

## Capítulo 12

# Convección térmica y másica

### Convección térmica

Se estudia en este capítulo principalmente la transmisión de calor por convección, incluyéndose al final un estudio de la transferencia de especies químicas por convección de masa con gradientes de concentración, por el enorme parecido en la formulación matemática de ambos problemas.

Por participar un fluido en movimiento (con-vección=con-el-movimiento), quedan acoplados el problema térmico y el fluidodinámico y habría que resolver las ecuaciones completas de Navier-Stokes para calcular el campo de temperaturas y los flujos de calor, en particular el flujo en la pared  $\vec{q} = -k\nabla_n T$ , donde  $n$  indica que el gradiente se toma en la dirección normal a la pared. Esta enorme dificultad hace que en la práctica ingenieril se limite el estudio casi exclusivamente al flujo global de calor entre el fluido y la pared con la fórmula de Newton (1701):

$$\dot{Q} \equiv hA(T_{pared} - T_{fluido}) \quad (12.1)$$

que define  $h$ , la transmitancia térmica, que se determina con ayuda de correlaciones empíricas obtenidas a partir de los experimentos, aunque cada vez son más numerosos los programas de ordenador para la resolución numérica del problema concreto de que se trate, obteniéndose además del flujo de calor global, su distribución y los campos de temperatura y velocidades en el fluido.

Se va a estudiar también otro problema de convección más complicado: la convección con cambio de fase, pero no se considerarán otros problemas de gran interés, como la convección térmica en gases a altas velocidades (disipación, compresibilidad, bloqueo térmico), ni en gases enrarecidos, ni en metales líquidos (altas temperaturas y flujos de calor a presiones normales), ni en sistemas reactantes, ni en flujos irradiados, ni cerca de la región crítica de los fluidos, ni en lechos fluidizados, ni la inducida por gradientes de tensión superficial o de concentración, convección de Marangoni, etc.

### Convección natural y forzada

Según sea el movimiento originado o no por la transmisión de calor, se distingue entre convección natural, en la cual, si no hubiera  $\nabla T$  no existiría movimiento, y convección forzada, en la cual, aunque no hubiera  $\nabla T$  habría movimiento originado por algún efecto

mecánico (bomba, diferencia de nivel) o térmico (por convección natural en otro sistema). Normalmente se supone que el campo de velocidades en la convección forzada es el impuesto por el agente exterior, pero, sobre todo cuando se imponen bajas velocidades, la contribución por la convección natural puede ser importante.

La convección siempre aumenta el flujo de calor y por eso el parámetro adimensional con que se evalúa, el número de Nusselt<sup>1</sup>

$$Nu \equiv \frac{hL}{k} \quad (12.2)$$

(donde  $h$  y  $k$  son el coeficiente de convección y la conductividad térmica del fluido y  $L$  una longitud característica), es siempre mayor que la unidad, al ser una relación entre convección y conducción.

La convección permite el transporte del calor (en realidad, energía interna térmica) a largas distancias entre la carga térmica y el ambiente térmico que se utilice como sumidero o como fuente. Así, en general, cuando en las aplicaciones de control térmico interese aislar la carga del ambiente convendrá poner un aislante sólido (aunque en casos extremos un flujo forzado separará más), mientras que cuando interese conectar la carga y el ambiente convendrá interponer un fluido (y forzar el flujo si la convección natural no es suficiente).

En general, se supondrá que las propiedades del fluido no dependen de la temperatura (aunque la viscosidad de muchos líquidos depende fuertemente de  $T$  y los errores pueden ser grandes); para gases, si  $0,5 < T_{\text{fluido}}/T_{\text{pared}} < 2$  el error es menor del 10%, pero para líquidos, una vez calculado  $Nu$  con una temperatura de referencia constante, puede ser importante corregir por viscosidad con una ley como la  $Nu/Nu_{ref} = (\mu/\mu_{ref})^{0,14}$ , válida para  $0,005 < \mu/\mu_{ref} < 20$ .

Los fluidos típicos de trabajo en sistemas ingenieriles de convección son:

- fluidos refrigerantes: a temperaturas criogénicas ( $T < 100$  K) el más usado es el nitrógeno líquido; en refrigeración normal se usan los hidrocarburos halogenados (p.e. el diclorodifluorometano, también llamado R-12), aire frío, salmuera y agua fría.
- fluidos caloportadores: a baja temperatura ( $< 300$  °C; industria agroalimentaria y textil) se utiliza principalmente agua y su vapor; a media temperatura ( $300$  °C  $< T < 600$  °C; refinerías) se utilizan aceites minerales, sales fundidas o gases; a alta temperatura ( $> 600$  °C; metalurgia, química, cerámica y vidrio) se utilizan sales y metales fundidos y gases.

En otro orden de cosas, no hay que olvidar que al flujo másico y energético va siempre asociado un flujo de impulso que dará lugar a una pérdida de presión total (conocida como pérdida de carga) a lo largo del movimiento (por disipación viscosa). Este transvase de energía mecánica a energía térmica es insignificante en el balance energético y no se tiene en cuenta, pero es fundamental para el balance mecánico, sirviendo para el dimensionado del

1. Más adelante se aborda en más detalle la problemática de la adimensionalización de los problemas físicos y los 'números' adimensionales.

equipo de bombeo en la convección forzada o para el equilibrio de fuerzas en la convección natural. Su cálculo exige la determinación del campo de velocidades, ya que es proporcional al esfuerzo viscoso  $\vec{\tau}' = \mu \nabla_n \vec{v}$  en la pared.

**Flujo interno y flujo externo**

El interés de la convección térmica se centra en la transmisión de calor entre una pared y el fluido que la baña. Aunque localmente todas las configuraciones son como la de la Fig. 12.1a, cuando se contempla la geometría del sistema global aparecen dos tipos diferentes de configuraciones: flujo externo (como en la Fig. 12.1b) y flujo interno (como en la Fig. 12.1c).

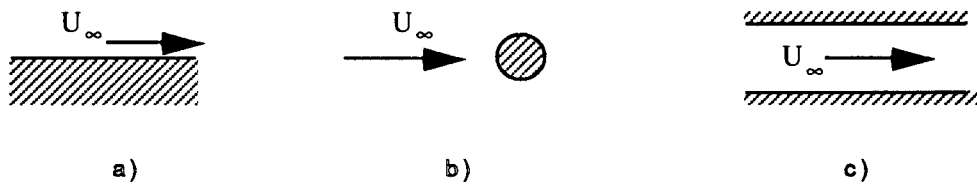


Fig. 12.1. Tipos de geometría del flujo: a) detalle local en cualquier caso, b) ejemplo de flujo externo, c) ejemplo de flujo interno.

La definición de  $h$  en  $\dot{Q} = hA\Delta T$  está sujeta a la especificación del incremento  $\Delta T$  apropiado entre la pared y el fluido, lo cual depende de la geometría de la configuración, y habrá que conocerla cuando se utilicen datos de  $h$  tomados de la bibliografía. Por ejemplo, para las configuraciones de la Fig. 12.1 los  $\Delta T$  que se utilizan son:

- para la geometría a)  $\Delta T = T_w - T_\infty$  (12.3)

donde se supone que la temperatura de la pared,  $T_w$ , y la temperatura del fluido muy lejos de la pared,  $T_\infty$ , están bien definidas;

- para la geometría b).  $\Delta T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_w(\theta) d\theta - T_\infty$  (12.4)

y el caso más complicado es:

- para la geometría c)  $\Delta T = \frac{(T_w - T_b)_{salida} - (T_w - T_b)_{entrada}}{\ln \frac{(T_w - T_b)_{salida}}{(T_w - T_b)_{entrada}}}$  (12.5)

donde a  $T_b$  se le llama temperatura de mezclado del fluido, pues se define como la temperatura que alcanzaría el flujo al extraerlo en un instante dado y dejarlo que se mezclasen sus partes, es decir,  $T_b = \int vT dA / \int v dA$  siendo  $v$  la velocidad en el elemento de sección recta  $dA$ . Nótese que el balance energético enseña que  $T_{b,salida} = T_{b,entrada} + \dot{Q} / (mc_p)$  para un fluido caloríficamente perfecto. En muchos problemas la temperatura del fluido a la salida es incógnita y hay que tomar  $\Delta T = (T_w - T_b)_{entrada}$  en primera aproximación.

### Cálculo de coeficientes de convección

Para calcular  $h$  hay que determinar teórica o experimentalmente  $\dot{Q}$  para la geometría y condiciones de contorno impuestas. Para el cálculo teórico se necesita previamente calcular el campo de temperaturas, y entonces aplicar  $\vec{q} = -k\nabla_n T$  para el fluido en las proximidades de la pared. Para ello hay que resolver el problema termofluidodinámico conjunto, aplicando el balance másico, mecánico y energético y conociendo las propiedades de estado y de evolución del fluido de que se trate. Para simplificar el análisis teórico y para reducir al máximo la cantidad de datos a determinar en los ensayos experimentales, se utilizan parámetros adimensionales (el número de variables adimensionales de un problema es igual al de variables dimensionales menos el de dimensiones físicas independientes en ellos contenidas). Así, en lugar de presentar funciones tal como  $h=h(k, c_p, \rho, \mu, V, g, \alpha, \gamma, L, D$  y otras distancias), se procede a agrupar en parámetros adimensionales tradicionales (llamados "números" porque no tienen unidades), a los cuales se les da nombre propio como se indica a continuación para un caso genérico del tipo b) en la Fig. 12.1:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{hD}{k} = f\left(\text{geometría}, \frac{VD}{\nu}, \frac{\nu}{\alpha}, \alpha g(T_w - T_\infty) \frac{D^3}{\nu^2}, \dots\right) \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \downarrow \qquad \downarrow \\ Nu = f(\text{geometría}, Re, Pr, Gr, \dots) \end{array} \right\} \quad (12.6)$$

siendo  $Nu$  el ya mencionado número de Nusselt (que mide la relación entre el flujo de calor por convección y por conducción),  $Re$  el número de Reynolds (que mide la relación entre las fuerzas de inercia y las viscosas, y caracteriza el tipo de flujo: laminar o turbulento),  $Pr$  el número de Prandtl (que mide la relación entre las difusividades viscosa y térmica del fluido, y es  $\approx 10$  para líquidos,  $\approx 0,7$  para gases y  $\approx 10^{-2}$  para metales fundidos),  $Gr$  el número de Grashof (que mide la relación entre las fuerzas de flotabilidad y las viscosas), etc.

Parece oportuno hacer aquí ciertas consideraciones sobre el análisis dimensional y el adimensional. En la descripción de los fenómenos físicos aparecen ciertos valores característicos de las magnitudes que intervienen, que son los que convendría tomar como unidades para las medidas. ¿Por qué entonces todos los libros de Física empiezan definiendo unas unidades (de longitud, de tiempo, de masa, etc) universales y operan siempre con ellas para cualquier problema (análisis dimensional)? Hay varias razones:

1. Cuando se trabaja con un problema nuevo no se sabe cuáles van a ser sus valores característicos y es preciso empezar tomando unos valores estándar como unidades (p.e. las del S.I.)
2. Cuando se van a considerar varios problemas diferentes a la vez, conviene usar unas unidades comunes para compararlos, aun a costa de estudiar p.e. el movimiento de los planetas y el de las moléculas con el mismo metro.
3. En cualquier caso, siendo el hombre el observador, y teniendo éste sus propias magnitudes características, es lógico que quiera comparar todo con sus dimensiones y elija como unidad de longitud una distancia del orden de su paso, como unidad de

tiempo un periodo del orden del de su latido cardiaco o el tiempo entre pasos al andar, como unidad de masa algo del orden de la de una piedra de las que es capaz de lanzar, etc.

La elección del número y tipo de magnitudes físicas fundamentales (p.e. las 7 del S.I., ver Apéndice 3) es arbitraria; las leyes físicas que ligan magnitudes fundamentales sirven entonces de definición de las constantes de cambio de unidades, y las leyes que ligan magnitudes no fundamentales sirven de definición de sus magnitudes, que se llaman entonces magnitudes derivadas. Así, p.e., se podría quitar el espacio o el tiempo como magnitud fundamental del S.I. y la relación  $L=ct$  (siendo  $c$  la velocidad de la luz) serviría para definir la unidad de una en función de la otra tomando  $c=1$ , y no como actualmente que se define el segundo por una parte y el metro a través de  $L=ct$  con una  $c=cte$  de cambio de unidades, o como antes, en que se definían ambas por su cuenta, y la ecuación  $L=ct$  establecía el valor y las dimensiones de  $c$ .

