# Serie e Integral de Fourier

# Transformada de Fourier

# Serie de Fourier

*Sea f(x) una función periódica de período T = 2π*

*La serie de Fourier correspondiente es:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n:1}^{\infty} a_n.\cos nx + b_n.\operatorname{sen} nx \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\cos nx.\,dx \qquad n:0,\ 1,\ 2\ldots \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x).\operatorname{sen} nx.\,dx \qquad n:1,\ 2,\ 3\ldots \qquad (3)$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

Recordemos por otra parte las expresiones de las funciones complejas circulares, *cos Z* y *sen Z*.

$$\cos Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} Z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Si tomo Z = nx. ∈ R.

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad (4)$$

Reemplazamos (4) en (1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} a_n . \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_{ni} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

Sacamos factor común $e^{inx}$ y $e^{-inx}$ en la suma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} \frac{a_n - i.b_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + i.b_n}{2} e^{-inx} \qquad (5)$$

Si ahora llamamos:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - i.b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i.b_n}{2} \qquad (6)$$

Nos queda:

$$\boxed{f(X) = c_0 + \sum_{n:1}^{\infty} c_n . e^{inx} + c_{-n} . e^{-inx}} \qquad (7)$$

*Serie compleja de Fourier con sus coeficientes expresados en (6).*

# Forma compleja de la serie de Fourier

*Vamos a expresar esos mismos coeficientes dados en (6) en forma compleja:*

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - i\,.\,b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,.\,b_n}{2} \qquad (6)$$

$$Queda: \quad f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,.\,e^{inx} + c_{-n}\,.\,e^{-inx} \qquad (7)$$

$$c_n = 1/_{2\pi}\,.\,\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,.\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (9)$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

*Se puede expresar la serie de la siguiente manera:*

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - i\,.\,b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i\,.\,b_n}{2} \tag{6}$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{7}$$

$$c_n = 1\!/_{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,.\,e^{-inx}\,\mathrm{d}x \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

**Observaciones:**

1. Los coeficientes $a_n$ y $b_n$ de la serie de Fourier son números reales, mientras que los coeficientes complejos $c_n$ y $c_{-n}$ son números complejos. Por lo que hemos visto en (6) los coeficientes $c_n$ y $c_{-n}$ son complejos conjugados.
2. Si $f(x)$ es función par sobre $[-\pi,\pi]$, entonces los $b_n$ son ceros. Los coeficientes de la serie compleja en este caso son iguales y también reales.
$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}$$
3. Si en particular $f(x)$ es una función impar $[-\pi,\pi]$ los $a_n = 0$ para todo $n=0,1,2,\ldots$, en este caso:
$$c_n = -\frac{ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \frac{ib_n}{2}$$
son imaginarios puros.
4. Por lo que hemos visto en la serie real de Fourier podemos asegurar que (9) nos conduce a lo mismo si se integra sobre $[a,a+2\pi]$.

# Forma compleja de la serie de Fourier

Además fuera de esas dos pueden calcularse los coeficientes reales si se conocen los coeficientes complejos. Partiendo de (6)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \rightarrow \quad a_0 = 2c_0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{sumando miembro a miembro} \quad c_n + c_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} \quad \rightarrow \quad a_n = c_n + c_{-n}$$

$$c_{-n} := \frac{a_n + ibn}{2} \quad \text{sumando miembro a miembro} \rightarrow c_n + c_{-n} = -\frac{ib_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i}$$

$$\boxed{b_n = (c_n - c_{-n})}$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

**Serie compleja de Fourier de *f(x)* de periodo arbitrario *T = 2l*.**

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l}$$

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) . \cos\frac{n\pi x}{l} . dx; \qquad n = 0, 1, 2, 3\ldots$$

$$(3) \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) . \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{l} . dx; \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Si seguimos con un procedimiento análogo al caso (1) o bien transformando la función f(x) en una función de período $2\pi$ llegaremos a que también puede expresarse por una serie compleja de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n . e^{\frac{i\pi n x}{l}}$$

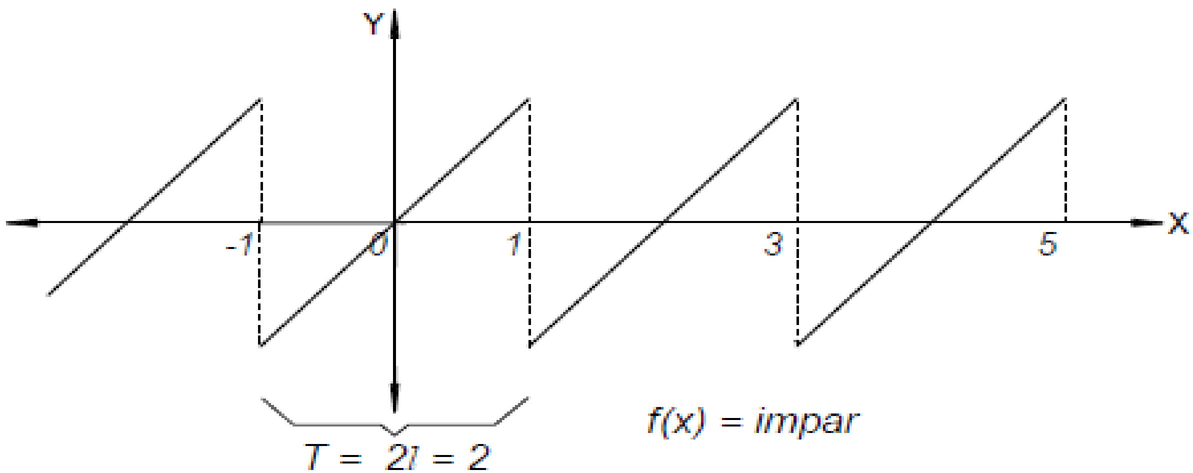
Además obtendremos que los coeficientes complejos tienen la siguiente:

$$c_n = 1/_{2l} \cdot \int_{-l}^{l} f(x) . e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx\,, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

