expresión anterior para calcular la derivada en z_0 con la condición de que esa derivada existe.

Notemos que el teorema anterior constituye sólo una condición necesaria para la derivada. Es decir, que existan las derivadas parciales de u y v, y ellas satisfagan la ecuación de Cauchy-Riemann no nos permite asegurar que exista $f'(z_0)$.

Podemos utilizar este teorema para analizar posibles puntos de existencia de derivadas aunque no lo podamos asegurar. Se no se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueedo asegurar que $f'(z_0)$ no existe.

<u>Ejemplo:</u> analizar en que punto puede tener derivadas la función:

1)

$$f(z) = e^x \cos y + \boldsymbol{i} e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

Usemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann y las que satisfagan sus posibles puntos en los cuales existe la derivada.

$$\begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ e^x \operatorname{sen} y = e^x \operatorname{sen} y \end{cases} \quad \text{se verifican para todo } (x, y)$$

Los posibles puntos donde existen derivadas son todos los puntos del plano complejo Z.

2)

$$f(z) = x^2 + y^2$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x & \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{matrix}\right\} E.C.R. \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \quad (0,0) \rightarrow \text{posible punto en que podría tener derivada}$$

Condiciones suficientes para la existencia de derivada de una función en un punto.

$$f(z) = u(x, y) + \boldsymbol{i} v(x, y) \qquad z_0 = x_0 + y_0 \boldsymbol{i}$$

Si en el punto (x_0, y_0) las funciones u y v son continuas y tienen sus derivadas parciales primeras continuas y si en ese punto satisfacen las ecuaciones Cauchy-Riemann, entonces existen (x_0, y_0) y por lo tanto podrá ser calculado con las expresiones (2) y (3) del teorema anterior.
En el ejemplo $1)$ observamos que las funciones u y v son continuas para todo (x, y). Las primeras derivadas son también continuas para todo (x, y). Existen las derivadas $f(z)$ para todo z. Veamos cual es:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + \boldsymbol{i}e^x \operatorname{sen} y$$

Notemos que esta derivada es igual a la función dada.

$$f(z) = e^x \cos y + \boldsymbol{i}e^x \operatorname{sen} y = f'(z)$$

En el ejemplo $2)$ observamos que las funciones u y v son continuas para todo (x, y), y las primeras derivadas también lo son. Aseguro que las funciones tienen derivadas en el punto $(0,0)$. Su valor lo calculo con (2).

<u>Funciones analíticas:</u> definiciones.
Dada una $f(z)$ se dice que es analítica en un punto z_0 si existe un entorno de z_0 en que dicha función admite derivada.

Con referencia a los ejemplos $1)$ y $2)$ anteriores:
La $f(z)$ del ejemplo $1)$ es analítica en todo punto del plano complejo porque tenía derivada en todos esos puntos. Luego podemos decir que existe un entorno para cada punto de $f(z)$ derivado.
La $f(z)$ del ejemplo $2)$ no es analítica, porque sólo tiene derivada en el punto $(0,0)$ y no en un entorno del mismo.

Función analítica de un dominio.
Si una función es analítica en todos los puntos del dominio se dice que es analítica en el dominio. También es analítica en el dominio si tiene derivada en todos los puntos del mismo, porque en cada punto podemos definir un entorno.

Función entera.
Se llama así a toda función que sea analítica en todo punto del plano complejo Z. La exponencial es entera.

Condiciones necesarias para que sea una función analítica en un dominio.
Son las mismas que las condiciones necesarias para las derivadas pero no en un punto, sino en un entorno del plano complejo Z.

1. Si una función es analítica en un entorno (dominio) de un punto, entonces es continua en él.
2. Si una función es analítica en un dominio entonces sus partes reales e imaginarias tienen derivadas parciales primeras que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann que las satisface en todo punto del dominio.

Condiciones suficientes para que una función sea analítica en un dominio.

Se corresponden con las condiciones de existencia de derivada, sólo que no en un punto sino en un dominio.

1. Si $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ verifica que u y v son continuas y también lo son sus derivadas parciales primeras en todo punto de un dominio, y además en esos puntos satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces $f(z)$ es analítica en ese dominio.

   Otras condiciones pueden expresarse con referencia a las reglas de derivación, aplicándolas en un dominio.
   a. Si dos funciones son analíticas en un dominio, entonces su suma y producto son analíticos en el mismo dominio.
   b. Si dos funciones son analíticas en un dominio su cociente es analítico en todo punto del mismo dominio, donde no se anule el denominador

Propiedad fundamental de las funciones analíticas.
Si una función es analítica en cierto dominio D, entonces posee en el mismo derivadas de todo orden, y ellas son también funciones analíticas en el mismo dominio, además, sus partes reales e imaginarias admiten derivadas parciales de cualquier orden en el dominio y todas son funciones continuas en el mismo.