Al agrupar las variables en 'números' adimensionales como en (12.6), las ecuaciones físicas en las que intervienen  $n$  variables independientes pasan a tener  $n-m$  parámetros adimensionales independientes, siendo  $m$  el número de magnitudes físicas básicas (tiempo, longitud, masa, temperatura,...) que intervienen, lo que se conoce como Teorema  $\pi$  de Buckingham.

Como ejemplo de correlaciones empíricas adimensionales usadas en los cálculos de transmisión de calor por convección, se pueden citar:

- Convección forzada en tubo en régimen laminar ( $Re < 2400$ ):  $Nu \approx 4$  o mejor  $Nu = 1,4(RePrD/L)^{1/3}$  (fórmula de Test, 1968), donde  $L$  y  $D$  son la longitud (que ha de ser suficiente para que los efectos de entrada sean despreciables) y el diámetro (o el diámetro hidráulico equivalente,  $D \equiv 4 \cdot Area / Perímetro$ , si no es circular) del tubo.
- Convección forzada en tubo en régimen turbulento ( $Re > 4000$  y  $Pr > 0,5$ ):  $Nu = 0,023Re^{0,8}Pr^n$  (fórmula de Dittus-Boelter), con  $n=0,4$  para calentamiento y  $n=0,3$  para enfriamiento del fluido, y la misma consideración anterior sobre los efectos de entrada.
- Convección natural exterior a un tubo horizontal, o por encima de una placa caliente, o por debajo de una placa fría:  $Nu = 0,54(Ra)^{1/4}$ , válida para  $10^4 < Ra < 10^7$ , donde  $Ra = PrGr = \alpha \Delta T D^3 / (\nu a)$  es el número de Rayleigh.
- Convección natural exterior a una placa vertical (fórmula de Churchill-Chu):  $Nu^{1/2} = 0,825 + 0,387Ra^{1/6} / [1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{6/27}$ , válida para  $10^{-1} < Ra < 10^{12}$ .

Como valores típicos de  $h$  se pueden citar (todos los valores en  $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ):

- Aire: convección natural  $h \approx 10$ , convección forzada a más de 10 m/s  $h \approx 50$ .
- Agua: convección natural  $h \approx 500$ , convección forzada a más de 10 m/s  $h \approx 10000$ .  
Convección con cambio de fase: natural  $h(\text{ebullición}) \approx 4000$ ,  $h(\text{condensación}) \approx 6000$ ;  
forzada  $h(\text{ebullición}) \approx 30000$ ,  $h(\text{condensación}) \approx 90000$ .

Al utilizar correlaciones empíricas conviene tener presente que la incertidumbre en  $h$  puede ser de  $\pm 30\%$ , o todavía mayor ( $\pm 50\%$  en flujo multifásico), debido a diferencias entre los campos de velocidades de las configuraciones de ensayo.

### Análisis de órdenes de magnitud

A continuación se va a hacer un análisis termofluidodinámico de órdenes de magnitud para los problemas más relevantes: la capa límite térmica (Fig. 12.2a), la convección en el interior de tubos (Fig. 12.2b) y la convección natural en una pared vertical (Fig. 12.2c).

Para ello se usarán las ecuaciones de conservación de la masa (5.26), cantidad de movimiento (5.27) y energía (5.33), que para un fluido newtoniano ( $\tau'_{ij} \equiv \mu(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) - (\frac{2}{3}\mu - \mu_b)\nabla \cdot \vec{v}\delta_{ij}$ , siendo  $\mu$  y  $\mu_b$  los coeficientes viscosos normal y volumétrico) y caloríficamente perfecto ( $c_p = cte$ ) en flujo incompresible ( $\rho = cte$ , pero reteniendo los efectos mecánicos de la flotabilidad), con transmisión de calor según la ley de Fourier ( $\vec{q} = -k\nabla T$  con  $k = cte$  y sin efectos radiativos), toman la forma siguiente (se ha despreciado el calentamiento por fricción viscosa en la ecuación de la energía):

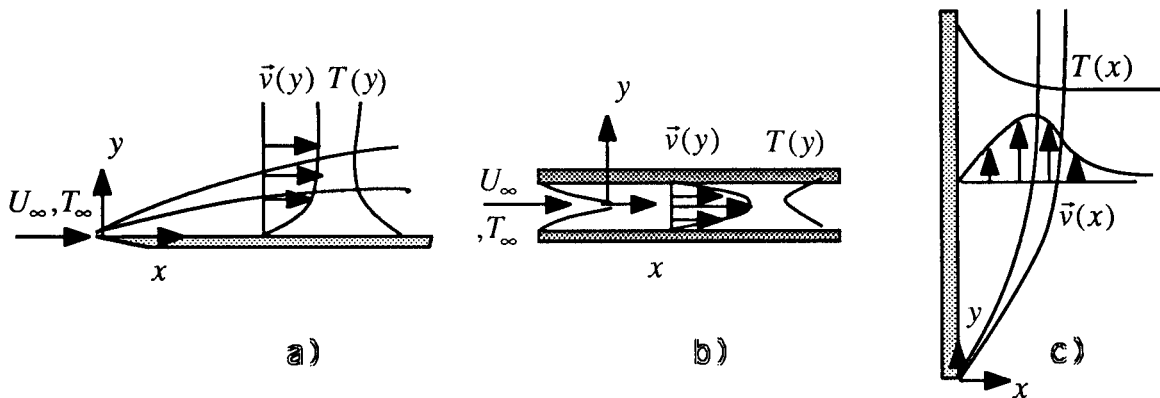


Fig. 12.2. a) Convección forzada en flujo externo en las proximidades de una pared. b) Convección forzada en el interior de un tubo. c) Convección natural en las proximidades de una pared vertical.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \rho_o \frac{D\vec{v}}{Dt} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho_o \vec{g} - \rho_o \vec{g} \alpha (T - T_o) \\ \rho_o c_p \frac{DT}{Dt} &= k \nabla^2 T \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

La aproximación de poner  $\rho = cte = \rho_o$  en todas las ecuaciones excepto en el término  $\rho \vec{g}$ , donde se pone  $\rho \vec{g} = \rho_o [1 - \alpha(T - T_o)] \vec{g}$ , se llama modelo de Businessq.

### Capa límite

Cuando un flujo de velocidad y temperatura uniformes  $U_\infty$  y  $T_\infty$  incide paralelamente a una placa situada en el origen de coordenadas, afilada (para evitar la influencia de la parte

inferior sobre la superior), y a temperatura distinta  $T_w$ , el equilibrio mecánico y térmico local en la vecindad de la placa obliga a que el fluido adquiera allí la velocidad (nula) y temperatura de la placa ( $T_w$ ), apareciendo una capa de transición de la velocidad (capa límite mecánica o hidrodinámica) y de la temperatura (capa límite térmica) del fluido desde las condiciones en la placa a las condiciones en el infinito, creciendo el espesor de esas capas corriente abajo. Los efectos de flotabilidad se suponen despreciables. Se trata de estimar la influencia de la velocidad sobre la transmisión de calor, esto es,  $Nu=f(Re)$ .

Las ecuaciones para el movimiento bidimensional estacionario son (12.7):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

donde ya se ha utilizado el balance mecánico transversal (perpendicular a la pared) para verificar que las variaciones transversales de presión van a ser despreciables (las variaciones longitudinales vendrán impuestas por la geometría de la corriente exterior, y en este caso  $\partial p_\infty / \partial x = 0$ ). El análisis de órdenes de magnitud del balance mecánico longitudinal en (12.8) enseña que:

$$U_\infty \frac{U_\infty}{L} \approx \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} = Re_L^{-1/2} \quad (12.9)$$

que indica que el espesor de la capa límite mecánica,  $\delta$ , crece con la raíz cuadrada de la distancia  $L$  y que disminuye con el número de Reynolds, coincidiendo con el análisis detallado hecho por Blasius en 1908, donde llegó a  $\delta/L = 4,92.Re^{-1/2}$ . De todas formas, según se han puesto los órdenes de magnitud, este análisis no es válido cerca de la punta. Por otra parte, si se define el coeficiente de pérdida de presión total  $c_k$  por:  $\tau = \mu \partial u / \partial y = c_k \rho U_\infty^2 / 2$ , y se sustituyen los órdenes de magnitud anteriores, se llega a que  $c_k \approx Re^{-1/2}$ , prácticamente igual al valor más exacto  $c_k = 1,33.Re^{-1/2}$ .

Si ahora comparamos los órdenes de magnitud del balance energético, pensando que el espesor de la capa límite térmica  $\delta_t$  sea mucho mayor que  $\delta$  y allí se pueda poner  $u \approx U_\infty$ , se tiene:

$$U_\infty \frac{\Delta T}{L} \approx a \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \Rightarrow \frac{\delta_t}{L} \approx \sqrt{\frac{a}{U_\infty L}} = Re^{-1/2} Pr^{-1/2} \Rightarrow \frac{\delta_t}{\delta} \approx Pr^{-1/2} \quad (12.10)$$

que, como se ha supuesto  $\delta_t \gg \delta$ , será sólo válido para  $Pr \ll 1$  (metales líquidos). Como de  $\dot{q} = k \partial T / \partial y = h \Delta T$  y  $Nu = hL/k$ , en este caso se deduce que  $Nu \approx L / \delta_t = (RePr)^{1/2}$ ; experimentalmente se llega a  $Nu = 0,56(RePr)^{1/2}$ .

En el caso en que  $\delta_t \ll \delta$ , se podría aproximar linealmente y poner  $u \approx U_\infty \delta_t / \delta$ , obteniéndose ahora  $\delta_t / \delta = Pr^{-1/3}$  y  $Nu \approx Re^{1/2} Pr^{1/3}$  que, aunque sólo valdría para  $Pr \gg 1$  según la hipótesis

sobre los espesores, en realidad es buena para  $Pr > 0,5$ . Pohlhausen (1921) llegó a la expresión más exacta  $Nu = 0,33.Re^{1/2}Pr^{1/3}$ .

Por otra parte, según se han estimado los órdenes de magnitud, todo este análisis sólo vale para capas límite laminares ( $Re < 10^5$ ). En régimen turbulento se puede usar  $c_k = 0,06.Re^{-1/5}$  y  $Nu = 0,03.Re^{4/5}Pr^{1/3}$  para  $Pr > 0,5$ .

### Interior de tubos

Cuando un flujo de velocidad y temperatura uniformes  $U_\infty$  y  $T_\infty$  incide paralelamente a un conducto circular, con el centro de la sección de entrada situado en el origen de coordenadas, de paredes afiladas (para evitar la influencia de la parte exterior sobre la interior), y a temperatura distinta  $T_w$ , el equilibrio mecánico y térmico local en la vecindad de las paredes obliga a que el fluido adquiera allí la velocidad nula y temperatura  $T_w$ , apareciendo una capa de transición de la velocidad (capa límite mecánica) y de la temperatura (capa límite térmica) cuyos espesores irán creciendo corriente abajo hasta alcanzar el eje cuando se haya recorrido cierta longitud, que se llama longitud de entrada hidráulica ( $L_{e,h}/D = Re/20$  en régimen laminar) y longitud de entrada térmica ( $L_{e,t}/D = RePr/20$  en régimen laminar), respectivamente; a partir de ahí, el perfil de velocidades, o el de temperaturas en su caso, se dice que está desarrollado. Se trata ahora de estimar el número de Nusselt para el flujo desarrollado en régimen laminar.