# Forma compleja de la serie de Fourier

Ejemplo: Obtener la serie compleja de Fourier de la función:

*f(x) = x* $\quad$ *-1 < x < 1* $\quad$ y $\quad$ *f(x) = f(x+2)*




*f(x) = impar*

f $\quad f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n . e^{\frac{in\pi x}{l}}$

c $\quad c_n = \frac{1}{2l}\int_{-1}^{1} f(x).e^{\frac{-in\pi x}{l}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2.1}\int_{-1}^{1} x.e^{\frac{-in\pi x}{1}}\,dx = \frac{2}{2.1}\int_{0}^{1} x.e^{\frac{-in\pi x}{1}}\,dx = \left| \frac{e^{\frac{-in\pi x}{1}}}{(in\pi)^2}.(in\pi x - 1)\right|_0^1 =$

# Forma compleja de la serie de Fourier

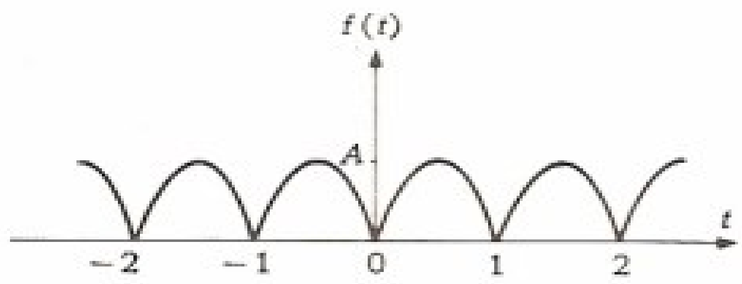
$$= \frac{e^{-in\pi}}{-n^2\pi^2}.(-in\pi - 1) + \frac{e^{-in\pi.0}}{-n^2\pi^2}(-1) = e^{-in\pi}.\frac{in\pi}{n^2\pi^2} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} =$$

$$= i\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \left(\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right) = \frac{(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} + i\frac{\cos n\pi}{n\pi} \qquad n: \pm 1, \pm 2, \ldots \quad n \neq 0$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n:-\infty}^{n:+\infty}\left[\frac{(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} + i\frac{\cos n\pi}{n\pi}\right].e^{in\pi x}}$$

# Serie compleja de Fourier

*Se desea hallar la serie compleja de Fourier de la función periódica :*




La función periódica sinusoide rectificada.

*Serie compleja de Fourier*

$$f(t) = A.\ sen(\pi t)\ ,\quad 0 < t < 1\ ,\ T = 1$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\ .\ e^{i2n\pi t}$$

$$\mathrm{c_n} = \frac{1}{2\mathrm{l}} \int_0^1 \mathrm{f(t)}.e^{-i2n\pi t}\ \mathrm{dt} = \frac{1}{1} \int_0^1 A.sen(\pi t).e^{-i2n\pi t}\ dt = A \int_0^1 \left(\frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i}\right).\ e^{-i2n\pi t}\, dt$$

# Serie compleja de Fourier

**De la fórmula de Euler** $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$

**se obtiene:**

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$c_n = \frac{A}{2i}\int_0^1 (e^{-i\pi(2n-1)t} - e^{-i\pi(2n+1)t}).dt \;=\; \frac{A}{2i}.\left(\left(\frac{e^{-i\pi(2n-1)t}}{-i\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)t}}{-i\pi(2n+1)}\right)_0^1 \;=\right.$$

$$e^{\pm i2n\pi} = e^0.(\cos(2n\pi) + i.\ \text{sen}(2n\pi)) = 1.(1+i.0) = 1$$

$$e^{-i\pi} = e^0.\Big(cos(-\pi) + i.\ \text{sen}(-\pi)\Big) = e^0.\Big(cos(\pi) + i.\ \text{sen}(\pi)\Big) = e^{\pi i}$$

$$c_n = \frac{-2.A}{\pi.(4n^2-1)}, \qquad c_0 = \frac{-2.A}{\pi.\left(4.0^2-1\right)} = \frac{2.A}{\pi}$$

# Serie compleja de Fourier

$$c_n = \frac{-2.A}{\pi.(4n^2-1)}, \qquad c_0 = \frac{-2.A}{\pi.\left(4.0^2-1\right)} = \frac{2.A}{\pi}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \,.\, e^{i2n\pi t} = f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-2.A}{\pi.\left(4n^2-1\right)} \,.\, e^{i2n\pi t} = \frac{-2.A}{\pi}.\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)} \,.\, e^{i2n\pi t}$$

Expresar esta serie de forma trigonométrica:

$$\sum_{n=-10}^{10} \frac{1}{4\,n^2-1}\, e^{I\,2\,Pi\,n\,t}$$

$$-1 + \frac{1}{3} e^{-2 i \pi t} + \frac{1}{3} e^{2 i \pi t} + \frac{1}{15} e^{-4 i \pi t} + \frac{1}{15} e^{4 i \pi t} + \frac{1}{35} e^{-6 i \pi t} + \frac{1}{35} e^{6 i \pi t} +$$
$$\frac{1}{63} e^{-8 i \pi t} + \frac{1}{63} e^{8 i \pi t} + \frac{1}{99} e^{-10 i \pi t} + \frac{1}{99} e^{10 i \pi t} + \frac{1}{143} e^{-12 i \pi t} + \frac{1}{143} e^{12 i \pi t} + \frac{1}{195} e^{-14 i \pi t} +$$
$$\frac{1}{195} e^{14 i \pi t} + \frac{1}{255} e^{-16 i \pi t} + \frac{1}{255} e^{16 i \pi t} + \frac{1}{323} e^{-18 i \pi t} + \frac{1}{323} e^{18 i \pi t} + \frac{1}{399} e^{-20 i \pi t} + \frac{1}{399} e^{20 i \pi t}$$