Funciones armónicas.
Una función real $u(x,y)$ se dice armónica en un dominio D, si y sólo si admite derivadas parciales segundas continuas en D, y demás ellas satisfacen la ecuación siguiente:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$ Ecuación de Laplace

Ejemplo: $u=x^2-2y^2$

$$\left.\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x & ; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-4y & ; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-4 \end{array}\right\}\text{Cont. } \forall\ (x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-4=-2\neq 0$$ No satisface la ecuación de Laplace, no es armónica para ningún punto del dominio.

Ejemplo: $u=e^x\cos y$

$$\left.\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y & ; & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\operatorname{sen} y \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cos y & ; & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cos y \end{array}\right\}\text{Cont. } \forall\ (x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^x\cos y-e^x\cos y=0 \qquad \forall\ (x,y)$$ La función es armónica para todo (x,y).

Propiedad:
Si una función compleja $f(z)$ es analítica en un dominio D, entonces sus componentes real e imaginaria son ambas armónicas en D.
H) $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ analítica en D.
T) $u(x,y) \wedge v(x,y)$ armónicas $\forall(x,y)\in D$

Demostración:
$f(z)$ analítica en D por H) $\Rightarrow$ sus componentes reales e imaginarias son tales que poseen derivadas parciales primeras y segundas en D y además las derivadas son continuas en D, por las propiedades características de las funciones analíticas, además de satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Lo anterior nos indica que tanto u como v satisfacen en D la definición de armónica en lo relativo a la continuidad, nos falta mostrar que también satisfacen ambas las ecuaciones de Laplace.
La (1) la derivamos con respecto a "x" y a (2) con respecto a "y".

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \end{array}\right\}\text{sumando}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0$$

Esta suma nos da cero por el teorema de Schwartz
Entonces decimos que la función u es armónica en D.

Si (1) derivo con respecto de y, y (2) con respecto a x:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{array}\right\}\text{sumando}=\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}_{0}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

Conclusión: v es armónica en D.
Así el teorema queda demostrado.

<u>Funciones armónicas conjugadas</u>
Dadas dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ ambas armónicas en un cierto dominio D, ellas se dicen armónicas conjugadas si la función $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ es analítica para todo punto del dominio D, también se dice que una de ellas es conjugada de la otra.
La definición anterior también implica que las componentes reales e imaginarias de la función analítica de dominio D son armónicas conjugadas en el mismo.

Ejemplo:

$f(z) = x^2 - y^2 + \boldsymbol{i}e^x \cos y$

$u = x^2 - y^2$ $\qquad$ $v = e^x \cos y$ $\qquad$ v es armónica $\forall(x, y)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^x.\cos y \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -e^x.\cos y \end{aligned}\right\}$$

Son continuas $\forall(x, y)$ y su suma es igual a 0 $\forall(x, y)$.
Entonces v(x,y)= $e^x.\cos y$ es armónica $\forall(x, y)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Son continuas $\forall(x, y)$ y su suma es igual a 0 $\forall(x, y)$.
Entonces u(x,y)= $x^2 - y^2$ es armónica $\forall(x, y)$.

Con la definición anterior podemos decir que u y v son armónicas conjugadas para todo (x, y) que pertenece a D.
Para que u y v sean armónicas $f(z)$ debe ser analítica $\forall(x, y)$ perteneciente a D.

Problema:

Dada $u(x, y)$ armónica $\forall(x, y) \in D$ (simplemente conexo), hallar sus armónicas conjugadas $\forall(x, y)$.

$u \wedge v / f(z) = u + v\boldsymbol{i}$ sean analíticas en D.

En tal caso para que $f(z)$ sea analítica, u y v tienen que satisfacer las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Además por ser u y v funciones de dos variables, deberá ser su diferencial total:

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy \quad (2)$$

Remplazando (1) en (2).

$$v / \; dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx \frac{\partial u}{\partial x}dy \quad (3)$$

Cuando de una función conozco su diferencial total, en condiciones especiales puedo hallar su primitiva por su integral, pero el diferencial total tiene que ser exacto.
El segundo miembro de (3) es un diferencial total exacto, recordemos que:

$Mdx + Ndy$ es E.D.T.E. $\Leftrightarrow M, N, \dfrac{\partial M}{\partial y}, \dfrac{\partial N}{\partial x}$ son continuas en D (simplemente conexo), además $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, con lo cual existe una función tal que su diferencial total es $df = \dfrac{\partial M}{\partial y}dx + \dfrac{\partial N}{\partial x}dy$.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} M=-\dfrac{\partial u}{\partial y};\ \ N=\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial M}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2};\ \ \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{array}\right\}\text{cont. en } D$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \text{ porque }\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \text{ pues } u \text{ es armónico en } D.$$