Del balance energético de un tramo,  $\dot{q}\pi D dx = \dot{m}c dT$ , y de  $\dot{q} = h\Delta T$  y  $\dot{m} = \rho V \pi D^2/4$ , se obtiene  $dT/dx = 4h\Delta T/(\rho cVD)$ , que sustituido en la ecuación del calor da:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow V \frac{4h\Delta T}{\rho cVD} \approx \frac{k\Delta T}{\rho c(D/2)^2} \Rightarrow Nu = 1 \quad (12.11)$$

resultado que es comparable a la realidad:  $Nu = 3,66$  cuando  $T_w = cte$  y  $Nu = 4,36$  si  $\dot{q} = cte$ . Se ha necesitado suponer que el régimen era laminar para la estimación de la  $\partial^2 T/\partial y^2$ . La pérdida de presión total se puede poner en la forma  $\Delta p_t = -\lambda(L/D)(1/2)\rho v^2$  y es fácil ver que en régimen laminar  $\lambda = 64/Re$  (fórmula de Poiseuille); en régimen turbulento  $\lambda = 0,3.Re^{-1/4}$  (fórmula de Blasius) o bien  $\lambda \approx 0,04$ .

### Convección natural en una placa plana vertical

Se supone la placa semiinfinita a temperatura constante  $T_w$ , con el borde inferior situado en el origen de coordenadas, en presencia de un fluido cuya temperatura no perturbada es  $T_\infty$ . Las fuerzas de flotabilidad (combinación de la expansión térmica y las fuerzas gravitatorias) darán origen a la aparición de una capa límite hidrodinámica y una capa límite térmica que, una vez en régimen estacionario, verificará las ecuaciones (12.7):



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_\infty}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g \\ u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

Por otra parte, del balance mecánico horizontal se deduce que la variación horizontal de la presión es despreciable, y por tanto  $\partial p_\infty / \partial y = -\rho_\infty g$ , que es la del fluido lejos de la pared. Como las variaciones de densidad serán pequeñas, se puede poner  $\rho = \rho_\infty [1 - \alpha(T - T_\infty)]$ . El análisis de órdenes de magnitud enseña que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{\delta} &\approx \frac{V}{L} \\ V \frac{V}{L} \text{ ó } \nu \frac{V}{\delta^2} &\approx g \alpha \Delta T \\ V \frac{\Delta T}{L} &\approx a \frac{\Delta T}{\delta_t^2} \end{aligned} \right\} \quad (12.13)$$

ya que no se puede saber cuál de los dos primeros términos de la relación de fuerzas será el que equilibre el término forzador  $g \alpha \Delta T$ . Despejando  $V$  de la relación energética, sustituyendo en la de fuerzas, e introduciendo el número de Rayleigh  $Ra \equiv g \alpha \Delta T L^3 / (\nu a) = Gr Pr$ , y ordenando, se llega a que:

$$\frac{\delta_t}{L} \approx (Ra Pr)^{-1/4} \text{ ó } \frac{\delta_t}{L} \approx Ra^{-1/4} \quad (\text{según el caso}) \quad (12.14)$$

y como ya se vio que  $Nu \approx L / \delta_t$ , la solución es así:

- Si  $Pr \ll 1$  (metales líquidos), entonces  $Nu \approx (Ra Pr)^{1/4}$  y la capa límite térmica es la mayor ( $\delta / \delta_t \ll Pr^{1/2}$ ).
- Si  $Pr \gg 1$  (vale para  $Pr > 1$ ), entonces  $Nu \approx Ra^{1/4}$  (compárese con la solución más exacta  $Nu = 0,59 Ra^{1/4}$  válida para  $10^4 < Ra < 10^9$ ), y la capa límite térmica es la menor.

Similarmente se podría estudiar el efecto del tiro en chimeneas, modelizándolas como superficies cilíndricas verticales, abiertas por ambos extremos, donde hay un gas a temperatura constante  $T_b$  en presencia de una atmósfera exterior a temperatura constante  $T_\infty$  y presión tal que  $\partial p_\infty / \partial y = -\rho_\infty g$ . El resultado anterior para paredes verticales es directamente aplicable a la zona de entrada de la chimenea en que las capas límite de las paredes no se han juntado ( $L/D \ll Ra^{1/4} Pr^{1/2}$ ). Para la zona de flujo desarrollado ( $\partial v / \partial y = 0$ ) el análisis de órdenes de magnitud de las fuerzas que intervienen ( $0 = \mu d^2 v / dx^2 + \rho g \alpha (T_b - T_\infty)$ ), nos da directamente que  $Nu \approx Ra_D$  (nótese que antes  $Ra$  estaba definido con la longitud  $L$  y ahora con el diámetro de la chimenea,  $D$ ).

## Convección con cambio de fase

Cuando un fluido cambia de fase (líquido-vapor) toda la energía (entalpía) de cambio de fase ha de transferirse dentro de un pequeño margen de temperaturas (exactamente a la temperatura de cambio de fase si se tratara de una sustancia pura de punto de ebullición bien definido, en condiciones de equilibrio). Además de ponerse en juego esa gran energía latente (que es muy superior a las energías sensibles típicas), resulta que el coeficiente de transmisión de calor por convección es mucho mayor cuando hay cambio de fase que cuando no lo hay (sea la fase líquida o gaseosa). Por todo ello, tanto en la práctica como en teoría, es de la mayor importancia el estudio de la convección con cambio de fase, aunque la teoría está poco desarrollada debido a la complejidad que encierra el análisis hidrodinámico de los flujos multifásicos (ello trae consigo que las correlaciones empíricas sean también muy pobres). El proceso es todavía más complicado si el flujo, además de multifásico, es multicomponente, a pesar de que en la práctica suele ser éste el caso más corriente, pues cuando el fluido es aire, el vapor de agua que contiene puede condensar, y cuando el fluido de trabajo es agua, ésta suele llevar gases disueltos, sales que precipitan, etc; por otra parte, conviene tener presente que la presencia de aire en los condensadores y evaporadores de agua disminuye grandemente la transmisión de calor.

Como en el cambio de fase la densidad varía varios órdenes de magnitud, los sistemas de convección con cambio de fase suelen diseñarse para flujo externo (Fig. 12.1b), ya que los de flujo interno (Fig. 12.1c) se acelerarían mucho (con gran pérdida de carga) si su sección recta no crece bastante, además de que los choques térmicos y demás problemas locales del cambio de fase (p.e. deposición de incrustaciones salinas) ocurrirían en la misma sección, inaccesible, del conducto (en régimen estacionario).

Cuando la vaporización o la condensación tienen lugar en superficies bien definidas (p.e. el alambre de la Fig. 12.3a, o la pared de un recipiente) se llama ebullición/condensación nucleada o heterogénea, mientras que si la tendencia al cambio de fase es uniforme en una región volumétrica grande, se llama ebullición/condensación homogénea (p.e. cuando a  $T=cte$  se varía la presión de un lado al otro de la del cambio de fase).

A continuación se presentan algunos resultados de las dos configuraciones básicas de convección nucleada con cambio de fase en un fluido monocomponente.

**Ebullición libre.** Los estudios básicos suelen hacerse en un baño de líquido próximo a la ebullición, donde se le comunica energía a una resistencia eléctrica sumergida (Fig. 12.3a) y se mide eléctricamente la potencia y la temperatura del hilo<sup>2</sup>. Para el agua (desgasificada), si la temperatura del hilo no sobrepasa en  $\approx 5$  °C a la de ebullición (373 K a 100 kPa), no se aprecia vaporización ni siquiera en la vecindad del hilo, pero si éste se sobrecalienta más, aparecen burbujas esporádicas, aunque se vuelven a condensar antes de llegar a la superficie libre; por encima de  $\approx 30$  °C de sobrecalentamiento, se forman trenes de burbujas que coalescen entre sí formando otras mucho mayores y que sí llegan a la superficie. Aunque el comportamiento global es predecible (Fig. 12.3b) el detalle es aleatorio, dependiendo fuertemente de los procesos de nucleación asociados a rugosidades fisicoquímicas

2. Esta configuración experimental de estudio fue usada por primera vez por Nukiyama en 1934.

superficiales del alambre y a las impurezas del agua, que modifican grandemente las tensiones interfaciales, ángulos de contacto de mojado, etc. La correlación empírica más usada es la de Rohsenow-1952:

$$Nu = K \cdot Ja^2 \cdot Bo^{1/2} \cdot Pr^{-4} \quad \text{con } K \approx 10^2 \quad \text{y} \quad Ja \equiv \frac{c_{líq}(T_w - T_{lv})}{h_{lv}} \quad (12.15)$$

siendo  $Ja$  el llamado número de Jakob.

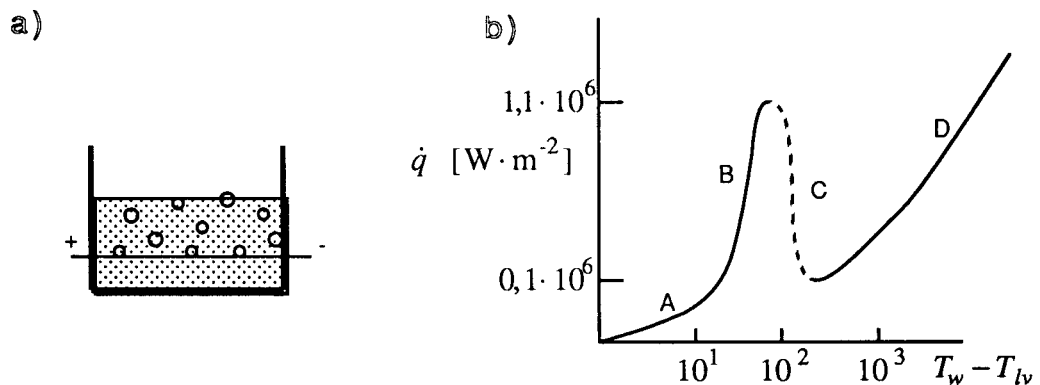


Fig. 12.3. Ebullición libre en piscina: a) configuración; b) relación entre el flujo de calor transferido y el grado de sobrecalentamiento para el caso de agua pura a presión atmosférica. A, convección natural sin cambio de fase; B, convección nucleada; C, región inestable; D, ebullición pelicular.

**Ebullición forzada.** La configuración más estudiada en este caso ha sido la de ebullición ascendente en tubo vertical, cuya configuración y resultados se muestran en la Fig. 12.4. En los experimentos se mantiene constante el gasto másico, el diámetro, la presión y la temperatura de entrada (próxima a la de ebullición), y se trata de mantener constante el flujo de calor a través de la pared (otras veces los ensayos se hacen midiendo el flujo de calor tratando de mantener la temperatura de la pared). El grado inicial de sobrecalentamiento de la pared hasta que aparecen las primeras burbujas aumenta con el gasto másico. Luego se alcanza una configuración muy inestable de burbujas arrastradas hasta que para una fracción másica dada ( $\approx 25\%$ , aunque depende del flujo de calor) ya se estabiliza una capa de vapor en la pared, aumentando bruscamente la temperatura de la pared (convección anular) y el resto del líquido se va vaporizando por radiación desde la pared y convección con el vapor. Puede resultar extraño que se presente un gradiente de temperatura negativo en la pared ( $dT/dz < 0$ ), pero la explicación es que en esa región el fluido se acelera mucho y la transmisividad térmica crece axialmente, en lugar de disminuir por la menor conductividad del vapor respecto al líquido.

**Condensación.** Cuando un vapor entra en contacto con una pared a temperatura inferior a la de condensación, se forman gotitas en ella, que, dependiendo de la geometría, del salto térmico, de la tensión superficial y de la rugosidad superficial, pueden crecer formando gotas mayores o formando una película líquida continua. Si la pared es vertical (para que escurra el líquido por gravedad) y el líquido moja bien (para que no se queden ancladas las gotas), la transmisión de calor es muy efectiva, más incluso que en la ebullición, porque aquí la película que se forma es de líquido, cuya conductividad es muy superior a la del vapor.