# Serie compleja de Fourier

$$\text{recordando: } a_n = 2.\text{Re}[c_n] = 2.\frac{-2.A}{\pi.\left(4n^2-1\right)} = \frac{-4.A}{\pi.\left(4n^2-1\right)}$$

$$b_n = -2.\text{Im}[c_n] = 0$$

$$\text{por lo} \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n.\ \cos\ (n\pi t/l + b_n\ .\ \text{sen}(n\pi t/l)$$

$$f(t) = \frac{2.A}{\pi} - \frac{4.A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)}.\cos(n\pi t/\frac{1}{2})$$

$$\text{por lo} \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n.\ \cos\ (n\pi t/l + b_n\ .\ \text{sen}(n\pi t/l)$$

$$f(t) = \frac{2.A}{\pi} - \frac{4.A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(4n^2-1\right)}.\cos(n\pi t/\frac{1}{2})$$

$$f(t) = \frac{2.A}{\pi} - \frac{4.A}{\pi}(\frac{1}{3}.cos(2\pi t) + \frac{1}{15}.cos(4\pi t) + \frac{1}{3}.cos(6\pi t) + \ldots)$$

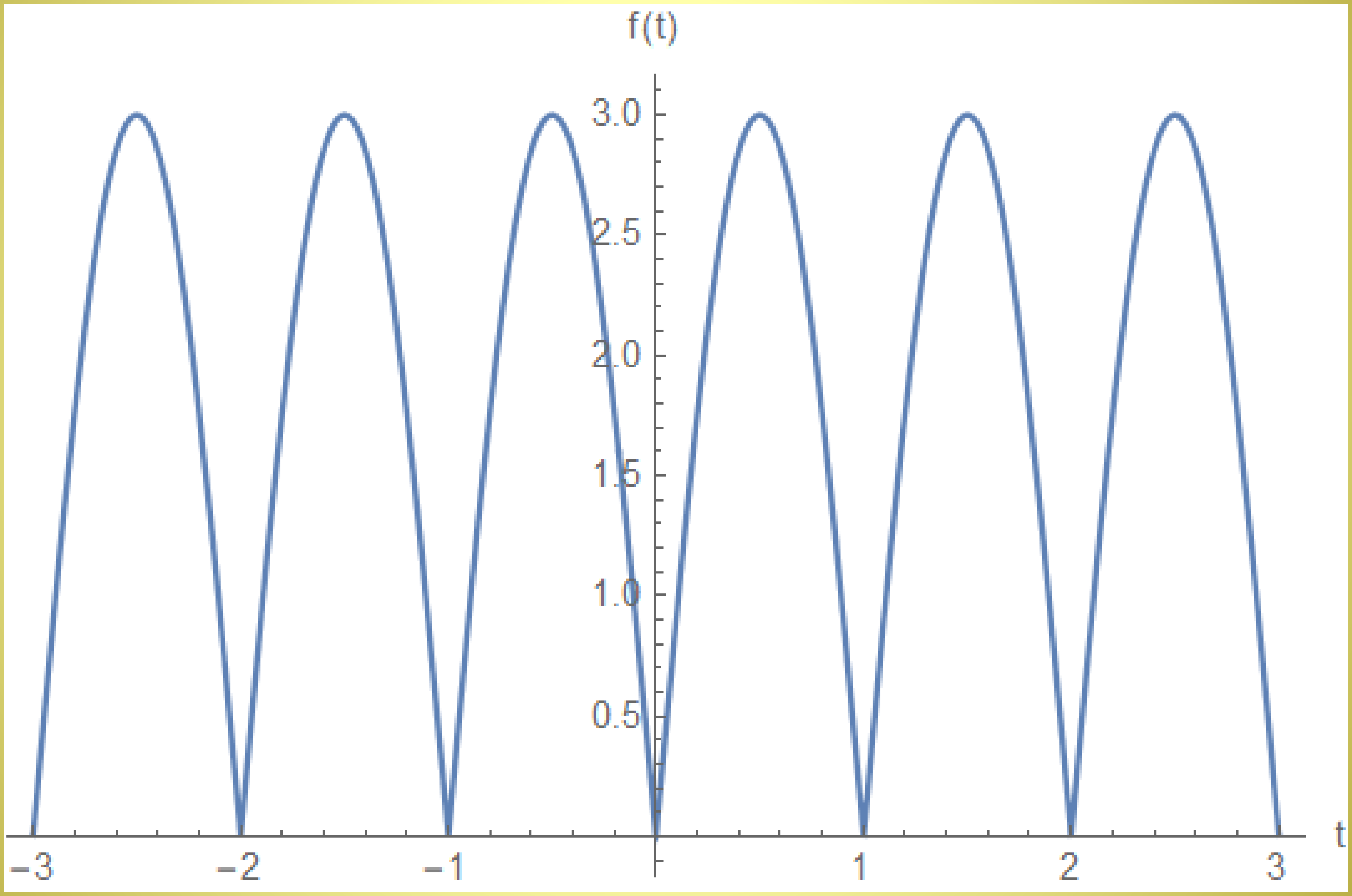
# Serie compleja de Fourier

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi}(\frac{1}{3}e^{i2\pi t} + \frac{1}{15}e^{i4\pi t} + \frac{1}{35}e^{i6\pi t} + \ldots) - \frac{2A}{\pi}\left(\frac{1}{3}e^{-i2\pi t} + \frac{1}{15}e^{-i4\pi t} + \frac{1}{35}e^{-i6\pi t} + \ldots\right) =$$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}((\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}) + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}\right) + \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{2}\left(e^{i6\pi t} + e^{-i6\pi t}\right) + \ldots)$$

$$f(t) = \frac{2.A}{\pi} - \frac{4.A}{\pi}.(\frac{1}{3}.\cos(2\pi t) + \frac{1}{15}.cos(4\pi t) + \frac{1}{3}.cos(6\pi t) + \ldots)$$