En consecuencia, al ser la expresión (3) diferencial total exacta, a integral curvilínea de ella entre puntos cualesquiera del dominio D es independiente de la trayectoria que los une y por lo tanto dicha integral define, dejando uno de los puntos fijo y el otro variable, una función del extremo variable que se denomina función potencial. Es decir que integrando en (3):

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy}\qquad (4)\qquad (x_0,y_0)\in \text{a } D$$

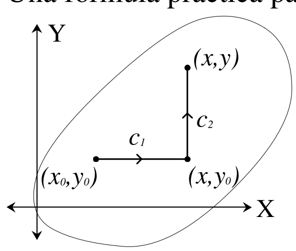
Se puede demostrar que (4) con la u dada, satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, con lo cual podemos asegurar que $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ es analítica en D y por lo tanto v es armónica conjugada de u con lo que el problema queda resuelto.

La expresión (4) tiene la forma:

$$\boxed{v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\underbrace{-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy}_{\text{(A)}}+C}\qquad (5)\qquad C\in\mathbb{R}$$

Con lo cual las funciones armónicas conjugadas son infinitas.

Una fórmula práctica para resolver la integral de (4) y (5) es la siguiente:



$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)}\text{(A)}+\int_{(x,y_0)}^{(x,y)}\text{(A)}$$

$$c_1\Rightarrow y=y_0\Rightarrow dy=0$$

$$=\int_{(x_0)}^{(x)}-\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial x}\cdot 0+\int_{(y_0)}^{(y)}-\frac{\partial u(x_0,y)}{\partial x}dy-\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\cdot 0$$

$c_2\Rightarrow x:x_0\Rightarrow dx=0$

$$\boxed{v(x,y)=\int_{x_0}^{x}-\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dy+C}$$

<u>Ejemplo:</u>

Dada la función $u(x,y)=x^2-y^2$ armónica $\forall(x,y)$, hallar sus armónicas conjugadas.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2y\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2x$$

$$v(x,y)=\int_0^x[+2y]_{(x,0)}dx+\int_0^y[2x]_{(x,y)}dy+C=2x\int_0^y dy+C=2xy\Big]_0^y+C=\boxed{2xy+C}$$

Existen infinitas funciones armónicas conjugadas.

Hallar la armónica conjugada de u tal que $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ verifique que $f(1+\boldsymbol{i})=10$ (Hallar $C=cte\ \mathbb{R}$)

$u=x^2-y^2$

$v=2xy+C$

$f(z)=u+v\boldsymbol{i}=(x^2-y^2)+\boldsymbol{i}(2xy+C)$ analítica $\forall z$

$z=1+\boldsymbol{i} \qquad \Rightarrow \quad x=1;\ y=1$

$f(1+\boldsymbol{i})=10 \quad \Rightarrow \quad 0+\boldsymbol{i}(2+C)$

Como $10+0\boldsymbol{i}=0+\boldsymbol{i}(2+C)$ no hay ninguna armónica de la función $(2xy+C)$, o no hay valor de C tal que satisfaga la armónica $(2xy+C)$.

Cuál es la función analítica $f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ tal que $f(1+\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}$

$f(1+\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}=0+\boldsymbol{i}(2+C)$ como $\quad 0+\boldsymbol{i}=0+\boldsymbol{i}(2+C)$

$$\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}(2+C)$$

$$\boxed{C=-1}$$

Entonces:

$$\boxed{f(z)=(x^2-y^2)+\boldsymbol{i}(2xy-1)}$$

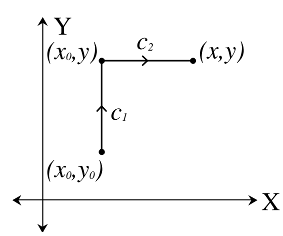
El problema inverso es: dada la componente imaginaria $v(x,y)$, armónica en D, hallar la parte real de la función analítica $f(z)$.

$u \wedge v \big/ f(z)=u+v\boldsymbol{i}$ analítica en D.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right. \qquad (1)$$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad (2)$$

$$u\big/ \quad du=\underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy}_{\text{E.D.T.E.}\Leftrightarrow\exists\text{ función potencial}} \qquad (3)$$



$$\boxed{u(x,y)=\int_{y_0}^{y}-\frac{\partial v(x_0,y)}{\partial x}dy+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}dx+C}$$

$$\boxed{u=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C}$$

Con esta expresión se pueden hallar las armónicas conjugadas de v.