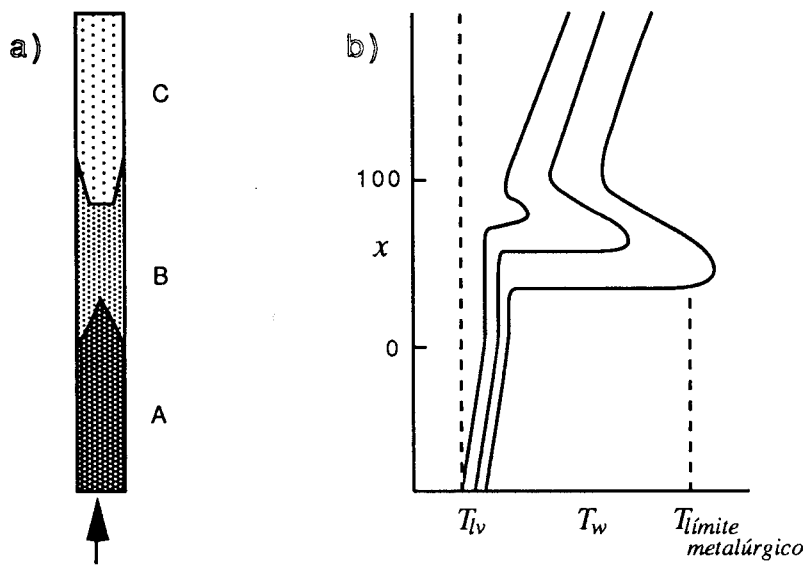


Fig. 12.4. Ebullición forzada ascendente en tubo vertical. a) Configuración del flujo bifásico: A, líquido; B, región bifásica; C, vapor. b) Sobrecalentamiento de la pared (a flujo de calor constante) en función de la posición axial (se indica la fracción másica de vapor,  $x$ ). Las tres curvas corresponderían a tres grados diferentes de flujo de calor impuesto, y se ha indicado que el sobrecalentamiento puede superar el límite metalúrgico del material.

La transmisión de calor por condensación en película en pared vertical admite un análisis de órdenes de magnitud sencillo (a partir del trabajo original de Nusselt-1916). Las ecuaciones para la película líquida (Fig. 12.5) son exactamente las (12.12).

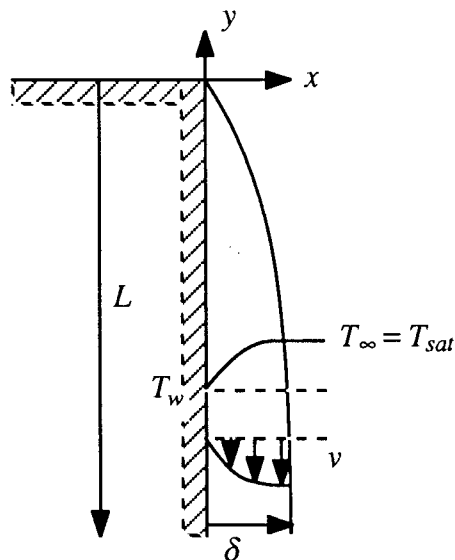


Fig. 12.5. Condensación pelicular de un fluido monocomponente en una superficie sólida vertical fría.

De los balances másico y mecánico (teniendo en cuenta que  $\partial p/\partial y = -\rho_\infty g$ ) se obtiene la siguiente relación de órdenes de magnitud:

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{\delta} &\approx \frac{V}{L} \\ v \frac{V}{\delta_{liq}^2} &\approx \frac{\rho_{liq} - \rho_{\infty}}{\rho_{liq}} g \end{aligned} \right\} \Rightarrow U \approx \frac{\rho_{liq} - \rho_{\infty}}{\rho_{liq}} g \frac{\delta^3}{vL} \quad (12.16)$$

Si se integra la ecuación de la energía a todo lo ancho del espesor (desde  $x=0$  hasta  $x=\delta$ ), teniendo en cuenta las condiciones de contorno detalladas en la Fig. 12.5 y con (12.16), se obtiene:

$$k_{liq} \frac{T_{\infty} - T_w}{\delta} \approx (\rho_{liq} - \rho_{vap}) \frac{g \delta^3}{vL} h_{lv} \Rightarrow \frac{\delta}{L} \approx \left( \frac{k(T_{\infty} - T_w) v}{(\rho_{liq} - \rho_{vap}) g L^3 h_{lv}} \right)^{1/4} \quad (12.17)$$

que, con una definición adecuada del número de Rayleigh:

$$Ra \equiv \frac{\Delta \rho g L^3 h_{lv}}{v k \Delta T} \quad (12.18)$$

se reduce a  $\delta / L \approx Ra^{-1/4}$ , y por tanto  $Nu \approx Ra^{1/4}$ , que se compara favorablemente con el resultado exacto del análisis de Nusselt:  $Nu \approx 0,943 \cdot Ra^{1/4}$ . Para otras geometrías el resultado es parecido: para condensación en película en tubo horizontal Nusselt obtuvo  $Nu \approx 0,728 \cdot Ra_D^{1/4}$ , estando definido este número de Rayleigh con el diámetro en lugar de con la longitud vertical. Cuando se aumenta el salto de temperaturas  $Nu$  disminuye por el aumento de aislamiento térmico debido al aumento de grosor de la película.

Caloductos. Con este galicismo (*heatpipes* en la nomenclatura anglosajona) se designa un dispositivo conector térmico que consiste en un tubo de cobre sellado por ambos extremos y dentro del cual hay un fluido bifásico (normalmente puro) empapando una mecha o unas ranuras longitudinales que actúan de bomba capilar para repartir el líquido. Al poner un extremo en contacto con un foco térmico, el calor comunicado evapora algo de líquido, tendiendo a aumentar la temperatura y la presión (el volumen es finito), forzando al vapor a moverse hacia el otro extremo más frío y a menor presión, por lo que allí condensará el vapor liberando toda la energía que recibió en el evaporador (en régimen estacionario). El condensado retorna por la malla bombeado por fuerzas capilares en contra del gradiente de presión en el tubo.

La enorme ventaja de los caloductos como conectores térmicos es que presentan una transmitancia varios órdenes de magnitud superior a la que p.e. tendría la misma varilla de cobre maciza, debido a que se establece una convección con cambio de fase. Un caloducto de agua de 1 m de largo y 1 cm de diámetro es capaz de transmitir 100 W de un extremo a otro con apenas una diferencia de temperaturas de 10 K, lo que equivale a una  $k \approx 10^3 k_{cobre}$ . En un caloducto como éste, se usaría  $\approx 0,1$  m de longitud para el evaporador, se aislaría térmicamente la parte media, y se usaría  $\approx 0,3$  m en el otro extremo para el condensador. La transmitancia obtenible con un caloducto del tipo descrito tiene un margen muy estrecho, así que para conseguir caloductos de conductancia variable se añade un gas inerte (el cual tiende a acumularse en el condensador) cuya dilatación (controlada internamente o desde el exterior) regula el área útil del condensador.

El funcionamiento de un caloducto queda limitado por diversos factores. Por una parte, el flujo de calor no puede ser tan grande que dé lugar a una temperatura superior a la de vapor seco saturado ( $x=1$  a  $V=cte$ ). Por otra parte, la velocidad del fluido presenta varios límites: la velocidad de retorno del líquido no puede crecer indefinidamente, siendo proporcional a  $d \sigma \cos \theta / \mu$ , donde  $d$  es el tamaño de los poros de la mecha,  $\sigma$  la tensión superficial del líquido,  $\theta$  su ángulo de mojado con el sólido y  $\mu$  su viscosidad. La velocidad de vapor no puede ser muy grande porque arrastraría gotitas del líquido que vuelve, y además se llegaría al bloqueo sónico, ya que al aumentar  $T$  disminuye  $\rho$  y se aceleraría más y más. Los caloductos se utilizan mucho para el control térmico en vehículos espaciales; la gravedad terrestre limita la altura de bombeo capilar efectivo, pero puede usarse para que retorne el líquido (el condensador ha de estar arriba) sin necesidad de mallas capilares.

### Cambiadores de calor

Son aparatos en los que se transfiere energía térmica de un fluido a otro, normalmente a través de una superficie sólida, aunque a veces se hace por contacto directo entre un líquido y un gas. Se necesita un salto de temperatura entre los fluidos y por ello siempre se genera entropía (además de la degradación de energía térmica hay que añadir la degradación de energía mecánica por fricción). En un cambiador bien diseñado, las pérdidas de calor al exterior serán despreciables frente al calor intercambiado entre los dos fluidos y por tanto el balance energético (5.16) en régimen estacionario será:

$$\sum_{\text{aberturas}} \dot{m}_i h_i = 0 \quad (12.19)$$

mientras que el balance exergético (5.18) se reduce a:

$$\sum_{\text{aberturas}} \dot{m}_i (h_i - T_o s_i) = T_o \dot{S}_{gen} \quad (12.20)$$

habiendo despreciado las variaciones de energía cinética y potencial.

### Clasificación

Los cambiadores de calor pueden clasificarse de diversas maneras:

- Según el fluido: líquido-líquido, líquido-gas, gas-gas, y las combinaciones que se obtienen cuando uno o los dos fluidos cambian de fase (parcial o totalmente) dentro del cambiador.
- Según la dirección del flujo: flujo paralelo (concurrente o a contracorriente), cruzado y mixto (éstos se pueden hacer muy compactos).
- Según el tipo de flujo: interior-interior, interior-exterior, exterior-exterior. Estos pueden ser a través de un sólido intermediario (de lecho compacto, de lecho fluidizado, o rotativo como el de la Fig. 12.6c) o de contacto (de ducha o de burbujeo).

- Según el tipo de conducto: tubulares, de carcasa, de placas (los compactos), con aletas, etc.
- Según la asociación de cambiadores: en serie, en paralelo, mixtos.

En la Fig. 12.6. se esquematizan los más representativos.

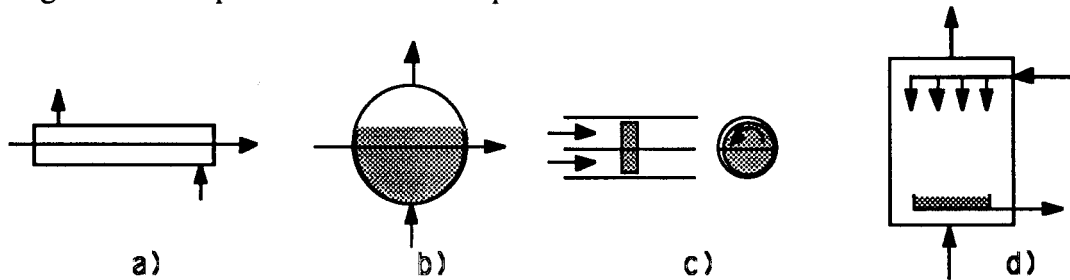


Fig. 12.6. Esquemas de cambiadores de calor: a) cambiador típico, tubular o de carcasa, normalmente sin cambio de fase, b) cambiador con cambio de fase, c) cambiador con tambor de sustancia intermedia (dos vistas), d) cambiador por contacto.

Para un buen contacto térmico entre los dos fluidos se requiere que la superficie sólida que los separa ofrezca poca resistencia térmica y que el área de contacto sea grande. Se dice que un cambiador es compacto si tiene más de  $10^3 \text{ m}^2/\text{m}^3$  (los pulmones tienen 20 veces más).

### Coefficiente global de transferencia

Casi todos los cambiadores de calor responden localmente al esquema de la Fig. 12.7. Suponiendo que localmente son admisibles las hipótesis de unidimensional y estacionario, el flujo de calor será:

$$dQ = h_1 dA_1 (T_{1\infty} - T_1) = kdA_m \frac{T_2 - T_1}{s} = h_2 dA_2 (T_2 - T_{2\infty}) \equiv U dA (T_{1\infty} - T_{2\infty}) \quad (12.21)$$

que sirve para definir el coeficiente global de transferencia  $U$ .

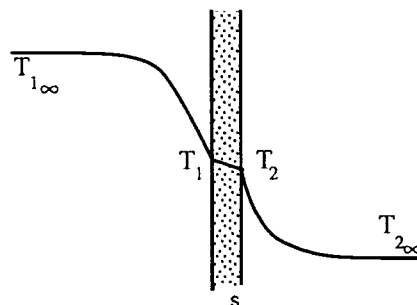


Fig. 12.7. Perfil de temperatura a través de un pequeño elemento de un cambiador de calor.