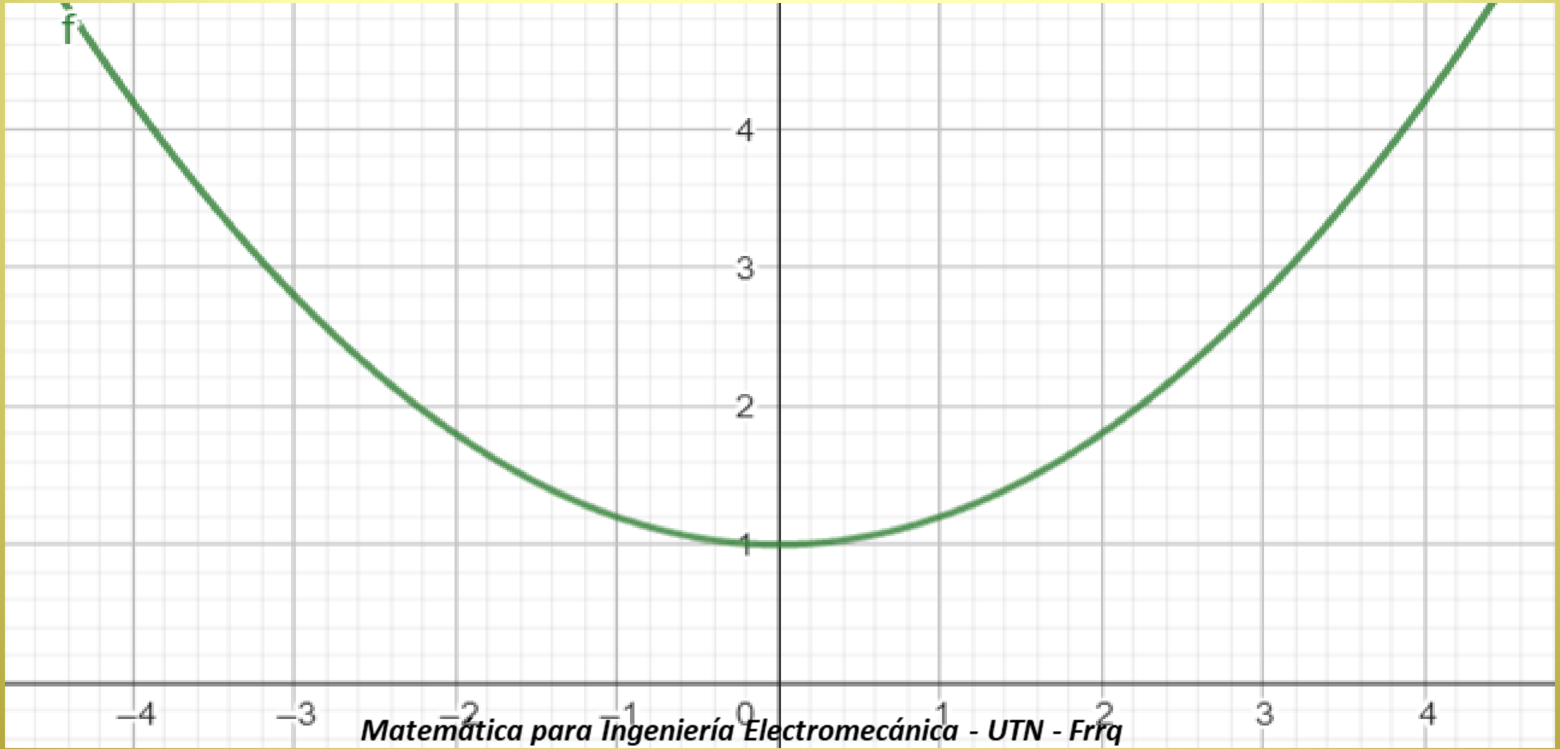
# Serie compleja de Fourier



# Integral de Fourier

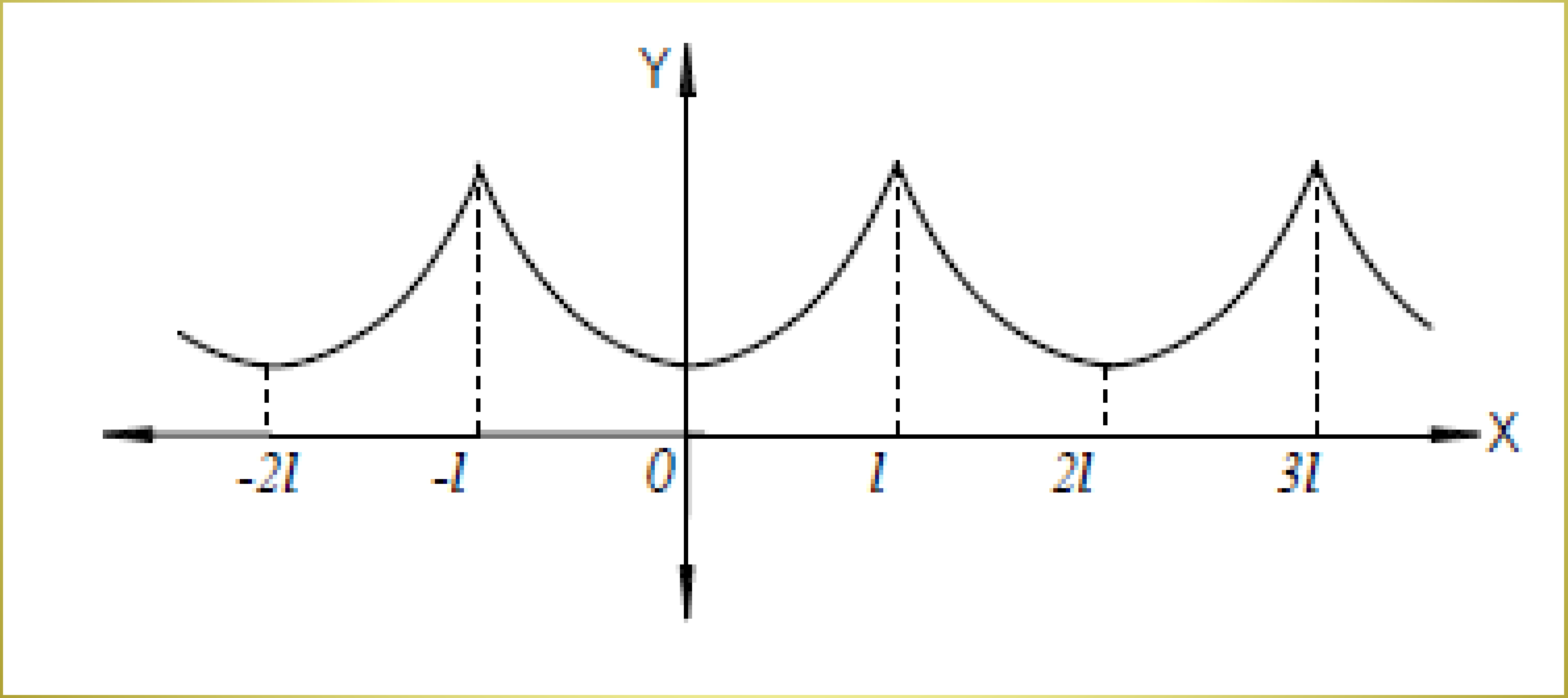
*La serie de Fourier puede representar a una función f(x) periódica. Si se quiere representar una f(x) no periódica sobre todo el dominio deberemos utilizar un nuevo concepto llamado* ***Integral de Fourier*** *de la función f(x).*