Obsérvese que la definición dependerá del área que se elija para ello en (12.21), aunque casi siempre se puede poner  $A_1=A_m=A_2$  y no hay ambigüedad. Normalmente se considera por separado el efecto de la suciedad (a través del coeficiente de suciedad,  $\phi$ ) y el de las posibles aletas (a través del rendimiento de aleta,  $\eta$ ) sobre los coeficientes de convección, por lo que se tendrá:

$$U = \frac{1}{\frac{dA}{\phi_1 \eta_1 h_1 dA_1} + \frac{sdA}{k dA_m} + \frac{dA}{\phi_2 \eta_2 h_2 dA_2}} \quad (12.22)$$

La superficie sólida suele ser tan buen conductor térmico que su efecto puede despreciarse en (12.22). También, si uno de los flujos presenta mucha más resistencia térmica que el otro (gas frente a líquido, líquido frente a cambio de fase), su efecto será el dominante; así, si el flujo 1 es el que ofrece mayor resistencia térmica,  $U \approx h_1$ .

Nótese que, conforme se ha definido en (12.21), la  $U$  sería local, es decir, referido a un elemento de área de intercambio  $dA$ , y la  $U$  variará a lo largo del cambiador, pero lo que se utiliza en la práctica es un valor medio de  $U$  como valor representativo para todo el cambiador, y se calcula el calor con:

$$\dot{Q} = UA\Delta T \quad (12.23)$$

siendo  $A$  un área de intercambio representativa (si por algún lado hay aletas suelen considerarse aparte como ya se ha indicado, por lo que no suele haber ambigüedad en la elección de  $A$ ) y  $\Delta T$  un salto térmico representativo entre el fluido caliente y el frío.

Para cambiadores con flujos paralelos (sea a contracorriente o en flujo concurrente, y haya o no cambios de fase) se demostrará posteriormente que debe elegirse como  $\Delta T$  la media logarítmica de los saltos de temperatura entre fluidos en los extremos del cambiador, es decir:

$$\Delta T = \frac{\Delta T_{entrada} - \Delta T_{salida}}{\ln \frac{\Delta T_{entrada}}{\Delta T_{salida}}} \quad (12.24)$$

aunque si ambos saltos son del mismo orden ( $\pm 50\%$ ) la media aritmética da prácticamente igual. La Tabla 12.1 da una idea de los valores numéricos típicos.

Tabla 12.1. Valores típicos de la transmitancia térmica  $U$  en  $W.m^{-2}.K^{-1}$

	Gas convección libre	Gas convección forzada	Líquido convección libre	Líquido convección forzada	Líquido vaporizándose
Gas c. libre	1 a 2	3 a 10	5 a 20	10 a 40	10 a 40
Gas c. forzada	3 a 10	10 a 30	10 a 50	10 a 40	10 a 40
Líquido c. libre	5 a 20	10 a 50	25 a 500	100 a 1500	500 a 10000
Líquido c. forzada	10 a 30	10 a 40	100 a 1500	200 a 2500	500 a 10000
Vapor condensándose	5 a 20	10 a 50	300 a 1000	400 a 4000	600 a 6000

Como ejemplos más concretos, para ventanas de vidrio  $U \approx 2 W.m^{-2}.K^{-1}$ , para colectores solares planos  $U \approx 6 W.m^{-2}.K^{-1}$ , y para radiadores de calefacción por agua caliente  $U \approx 10 W.m^{-2}.K^{-1}$ . Un caso singular de gran interés es el de los caloductos; para ellos, según la temperatura de trabajo, se tiene que  $U \approx 10^2 W.m^{-2}.K^{-1}$  para  $T \approx 10 K$ ,  $U \approx 10^3 W.m^{-2}.K^{-1}$  para  $T \approx 100 K$  y  $U \approx 10^4 W.m^{-2}.K^{-1}$  para  $T \approx 1000 K$ .



### Parámetros adimensionales

El comportamiento de un cambiador queda definido por tres parámetros adimensionales:

- Relación entre las capacidades térmicas medias de las dos corrientes,  $c$ , que siempre puede ponerse como:

$$c \equiv \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{mín}}}{(\dot{m}c_p)_{\text{máx}}} \quad (12.25)$$

incluso si hay cambio de fase, pues si una corriente cambia de fase será  $c=0$ , mientras que si son ambas las que cambian de fase el problema resulta trivial. En general  $0 \leq c \leq 1$ .

- Relación entre el calor que hipotéticamente se transmitiría con esa  $UA$  si el salto de temperatura fuese el máximo (entrada del caliente menos entrada del frío) y el máximo transmisible a entrada fija (el que se transmitiría si  $A \rightarrow \infty$ ). Como éste último valor es  $(\dot{m}c_p)_{\text{mín}}(T_{\text{ent,cal}} - T_{\text{ent,frío}})$  y el  $\Delta T$  es el mismo, se tiene finalmente que este parámetro,  $N$ , llamado número de unidades de transferencia, es:

$$N \equiv \frac{UA}{(\dot{m}c_p)_{\text{mín}}} \quad (12.26)$$

Normalmente este parámetro resulta de orden unidad.

- Relación entre el calor realmente intercambiado y el máximo transmisible a entrada fija (el que se transmitiría si  $A \rightarrow \infty$ ); es decir:

$$\eta \equiv \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{cal}}(T_{\text{ent,cal}} - T_{\text{sal,cal}})}{(\dot{m}c_p)_{\text{mín}}(T_{\text{ent,cal}} - T_{\text{ent,frío}})} = \frac{(\dot{m}c_p)_{\text{frío}}(T_{\text{sal,frío}} - T_{\text{ent,frío}})}{(\dot{m}c_p)_{\text{mín}}(T_{\text{ent,cal}} - T_{\text{ent,frío}})} \quad (12.27)$$

Este parámetro se llama eficiencia del cambiador, y  $0 \leq \eta \leq 1$ , con valores típicos de 0,6. Para el cálculo de actuaciones del cambiador, a condiciones de entrada dadas, basta conocer su eficiencia, aunque muchas veces en el análisis preliminar de instalaciones térmicas lo que se fija no es una eficiencia típica sino un salto mínimo de temperaturas típico, del orden de 5 °C.

### Cálculo de cambiadores

En un cambiador de calor en el que se supone que las pérdidas de calor al exterior son despreciables existen tres ligaduras térmicas: los dos balances energéticos de los fluidos, y la ecuación del flujo de calor entre ellos. Si se considera  $U=cte$ , estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= (\dot{m}c_p)_{\text{cal}}(T_{\text{ent,cal}} - T_{\text{sal,cal}}) = (\dot{m}c_p)_{\text{frío}}(T_{\text{sal,frío}} - T_{\text{ent,frío}}) = \\ &= UA f(T_{\text{ent,cal}}, T_{\text{sal,cal}}, T_{\text{sal,frío}}, T_{\text{ent,frío}}) \end{aligned} \quad (12.28)$$

donde esta última función  $f$  se reduce a la media logarítmica de los incrementos en los extremos para flujos paralelos, pero es más complicada para flujos cruzados o mixtos y de hecho se recurre a darla en forma de gráficos empíricos.

Combinando estas ecuaciones se puede obtener otra que relaciona los parámetros adimensionales descritos anteriormente:

$$\eta = f(N, c) \quad (12.29)$$

siendo esta nueva función  $f$  expresable analíticamente de forma sencilla para el caso de flujos paralelos, pero que normalmente corresponderá a una gráfica empírica como se ha dicho antes (Fig. 12.8).

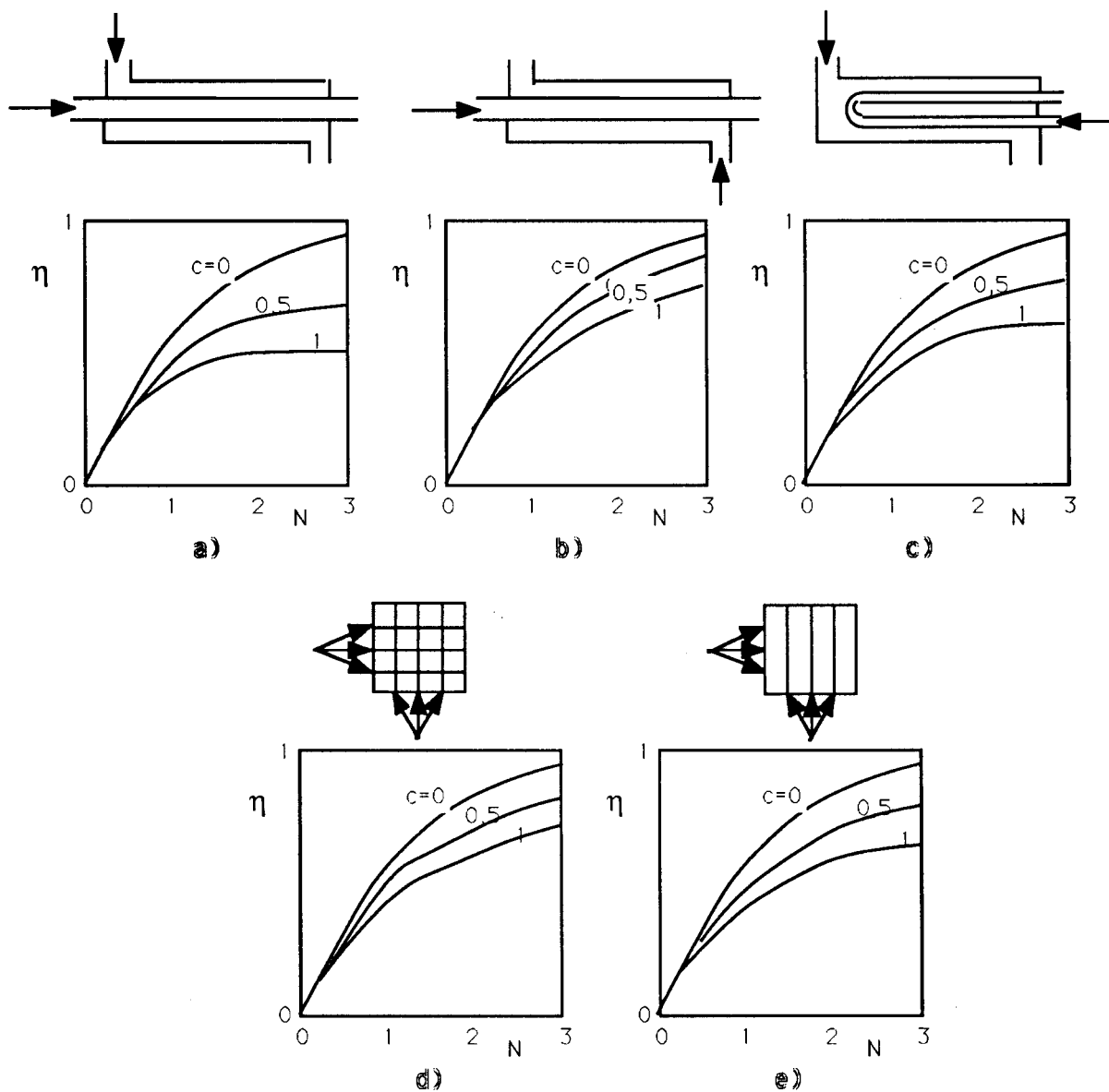


Fig. 12.8. Eficiencia  $\eta$  de un cambiador en función del número de unidades de transferencia  $N$ , para diversas relaciones de capacidad térmica  $c$  de los flujos: a) flujo concurrente, b) flujo a contracorriente, c) un solo paso en carcasa y un número par de pasos en tubos, d) flujo cruzado sin mezcla, e) flujo cruzado con mezcla de un fluido.

El cálculo de cambiadores se puede referir a dos casos diferentes: cálculo de las actuaciones de un cambiador dado (ya construido), y cálculo de diseño o selección del cambiador más adecuado a una cierta aplicación.

En el primer caso, se suponen las condiciones de entrada dadas, la  $N$  se calcula a partir de (12.26), con ayuda de (12.23) o un valor empírico según la Tabla 12.1, y la eficiencia se obtiene de (12.27), con lo que no es necesario utilizar la media logarítmica del salto de temperaturas o su equivalente, que contendría variables intermedias (este camino directo fue propuesto por Nusselt en 1930). A partir de  $\eta$  se calcula fácilmente el calor transferido y las temperaturas de salida.

El caso del diseño es aquél en que se desea dimensionar un cambiador (calcular  $A$ ) para que transfiera un calor  $Q$  con un cierto rendimiento  $\eta$  (o un salto mínimo de temperaturas), dadas las condiciones de entrada y por tanto la  $U$  (calculable a partir de (12.23)). Para ello se procede a la inversa: de (12.29) se calcula  $N=f(\eta,c)$  y de (12.26) se obtiene  $A$ .

Además de estos cálculos térmicos, es preciso el cálculo fluidodinámico para determinar la pérdida de presión de los flujos a su paso por el cambiador, que, aunque energéticamente insignificante para el balance térmico, determina la potencia de bombeo requerida.

En la selección del tipo de cambiador más adecuado a una aplicación concreta entran en juego muchos factores: coste inicial, volumen disponible, limpieza, presiones, compatibilidad de materiales, etc. Por ejemplo, supuesto que se trata de elegir entre diversas configuraciones de cambiador de carcasa y tubos, se podría proceder así: si el área de intercambio es menor de  $10 \text{ m}^2$ , basta poner dos tubos concéntricos; si la presión en los tubos es mayor de 7 MPa, conviene poner tubos en  $U$  en carcasa; y si el factor de ensuciamiento  $1/U_{sucio}-1/U_{limpio}=(1-\phi)/(\phi h)$  (ver (12.22)) es mayor de  $10^{-4} \text{ m}^2.\text{K}.\text{W}^{-1}$ , conviene usar placas tubulares fijas en carcasas de cabezal desmontable. Si las presiones no son grandes se pueden utilizar los modernos cambiadores de calor de placas<sup>3</sup>.

Como ejemplo, se va a determinar la expresión (12.29) para el caso de flujos paralelos (a contracorriente o concurrentes, con o sin cambio de fase), que admite solución analítica sencilla.

### Cambiador de flujos paralelos

Se suponen conocidas las condiciones de entrada y el  $UA$  medio. Para no complicar la nomenclatura se va a hacer el desarrollo para flujos a contracorriente, pero basta hacer el cambio  $dT=-dT$  para el caso concurrente.

Primero se va a demostrar que en este caso el  $\Delta T_{medio}$  es la media logarítmica de los saltos en los extremos. En efecto, para un elemento infinitesimal:

$$dQ = m_1 c_{p1} dT_1 = m_2 c_{p2} dT_2 = U dA (T_2 - T_1) = \frac{d(T_2 - T_1)}{\frac{1}{m_2 c_{p2}} - \frac{1}{m_1 c_{p1}}} \quad (12.30)$$

3. Kays, W. & A.L. London, "Compact heat exchangers", McGraw-Hill, 1984.

y, como se supone  $U=cte$  para la definición del  $\Delta T_{medio}$ , se tendrá a la vez:

$$\ln \frac{T_{2e} - T_{1s}}{T_{2s} - T_{1e}} = UA \left( \frac{1}{m_2 c_{p_2}} - \frac{1}{m_1 c_{p_1}} \right) \quad \text{y} \quad UA \Delta T_{medio} = \frac{(T_{2e} - T_{2s}) - (T_{1s} - T_{1e})}{\frac{1}{m_2 c_{p_2}} - \frac{1}{m_1 c_{p_1}}} \quad (12.31)$$

de donde se deduce que  $\Delta T_{medio}$  es la media logarítmica de los saltos en los extremos, como se quería demostrar. En realidad, cuando  $m_1 c_{p_1} = m_2 c_{p_2}$  se llegaría a una singularidad, pero entonces la solución es trivial porque  $\Delta T = cte = T_2 - T_1$ .

Ahora se quiere determinar la relación (12.29) para este caso de flujos paralelos. Llamando 1 a la corriente con menor capacidad térmica, la eficiencia será  $\eta = (T_{1s} - T_{1e}) / (T_{2e} - T_{1e})$ , y del balance energético se deduce que  $c = (T_{2e} - T_{2s}) / (T_{1s} - T_{1e})$ , por lo que sustituyendo en la primera de las (12.31) y recordando la definición (12.27), se tiene:

$$\ln \frac{T_{2e} - T_{1s}}{T_{2s} - T_{1e}} = N(c - 1) = \ln \frac{T_{2e} - T_{1s} + (T_{1e} - T_{2e})}{T_{2e} - T_{1e} - c(T_{1s} - T_{1e})} = \ln \frac{1 - \eta}{1 - c\eta} \rightarrow \eta = \frac{1 - e^{N(c-1)}}{1 - ce^{N(c-1)}} \quad (12.29)$$

que se ha representado en la Fig. 12.8b. Como casos particulares se tiene que  $\eta \rightarrow 1$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , que  $\eta = 1 - e^{-N}$  para  $c=0$  (cambio de fase) y que  $\eta = N/(1+N)$  para  $c=1$ .

Para el caso concurrente (Fig. 12.8a) se llega similarmente a:

$$\eta = \frac{1 - e^{-N(1+c)}}{1 + c} \quad (12.33)$$

con los casos particulares de  $\eta \rightarrow 1/(1+c)$  cuando  $N \rightarrow \infty$ ,  $\eta = 1 - e^{-N}$  para  $c=0$  (cambio de fase, independiente del sentido de los flujos) y que  $\eta = (1 - e^{-2N})/2$  para  $c=1$ .

## Control térmico

El objetivo del control térmico es mantener la temperatura local o global  $T(t)$  de un sistema (llamado carga) entre límites prefijados  $T_{\min}(t) < T(t) < T_{\max}(t)$ , y se consigue controlando la transmisión de calor entre la carga y un ambiente exterior por medio de conectores y separadores térmicos. Aunque para conseguir este objetivo se hará uso de todos los modos básicos de la transmisión de calor (conducción, convección y radiación), se incluye aquí este análisis porque la convección suele ser el mecanismo más importante para conseguirlo, excepto en las aplicaciones de control térmico global de vehículos espaciales (Cap. 13), donde la ausencia de atmósfera hace que sea la radiación el proceso controlador.

La importancia del control térmico estriba en que en todo tipo de sistema, desde los materiales estructurales a los seres vivos, los efectos térmicos pueden degradar severamente sus funciones, y su fallo incidir no sólo sobre ellos mismos sino sobre los demás sistemas. Las distorsiones térmicas de la materia pueden ir desde la dilatación (causando desalineamiento y posiblemente esfuerzos termomecánicos y fugas de fluido) hasta la ablación o desintegración de la materia, pasando por múltiples cambios de fase. Los equipos electrónicos y fluidomecánicos funcionan mal o no funcionan fuera de un estrecho margen de temperaturas (que suele coincidir con el biológico) y los sistemas biológicos suelen requerir un control térmico muy fino.

Tipos de sistemas:

- conectores para acelerar el atemperamiento natural ( $Q_{carga}(T_{carga}-T_{amb})<0$ ): pasivo (conducción, convección, radiación), o activo (convección forzada).
- separadores para retardar el atemperamiento natural ( $Q_{carga}(T_{carga}-T_{amb})<0$ ): pasivo (conducción, convección, radiación), o activo (convección forzada). También se llaman aislantes.
- calefactores para impedir el atemperamiento natural ( $Q_{carga}(T_{carga}-T_{amb})>0$  con  $Q_{carga}>0$ ): combustión, resistencia eléctrica, bomba de calor.
- refrigeradores para impedir el atemperamiento natural ( $Q_{carga}(T_{carga}-T_{amb})>0$  con  $Q_{carga}<0$ ): frigoríficos, bombas de calor, mezclas congelantes.

La Termodinámica enseña que si  $Q_{carga}(T_{carga}-T_{amb})>0$ , entonces es necesario aportar exergía desde el exterior, sea para calefacción o para refrigeración. Si no, no es necesario, aunque muchas veces sí que se aporta algo, para acelerar el intercambio (convección forzada), y se dice control activo.

El problema de la transmisión de calor en el control térmico puede ser de tipo directo (dados la geometría y los materiales, relacionar los flujos de calor con las temperaturas), o de tipo inverso (dados las temperaturas y flujos de calor deseados, proyectar la geometría y materiales más adecuados).

En general, los parámetros a considerar en un problema de control térmico son: el rango de temperaturas de trabajo de la carga, la del ambiente, el rango de flujos de calor, las propiedades de los materiales a usar como conectores o separadores (no sólo las térmicas, sino también las de compatibilidad) y la geometría.

Según el rango de temperatura de la carga, se pueden distinguir las aplicaciones siguientes:

- Hasta 100 K, criogenia (almacenamiento y transporte de oxígeno, nitrógeno, metano, hidrógeno y helio líquidos, detectores de IR, superconductores, etc).
- De 100 K a 200 K las aplicaciones son muy escasas (producción de nieve carbónica a 195 K).
- De 200 K a 300 K, refrigeración convencional (alimentos). Se usan los hidrocarburos halogenados, también llamados clorofluorocarbonos (CFC).
- De 290 K a 295 K, acondicionamiento ambiental (aire acondicionado). Se usan los CFC.
- De 300 K a 400 K, calefacción convencional (doméstica e industrial). Se usan el agua y el aire.
- De 400 K a 800 K, procesos industriales (química, textil, alimentaria). Se usan aceites minerales, sales fundidas y gases.
- De 800 K a 2000 K, hornos (metalurgia, cerámica y vidrio). Se usan sales y metales fundidos, y gases.
- A partir de 2000 K, llamas de soplete y plasmas. El soplete de hidrógeno atómico alcanza 4000 K. Se consiguen chorros de plasma a 10000 K (p.e. para simular las

condiciones de reentrada de vehículos espaciales) sembrando el aire con partículas fácilmente ionizables (p.e. cesio o argón) y acelerándolo en campos electromagnéticos muy intensos.

Los elementos típicos de un sistema de control térmico se representan en la Fig. 12.9. La carga existe siempre, pero el ambiente puede a veces no ser relevante (p.e., si  $Q_{carga} > 0$  y se calienta con una resistencia eléctrica). El conector o separador también existe siempre, aunque a veces sea la capa de fluido ambiente que baña directamente la carga. En cambio el circuito de transporte no es siempre necesario.

El aporte de potencia es necesario si  $Q_{carga}(T_{carga} - T_{amb}) > 0$ , pero puede existir aunque no sea necesario. El acumulador térmico tampoco es necesario, pero sí es conveniente para acoplar oferta y demanda. Los sensores y reguladores se utilizan siempre que se requiera un control de la transmisión de calor.

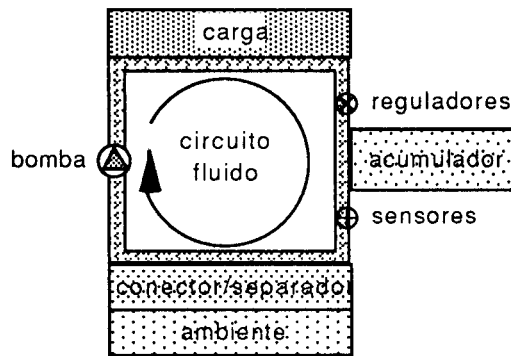


Fig. 12.9. Esquema general de un sistema de control térmico.

Cuando existe un circuito fluido de transporte térmico, se considera que la degradación de energía mecánica por fricción es despreciable frente al calor intercambiado, aunque ella es la que gobierna el aporte de potencia necesario para mantener el flujo. Suele además considerarse flujo incompresible y casi siempre monofásico, y las propiedades del fluido se consideran constantes en un primer análisis, y luego se corrige por el efecto de la variación de temperatura (que puede ser importante en los líquidos, al cambiar mucho la viscosidad con la temperatura).