***Sea f(x) = $x^2$ + 1***



# Integral de Fourier

*Se podría representar f(x) en un intervalo [–l, l], a partir de considerar su correspondiente extensión periódica.*



# Integral de Fourier

*Para representar la función* $f(x)$ *en un intervalo* $[-\infty,\infty]$,

*se observa que ésta es el límite al que tiende la expresión periódica*

*cuando* $l$ *tiende a infinito* $(l \to \infty)$.

*Debemos por lo tanto tomar límite en la correspondiente serie de Fourier con* $l -> \infty$.

*En este paso al límite la sumatoria de la serie se transforma en una integral impropia.*

# Integral de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

**Serie de Fourier**

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad para\, n = 1, 2, 3... \qquad (1.2.1)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad para\, n = 1, 2, 3...$$

relacionados con $f$ en $[-L, L]$ se denominan coeficientes de Fourier.

# Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\ .\ \cos(\frac{n\pi t}{l}).\ \mathrm{dt}\right].\cos(\frac{n\pi x}{l}) + \left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\ .\ sen\left(\frac{n\pi t}{l}\right).\ dt\right].sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right]$$

$$con\ a_0 = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t)\ .\ dt$$

*En este paso al límite la sumatoria de la serie se transforma en una integral. La variable "**t**" aparece para no confundirse con la variable "**x**" de la función a representar*

# Integral de Fourier

*Después de operar algebraicamente, la expresión resultante es :*

$$f(x) = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t)\;.\;dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\;.\;cos\left(\frac{n\pi t}{l}\right).cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dt\right. +$$

$$\left. + \;\; \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\;.\;sen\left(\frac{n\pi t}{l}\right).\;sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right).dt\right]$$

# Integral de Fourier

*Operando algebraicamente, agrupando las expresiones que contienen funciones trigonométricas, y con base en una identidad trigonométrica:*

$$f(x) = \frac{1}{2\,l}\int_{-l}^{l} f(t).dt \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} [\; \underbrace{\cos(\frac{n\pi t}{l}).\; cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{cos(\alpha).cos(\beta)} \;+\; \underbrace{sen\left(\frac{n\pi t}{l}\right).\; sen\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}_{sen(\alpha).sen(\beta)}].\; dt$$

$$sabiendo\ que\text{: } \cos(\alpha).\cos(\beta) \;+\; sen(\alpha).sen(\beta) \;= \cos(\alpha-\beta)$$

$$\mathrm{a}_0 = \lim_{\mathrm{l}\to\infty}\frac{1}{2\,\mathrm{l}}.\; \lim_{\mathrm{l}\to\infty}\int_{-l}^{l} f(t).dt = 0$$

# Integral de Fourier

*La expresión del desarrollo es la siguiente:*

*Realizamos un cambio de variable* $\alpha_n = n.\pi/l$

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t).\ cos\left(\frac{n\pi(t-x)}{l}\right).\ dt$$

haciendo $\alpha_1 = \frac{\pi}{1}$ ; $\alpha_2 = \frac{2\ \pi}{1}$; $\alpha_3 = \frac{3\ \pi}{1}$;. . . ; $\alpha_n = \frac{n\ \pi}{1}$

así: $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \Delta\alpha_n = \frac{\pi}{1}$, *por lo que:* $\frac{1}{l} = \frac{\Delta\alpha_n}{\pi}$

# Integral de Fourier

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\alpha_n}{\pi} \underbrace{\int_{-l}^{l} f(t) . \; cos(\alpha_n . (t - x)) \; . \; dt}$$

$$\text{y haciendo: } F(\alpha_n) = \int_{-l}^{l} f(t) . \; cos(\alpha_n . (t - x)) \; . \; dt,$$

*Al tomar* $\lim\limits_{l \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty}$, *ésta se convierte en la* $\int\limits_{0}^{\infty}$

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\alpha_n \; . \; F(\alpha) = \int_{0}^{\infty} F(\alpha)\, d\alpha$$