### Convección laminar de especies

Cuando la difusión de especies debida a gradientes de concentración (Cap. 11) va asociada al movimiento global del fluido, se llama convección, similarmente a como se hace en transmisión de calor. La analogía entre ambos procesos de transporte convectivo es debida a la coincidencia de las ecuaciones (11.25) y (11.3), esta última modificada para incluir la convección, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} = D_i \nabla^2 \rho_i + w_i &\longleftrightarrow \frac{DT}{Dt} = a \nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c} \\ \vec{j}_i = -D_i \nabla \rho_i &\longleftrightarrow \vec{q} = -k \nabla T \end{aligned} \right\} \quad (12.34)$$

y se puede repetir aquí la clasificación que se ha hecho en convección térmica: en flujo interno y flujo externo, en flujo laminar y flujo turbulento, definir el coeficiente de convección másica  $h_m(D, \mu, V...)$  análogamente a (12.1) a partir de:

$$\dot{m}_i = h_m A (c_{i_{pared}} - c_{i_{\infty}}) \longleftrightarrow \dot{Q} = hA(T_{pared} - T_{\infty}) \quad (12.35)$$

adimensionalizarlo, como se hizo en (12.2), para obtener un número adimensional (análogo al de Nusselt) llamado número de Sherwood,  $Sh$ :

$$Sh \equiv \frac{h_m L}{D_i} \longleftrightarrow Nu \equiv \frac{hL}{k} \quad (12.36)$$

siendo  $L$  la dimensión de interés; adimensionalizar el coeficiente de difusión de la especie  $i$  considerada ( $D_i$ ) similarmente a como se hizo con la difusividad térmica ( $a$ ), dando lugar al número de Schmidt,  $Sc$ :

$$Sc \equiv \frac{\nu}{D_i} \longleftrightarrow Pr \equiv \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c_p}{k} \Rightarrow Le \equiv \frac{a}{D_i} = \frac{Sc}{Pr} \quad (12.37)$$

donde también se ha introducido el número de Lewis,  $Le$ , que puede usarse alternativamente.

Siguiendo con la semejanza con la transmisión de calor, se pueden presentar ejemplos de correlaciones empíricas adimensionales, de la forma  $Sh = Sh(Re, Sc)$  como p.e.  $Sh \approx 3,66$  para convección forzada laminar en tubo con concentración en la pared constante,  $Sh = 0,023 Re^{0,8} Sc^{0,4}$  para convección forzada turbulenta en tubo, etc. Se puede continuar con el análisis simplificado (órdenes de magnitud) de casos sencillos como allí se hizo (capa límite, tubo, convección natural) y los resultados son similares:

- convección forzada laminar en capa límite:

$$Sh = 0.33 Re^{1/2} Sc^{1/3} \text{ para } Sc > 1 \text{ y } Sh = 0.56 Re^{1/2} Sc^{1/2} \text{ para } Sc \ll 1 \quad (12.38)$$

- convección natural laminar en capa límite:

$$Sh = 0.5 Ra_m^{1/4} \text{ para } Sc > 1 \text{ y } Sh = 0.6 (Ra_m Sc)^{1/4} \text{ para } Sc \ll 1 \quad (12.39)$$

donde se ha introducido el número de Rayleigh másico  $Ra_m$  definido por:

$$Ra_m = g \alpha_m \Delta c \frac{L}{\nu D_i} \text{ siendo } \Delta c \equiv c_{pared} - c_{\infty} \text{ y } \alpha_m \equiv \frac{-1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_p \quad (12.40)$$

Hasta aquí se ha supuesto transporte de especies por gradiente de concentración en un medio isotermino y, aunque se ha presentado con una semejanza total con el transporte de calor, conviene matizar que no es la concentración sino el potencial químico de la especie el que juega un papel enteramente similar al de la temperatura, y así p.e., aunque la temperatura y el potencial químico son continuos a través del contorno, la  $c_{pared}$  de (12.40) es la del fluido en

la pared, y no la de la pared propiamente dicha, que será muy diferente (si la pared está compuesta sólo de la especie pura de interés, la concentración de la mezcla fluida en la pared será la de equilibrio saturado a esa temperatura). Además, en la transferencia de masa sólo existen los modos difusivo y convectivo, mientras que en la transmisión de calor existe además el modo radiativo.

Hay casos en los que el transporte de especies y el de calor van unidos, como en el caso de la convección de especies debida a convección natural térmica, o el caso de enfriamiento por evaporación forzada. El primero se puede analizar como se hizo en convección natural, aunque ahora, en lugar de las dos posibilidades,  $Pr > 1$  y  $Pr \ll 1$ , se presentarán seis:

$Pr < Sc < 1$	$(Le > 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Pr^{1/4} Sc^{1/2}$
$Sc < Pr < 1$	$(Le < 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Pr^{1/4} Sc$
$Pr < 1 < Sc$	$(Le > 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Pr^{1/12} Sc^{1/3}$
$Sc < 1 < Pr$	$(Le < 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Pr^{1/4} Sc$
$1 < Pr < Sc$	$(Le > 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Sc^{1/3}$
$1 < Sc < Pr$	$(Le < 1)$	$Sh = Ra_m^{1/4} Sc^{1/2}$

### Enfriamiento por evaporación

Se estudia aquí un problema combinado de difusión de especies y de calor. Sea una corriente de aire caliente (húmedo, pero no saturado) en contacto con una masa de agua líquida pura (Fig. 12.10). En régimen estacionario existirá un flujo de moléculas de agua hacia el aire debido al gradiente de concentración, y la evaporación (que hará disminuir algo la masa de agua) dará lugar a un enfriamiento en la superficie del agua, que, si se supone isoterma la masa de agua, compensará el flujo de calor recibido desde el aire caliente (otro problema distinto sería si la evaporación fuese compensada por calor recibido desde el lado del líquido).

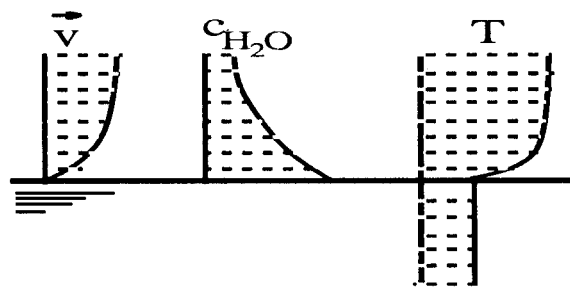


Fig. 12.10. Perfiles de velocidad, concentración de agua y temperatura en el enfriamiento por evaporación.

Las ecuaciones para el flujo de la especie activa (vapor de agua) y para el flujo de calor son:

$$\dot{m}_i = h_m A (c_{pared} - c_\infty) \quad y \quad \dot{Q} = hA (T_{pared} - T_\infty) \quad (12.41)$$

estando relacionadas por el balance energético en la interfase,  $\dot{Q} + \dot{m} h_{lv} = 0$  (el balance másico daría la velocidad de descenso del nivel del líquido y no es importante para tiempos cortos). Los datos son las propiedades de los fluidos y el estado termodinámico del aire (y su velocidad), y se desea calcular el grado de enfriamiento de equilibrio (la temperatura del



líquido,  $T_{pared}$ ). Recordando la relación entre concentración de vapor de agua,  $c$ , y humedad relativa,  $\phi$ :  $c = xp/(R_u T) = \phi p^*(T)/(R_u T)$ , el balance energético conduce a la ecuación buscada:

$$hA(T_\infty - T_{pared}) = h_m A(c_{pared} - c_\infty)h_{lv} = h_m A \left( \frac{p^*(T_{pared})}{R_u T_{pared}} - \frac{\phi_\infty p^*(T_\infty)}{R_u T_\infty} \right) h_{lv} \quad (12.42)$$

donde los coeficientes de convección se suponen conocidos en función de los datos. De hecho, de la analogía matemática entre los problemas de calor y de concentración, se deduce que las funciones de correlación  $Nu = hL/k = f(Re, Pr)$  y  $Sh = h_m L/D_i = f(Re, Sc)$  han de ser idénticas, luego si  $Nu = A Re^m Pr^n$ , entonces  $Sh = A Re^m Sc^n$  con las mismas  $A$ ,  $m$  y  $n$ , y, puesto que ya coinciden  $L$  y  $Re$ , se concluye que:

$$\frac{h_m}{h} = \frac{D_i}{k} \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^n = \frac{D_i}{k} Le^n = \frac{Le^{n-1}}{\rho c_p} \quad (12.43)$$

Aunque experimentalmente se llega a que  $n \approx 1/3$ , en realidad importa poco porque en los gases es  $Le \approx 1$ . Si además de esta simplificación, se desarrolla (12.42) sabiendo que  $T_{pared} \approx T_\infty$ , se llega a:

$$T_\infty - T_{pared} = \frac{M_{va} h_{lv}}{c_p} \left( \frac{p^*(T_\infty)}{p} - \frac{1}{\frac{M_{va}}{w_\infty} + 1} \right) = \frac{M_{va} h_{lv} p^*(T_\infty)}{c_p p} (1 - \phi_\infty) \quad (12.44)$$

Sustituyendo valores numéricos, para temperaturas próximas a la atmosférica, se obtiene  $\Delta T \approx A(1 - \phi_\infty)$  con  $A = 13,6 \text{ }^\circ\text{C}$ .

### Difusión en chorro laminar

Uno de los problemas básicos de la convección de especies es el denominado difusión en chorro laminar, donde un chorro (bidimensional o axilsimétrico) de una sustancia se difunde en el seno de otra sustancia que estaría en reposo de no ser por la penetración y el arrastre provocados por el chorro. Aunque se trata de un problema típico de la Mecánica de fluidos, se trata aquí por su gran interés en combustión (llama de difusión laminar, donde se inyecta un chorro de combustible en el seno de una atmósfera de aire), además de en los problemas de dispersión de contaminantes. Como no añade grandes dificultades, se considerará que el chorro viene con una temperatura distinta de la del ambiente, con lo cual adquiere también mayor relevancia termodinámica. La Fig. 12.11 presenta un esquema del chorro axilsimétrico e introduce la nomenclatura usada.

Se trata de encontrar los perfiles de concentración, de velocidad y de temperatura. El problema es casi-unidimensional ya que las funciones varían mucho radialmente y poco a lo largo del eje, en cuya dirección la difusión será despreciable. Se supondrá, para simplificar el cálculo, que las propiedades de los fluidos son iguales y constantes ( $Pr = Sc = Le = 1$ ). En régimen estacionario, las ecuaciones se deducen de (5.22-24) y (11.15), obteniéndose:

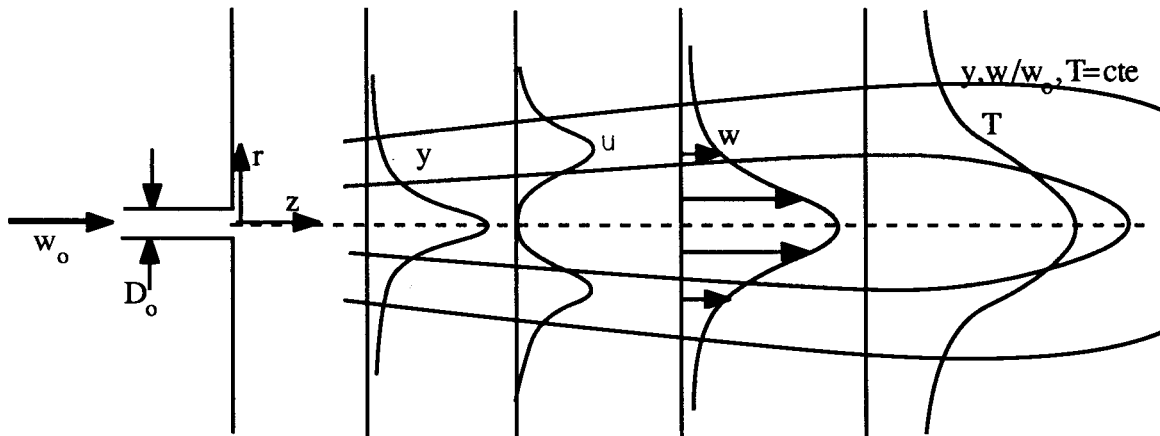


Fig. 12.11. Esquema de un chorro de difusión laminar.

- balance másico global:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho u r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w r)}{\partial z} = 0 \quad (12.45)$$

- balance de la especie inyectada:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}) = \nabla \cdot (D_i \nabla \rho_i) + w_i \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho u r y)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w r y)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( D_i r \frac{\partial(\rho y)}{\partial r} \right) \quad (12.46)$$

- balance de cantidad de movimiento axial:

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot \bar{\vec{\tau}} - \nabla p \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho u r w)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w r w)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \mu r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (12.47)$$

- balance energético:

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\bar{\vec{\tau}} \cdot \vec{v}) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\rho u c_p T)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho w c_p T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (12.48)$$

donde se ha sustituido la entalpía de la mezcla  $h$  por  $h = \sum x_i h_{i_o} + \sum x_i c_{p_i} T = h_o + c_p T$ , y se ha considerado que no hay reacción química (Cap. 16).

Para distancias grandes<sup>4</sup> ( $z \gg D_o$ ) el problema admite solución de semejanza (Schlichting-1933) con la única variable adimensional  $\eta$ :

$$\eta = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{w_o D_o}{v} \frac{r}{z} \quad (12.49)$$

con la solución<sup>5</sup>:

4. El núcleo no viscoso del chorro desaparece al cabo de unos 4 ó 6 diámetros corriente abajo de la salida, debido al crecimiento de la capa de mezcla por apareamiento de los torbellinos desprendidos.

5. Schlichting, H., "Boundary layer theory", McGraw-Hill, 1979.

$$w = \frac{3}{32} \frac{w_o^2 D_o^2}{vz} \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^2} \quad (12.50)$$

$$u = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{w_o D_o}{z} \frac{\eta \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right)}{\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^2} \quad (12.51)$$

$$y = \frac{3}{32} \frac{w_o D_o^2}{vz} \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^2} \quad (12.52)$$

$$\frac{T - T_{amb}}{T_o - T_{amb}} = \frac{3}{32} \frac{w_o D_o^2}{vz} \frac{1}{\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^2} \quad (12.53)$$

que verifica las ecuaciones diferenciales y las condiciones en el infinito y, aunque no verifica exactamente las condiciones en  $z=0$  ( $w=w_o$  e  $y=1$  para  $r < D_o/2$ , y  $w=y=0$  y  $T=T_{amb}$  para  $r \geq D_o/2$ ), sí verifica globalmente las relaciones:

$$\int_0^{\infty} 2\pi r dr (\rho w^2) = cte, \quad \int_0^{\infty} 2\pi r dr (\rho y w) = cte, \quad \int_0^{\infty} 2\pi r dr (\rho c_p T w) = cte, \quad \forall z \quad (12.54)$$

y en particular para  $z=0$ . Con esta solución de semejanza el chorro aparece como manantial puntual de simetría cónica.

En el eje,  $r=0$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $wz=cte$ ,  $u=0$ ,  $yz=cte$  y  $[(T-T_{amb})/(T_o-T_{amb})]z=cte$ , aunque esto no será verdad cerca de  $z=0$  porque ni  $w$  puede ser mayor de  $w_o$ , ni  $y$  mayor que 1, lo cual puede servir para delimitar la región de validez de esta solución:  $z/D_o > (3/32)w_o D_o/v = (3/32)Re$ . También es fácil ver que, para una  $z$  dada, los perfiles  $w/w|_{r=0}$ ,  $y/y|_{r=0}$  y  $[(T-T_{amb})/(T_o-T_{amb})]|_{r=0}$  coinciden, y que los contornos de  $y=cte$ ,  $w=cte$  y  $T=cte$  son semejantes; en realidad, las curvas de nivel vienen dadas por:

$$\frac{r}{z} = \frac{16}{\sqrt{3}Re} \left[ \left( \frac{3}{32} Re \frac{D_o}{z} \frac{1}{y} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2} \quad (12.55)$$

para la  $y$ , y lo mismo para las otras dos, sustituyendo 'y' por  $w/w_o$  o por  $(T-T_{\infty})/(T_o-T_{\infty})$ .

La velocidad radial  $u$  es nula en  $r=0$ , en  $r \rightarrow \infty$  y en  $\eta=2$ , siendo positiva hasta  $\eta < 2$  y negativa para  $\eta > 2$ .

Se puede definir el llamado "ángulo del chorro" como  $r_{1/2}/z$ , siendo  $r_{1/2}$  el radio donde en los perfiles anteriores se alcanza la mitad del valor central, resultando  $r_{1/2}/z=5,94/Re$ , que enseña que el ángulo del chorro es inversamente proporcional a  $Re$ . También es interesante calcular el flujo de arrastre,  $\dot{m}_a$ :

$$\dot{m}_a \equiv \int_0^{\infty} 2\pi r dr (\rho w) - \rho w_o \frac{\pi D_o^2}{4} = 8\pi\mu z - \rho w_o \frac{\pi D_o^2}{4} \quad (12.56)$$

que indica que el flujo de arrastre aumenta con  $z$  y con  $\mu$ , y que, paradójicamente, el flujo total ( $8\pi\mu z$ ) no depende del flujo inyectado, aunque, como antes, esto sólo es válido para  $8\pi\mu z > \rho w_o \pi D_o^2/4$ , es decir, para  $z/D_o > (3/32)Re$ , como antes.

## RECAPITULACION

1. Se justifica por qué conviene estudiar por separado la transmisión de calor por convección de la conducción, y se distingue entre convección forzada y convección natural, y entre flujo externo y flujo interno.
2. Se presentan las correlaciones adimensionales empíricas que relacionan el coeficiente de convección térmica con los otros parámetros del flujo y del fluido.
3. Se hace un análisis de órdenes de magnitud de los casos elementales de procesos convectivos: el de flujo forzado en capa límite, el de flujo forzado en interior de tubos, y el de flujo natural en placa vertical.
4. Se estudian los cambiadores de calor: su clasificación, el coeficiente global de transmisión y los parámetros adimensionales, resolviendo explícitamente los casos de flujos paralelos.
5. Se presenta la fenomenología de la convección con cambio de fase en flujo abierto y en flujo cerrado, haciendo un análisis de órdenes de magnitud del proceso de condensación en película vertical.
6. La transferencia de masa por difusión de especies con arrastre convectivo se estudia como analogía matemática al proceso de convección térmica, conduciendo a las mismas correlaciones empíricas adimensionales.
7. Un problema combinado de convección térmica y másica es el del enfriamiento por evaporación (el conocido efecto botijo), que aquí se analiza en detalle.
8. El otro problema que se analiza de convección de especies es el del chorro laminar axilsimétrico, por su interés para el estudio de las llamas de difusión y para la dispersión de contaminantes, entre otros.

## PROBLEMAS

12.1. Se desea estimar el sobrecalentamiento, en régimen estacionario, de un gasto de 0,01 kg/s de R-12 que sale de un evaporador a 100 kPa y circula por un tubo de cobre de 0,5 mm de espesor, 10 mm de diámetro exterior y 50 cm de longitud, con una envoltura aislante de 5 mm de espesor de manta de fibra de vidrio, en presencia de una atmósfera a 30 °C. Datos:  $h_{R-12}=250 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ ,  $k_{Cu}=390 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ ,  $k_{manta}=0,04 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ ,  $h_{aire}=10 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ ,  $c_{p,R-12}=580 \text{ J.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ . Se pide:

- Temperatura, densidad y velocidad del R-12 a la entrada del conducto.
- Balance energético y calor transmitido.
- Temperatura de salida.
- Comprobar, con las correlaciones empíricas generales, que las estimaciones dadas de  $h_{R-12}$  y  $h_{aire}$  son adecuadas. Datos:  $\mu_{R-12}=10^{-5} \text{ Pa.s}$ ,  $k_{R-12}=0,007 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ .

Sol.: a)  $T=-30 \text{ °C}$ ,  $\rho=6,3 \text{ kg/m}^3$ ,  $v=25 \text{ m/s}$ ; b)  $\dot{Q}=6,7 \text{ W}$  (13,4 W/m),  $T_{ext}=7 \text{ °C}$ ; c)  $\Delta T=Q/(mc_p)=6,7/(0,01.580)=1,2 \text{ K}$ ; d) Para el R-12,  $Pr=10^{-5}.580/7.10^{-3}=0,83$ ,  $Re=6,3.25.9.10^{-3}/10^{-5}=1,4.10^5$ ,  $Nu=0,023Re^{0,8}Pr^{0,4}=282$ ,  $h=220$  (y se supuso 250), y para el aire,  $Pr=0,7$ ,  $Gr=7,7.10^5$ ,  $Nu=0,53(GrPr)^{0,25}=14$ ,  $h=23$  (y se supuso 10).

12.2. Por un tubo de 2 m de largo y 10 mm de diámetro, cuyas paredes se mantienen a 80 °C, fluyen 1,67 kg/s de un aceite cuya conductividad térmica varía de 0,144 W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> a 20 °C a 0,141 W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> a 80 °C, su viscosidad es de 890.10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s a 20 °C y de 39.10<sup>-6</sup> m<sup>2</sup>/s a 80 °C, y su densidad es de 894 kg/m<sup>3</sup> a 20 °C y de 851 kg/m<sup>3</sup> a 80 °C, el cual entra a 20 °C. Se pide:

- Régimen del movimiento.
- Número de Nusselt medio.
- Calor que recibe el aceite.
- Temperatura de salida.

Sol.: a) laminar,  $Re=270$ ; b)  $Nu=92$ ; c)  $\dot{Q}=5 \text{ kW}$ ; d)  $T_s=21,6 \text{ °C}$ .

12.3. Se desea saber la pérdida de calor al ambiente de una tubería de 5 cm de diámetro y 1 cm de espesor de aislante de  $k=0,1 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$ , por la que circula 0,01 kg/s de vapor que entra a 150 kPa y 150 °C. Se pide:

- Números de  $Re$  y  $Nu$  para el vapor.
- Números de  $Gr$  y  $Nu$  para el aire.
- Flujo transversal de calor.
- Variación axial de la temperatura del vapor.

Sol.: a)  $Re=3,3.10^4$ ,  $Nu=136$ ; b)  $Gr=2,5.10^6$ ,  $Nu=20$ ; c)  $\dot{Q}=93 \text{ W/m}$ ; d)  $dT/dx=-9 \text{ °C/m}$ .

12.4. Se desea estudiar el enfriamiento de una esfera maciza de hierro de 10 cm de diámetro, recién sacada de un horno a 150 °C, en una atmósfera a 20 °C. Se pide:

- Flujo de calor por radiación, suponiendo  $\epsilon=0,2$ .
- Flujo de calor por conducción suponiendo aire inmóvil, y cálculo del  $Nu$  equivalente.
- Flujo de calor por convección natural, indicando los valores de  $Gr$  y  $Nu$  correspondientes.

Sol.: a)  $\dot{Q}=11 \text{ W}$ ; b)  $\dot{Q}=2 \text{ W}$ ,  $Nu=2$ ; c)  $\dot{Q}=22 \text{ W}$ ,  $Gr=4.10^6$ ,  $Nu=22$ .

12.5. Se trata del diseño de un calentador eléctrico de 3 kW para calentar agua sanitaria desde 10 °C a 60 °C. Se pide:

- a) Gasto másico de agua que se podría calentar.
- b) Tamaño que deberían tener los tubos para que el régimen sea turbulento.
- c) Números de Reynolds, Prandtl y Nusselt, y longitud de tubo mínima necesaria.
- d) Pérdida de presión.

Sol.: a)  $\dot{m} < 14,3 \cdot 10^{-3}$  kg/s (0,8 litros por minuto); b)  $D < 4,7$  mm, se elige  $D = 4$  mm; c)  $Re = 4670$ ,  $Pr = 7$ ,  $Nu = 43,2$ ,  $L > 1,1$  m; d)  $\Delta p = 7$  kPa.

12.6. Para condensar el vapor de salida de una turbina a 30 °C se usa una corriente de agua de 100 kg/s a 15 °C. El área de intercambio es de 150 m<sup>2</sup> y el coeficiente global de transmisión de 2000 W.m<sup>-2</sup>.K<sup>-1</sup>. Se pide:

- a) El número de unidades de transferencia ( $Nut$ ).
- b) El rendimiento  $\eta$ .
- c) La temperatura de salida del agua.
- d) El calor evacuado.
- e) El gasto másico de vapor circulante.

Sol.: a)  $Nut = UA/(mc) = 0,72$ ; b)  $\eta = 1 - e^{-Nut} = 0,51$ ; c)  $T_{sal} = 22,7$  °C; d)  $\dot{Q} = \dot{m}c\Delta T = 3,2$  MW; e)  $\dot{m}_{vap} = 1,32$  kg/s.