# Integral de Fourier

La integral de la función $F(\alpha)$ *es la siguiente*:

$$F(\alpha) = \int_0^\infty f(t) . \cos[\alpha . (t - x)] . dt$$

*Puede expresarse la función* $f(x)$ *mediante la Integral de Fourier*:

# Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . \cos\left[\alpha . (t - x)\right] \mathrm{d}t \right] d\alpha$$

***Integral de Fourier de f(x)***

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . \cos\left[\alpha . (t - x)\right] \mathrm{d}t$$

# Integral de Fourier

*La **Integral de Fourier** de una función f(x) seccionalmente continua en cualquier intervalo [-l,l], converge para todo x en los puntos de continuidad de f(x) y en los de discontinuidad, a la semisuma de los límites laterales.*

# Integral de Fourier

La integral de la función $F(\alpha)$ *es la siguiente*:

$$F(\alpha) = \int_0^{\infty} f(t).\cos[\alpha.(t-x)].dt$$

Desarrollando el coseno del integrando, y reordenando la expresión, queda:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(t).[cos(\alpha.t).cos(\alpha.x) + sen(\alpha.t).sen(\alpha.x)].dt].d\alpha$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t).cos(\alpha.t).dt]\ .cos(\alpha.x).d\alpha\right] + \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t).sen(\alpha.t).dt\right].sen(\alpha.x).d\alpha\,\Bigg]$$

# Integral de Fourier

$$f(x) = \int_0^{\infty} a_\alpha \,.\, cos(\alpha . x) . d\alpha + \int_0^{\infty} b_\alpha \,.\, sen(\alpha . x) . d\alpha$$

$$con\ a_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . cos(\alpha . t) . dt$$

$$b_\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) . sen(\alpha . t) . dt$$

*Expresión de la integral de Fourier de una $f(x)$, con sus coeficientes*

# Integral de Fourier

*Integral de Fourier de una función $f(x)$ par*

$$a_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t).\cos(\alpha.t).dt \quad ; \qquad b_\alpha = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t).cos(\alpha.t).dt\right].\cos(\alpha.x).d\alpha$$

Integral cosenoidal de Fourier

# Integral de Fourier

*Integral de Fourier de una función $f(x)$ impar*

$$a_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t).\mathrm{sen}(\alpha.t).dt \quad ; \qquad a_\alpha = 0$$

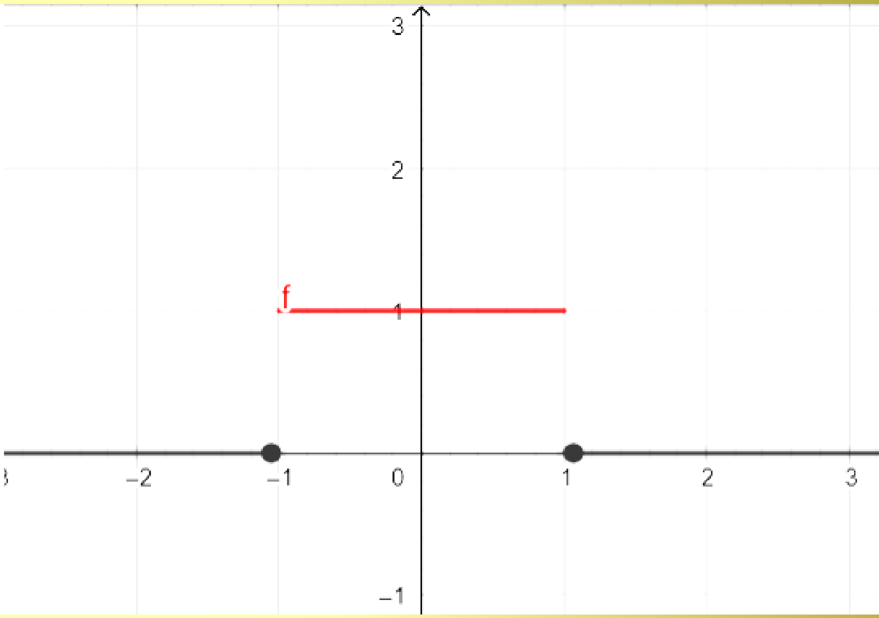
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(t).\mathit{sen}(\alpha.t).dt\right].\mathit{sen}(\alpha.x).d\alpha$$

Integral senoidal de Fourier

# Integral de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; |x| < 1 \\ 0 \; si \; |x| > 1 \end{cases}$$

$Función \; par$



# Integral de Fourier

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} a_{\alpha} \,.\, cos(\alpha \,.\, x) \,.\, d\alpha$$

$$con \; b_{\alpha} \quad = 0$$

$$a_{\alpha} \quad = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \,.\, \cos(\alpha \,.\, t) \,.\, dt$$

*Integral de Fourier de una función par*

# Integral de Fourier

$$a_\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t).\cos(\alpha.t).dt \qquad ; \; b_\alpha = 0$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty [\int_0^\infty f(t).cos(\alpha.t).dt].\cos(\alpha.x).d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^1 1.cos(\alpha.t).dt\right].cos(\alpha.x).d\alpha$$

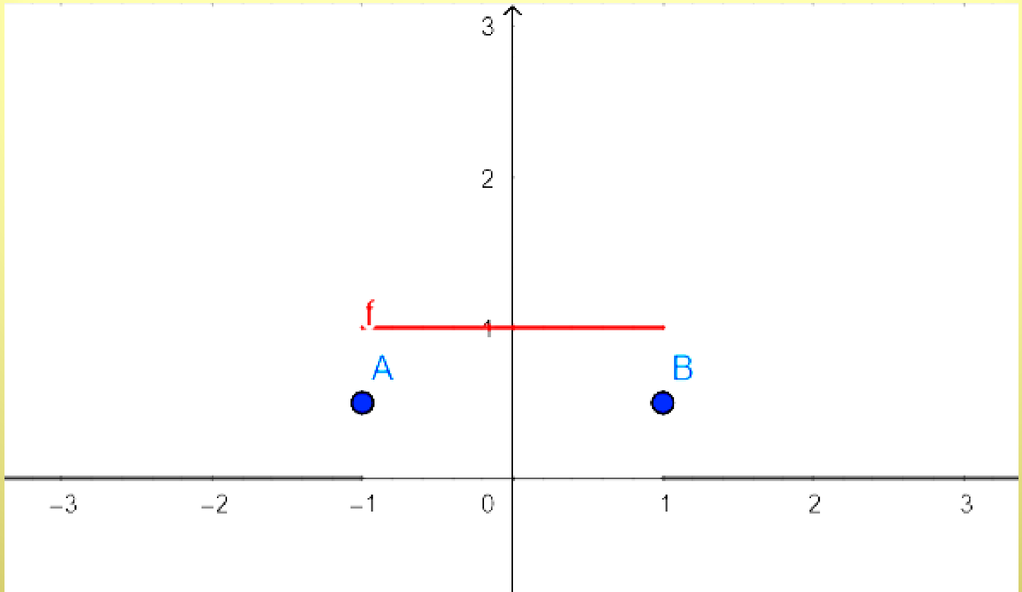
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^1 \frac{sen(\alpha.t)}{\alpha}\right].cos(\alpha.x).d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{sen(\alpha)}{\alpha} - 0\right].cos(\alpha.x).d\alpha$$

# Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{sen(\alpha)}{\alpha}.cos(\alpha.x).d\alpha$$

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad x = -1 \quad \text{Semisuma de los límites laterales} \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 1 \quad \text{en los puntos de discontinuidad} \\ 1 & \text{si} \quad |x| < 1 \quad \text{En el intervalo } (-1,1) \end{cases}$$



# Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos\left[\alpha.(t-x)\right]\mathrm{d}t \right] d\alpha$$

***Integral de Fourier de f(x)***

$$\mathrm{F}_1(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t).cos(\alpha.(x-t).dt;} \qquad \mathrm{F}_1(\alpha)\, es\ par: \qquad \mathrm{F}_1(\alpha) = \mathrm{F}_1(-\alpha)$$

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{F}_1(\alpha).d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_1(\alpha).d\alpha; \qquad reemplazando:$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t).\cos(\alpha.(x-t).dt\right].d\alpha$$

# Integral de Fourier

$$\int_0^{\infty} \mathrm{F}_2(\alpha)\,.\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_2(\alpha)\,.\,d\alpha; \qquad \textit{reemplazando:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,.\,sen(\alpha\,.\,(x-t)\,.\,dt]\,.\,d\alpha = 0 \qquad \textit{por ser impar}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_1(\alpha)\,.\,d\alpha + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_2(\alpha)\,.\,d\alpha$$

*el segundo término es igual a cero;*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)}\,.\,\cos(\alpha\,.\,(\mathrm{x}-\mathrm{t})\,.\,\mathrm{dt}]\,.\,d\alpha + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)}\,.\,sen(\alpha\,.\,(\mathrm{x}-\mathrm{t})\,.\,\mathrm{dt}\right].\,d\alpha$$

# Integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)}.[\cos(\alpha.(\mathrm{x}-\mathrm{t}).\mathrm{dt} + i.sen(\alpha.(\mathrm{x}-\mathrm{t})].\mathrm{dt}].d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(t)}.e^{i\alpha(x-t)}.dt].d\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \cdot[\mathrm{f(t)}.e^{-i\alpha t}.dt].d\alpha$$

Forma exponencial de la Integral de Fourier

# Transformada de Fourier

$$haciendo\ \alpha = \omega = \frac{n\pi}{l}$$

$$Transformada\ de\ Fourier\ de\ la\ función\ f(t)$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ .\ e^{-iwt}\,\mathrm{dt}$$

# Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) . e^{i\omega x} . d\omega \quad ; \textit{haciendo } x = t:$$

Transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) . e^{i\omega t} . d\omega$$

# Transformada de Fourier

*Transformada de Fourier de la función* $f(t)$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ .\ e^{-iwt}\,\mathrm{d}t$$

Transformada inversa de Fourier de la función F(ω)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega).e^{i\omega t}\ .d\omega$$

# Transformada de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) . e^{i\omega x} . d\omega \quad ; haciendo \ x = t:$$

Transformada inversa de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) . e^{i\omega t} . d\omega$$

# Transformada de Fourier

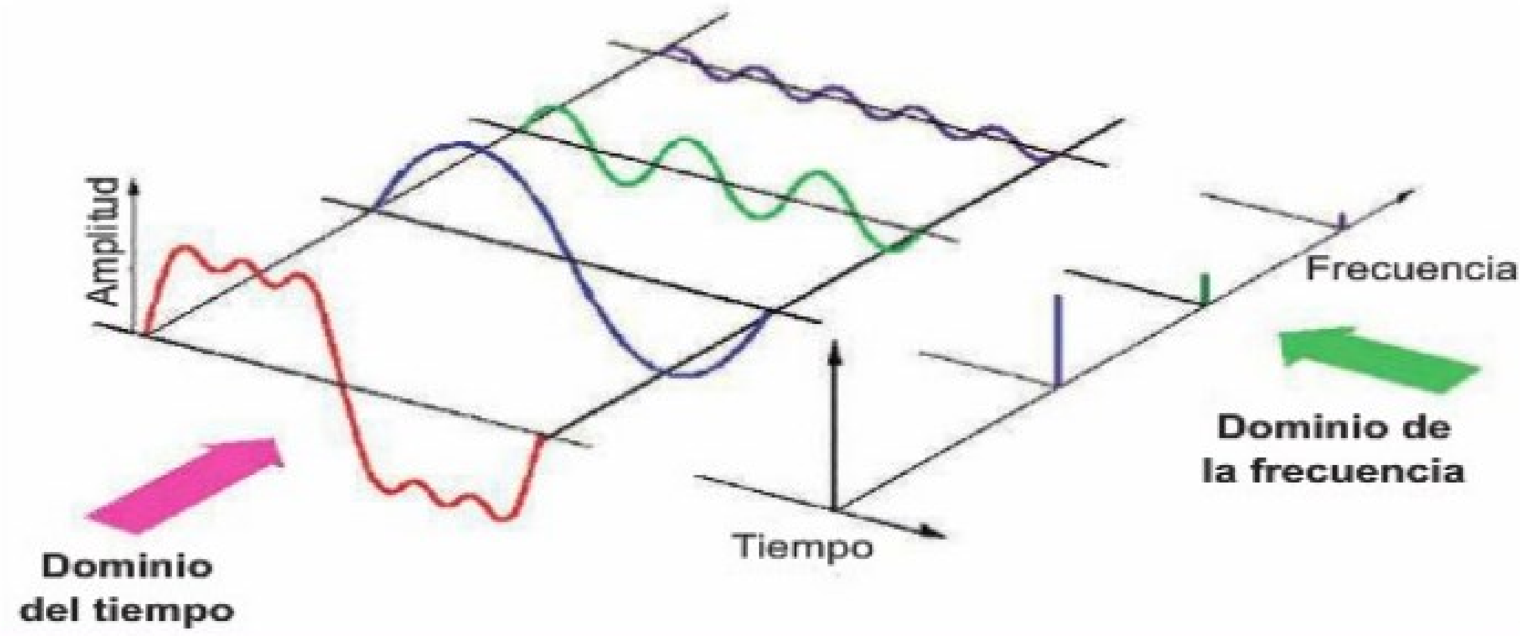
*Transformada de Fourier de la función* $f(t)$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ .\ e^{-iwt}\,\mathrm{d}t$$

Transformada inversa de Fourier de la función F(ω)

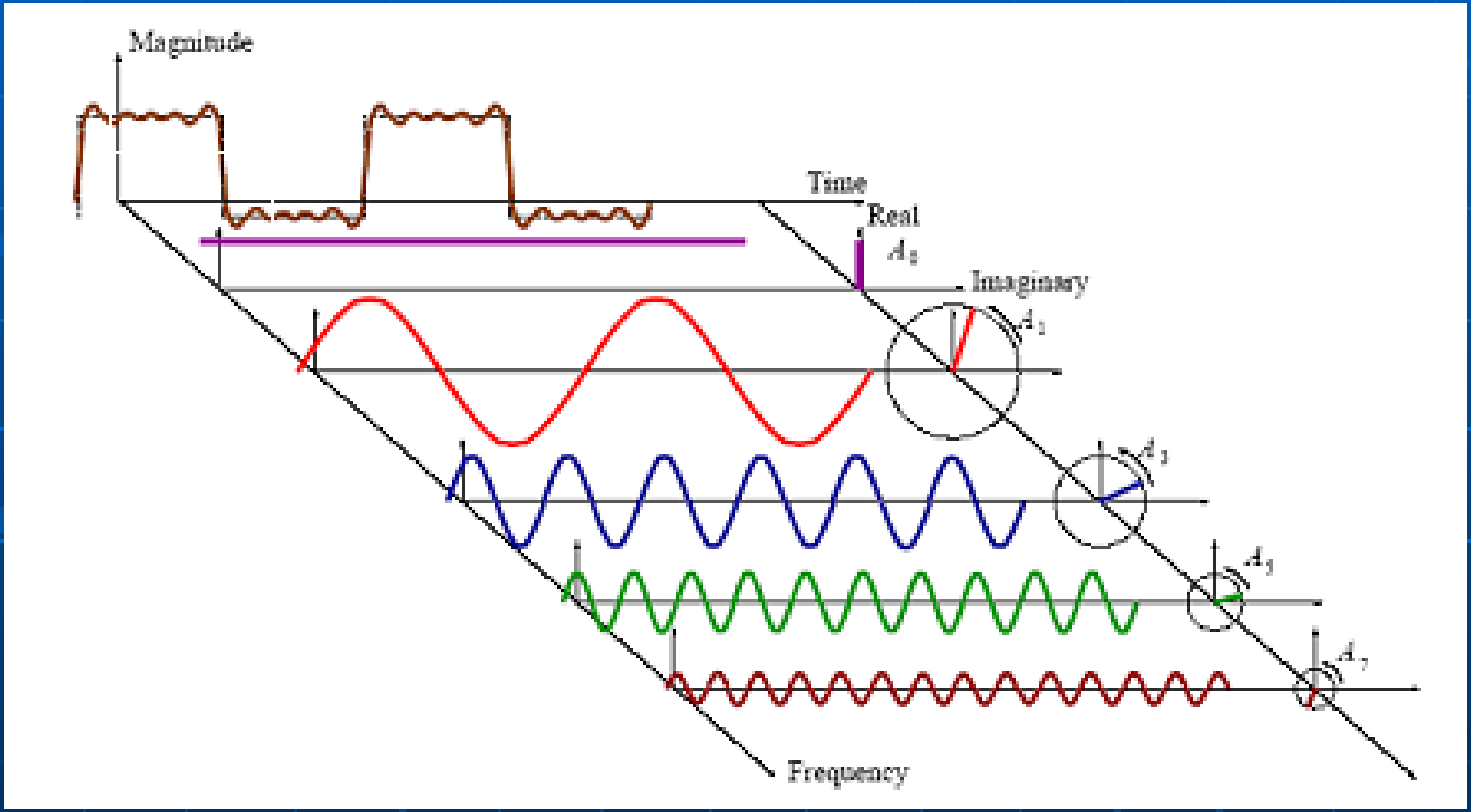
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) . e^{i\omega t}\ . d\omega$$

# Transformada de Fourier

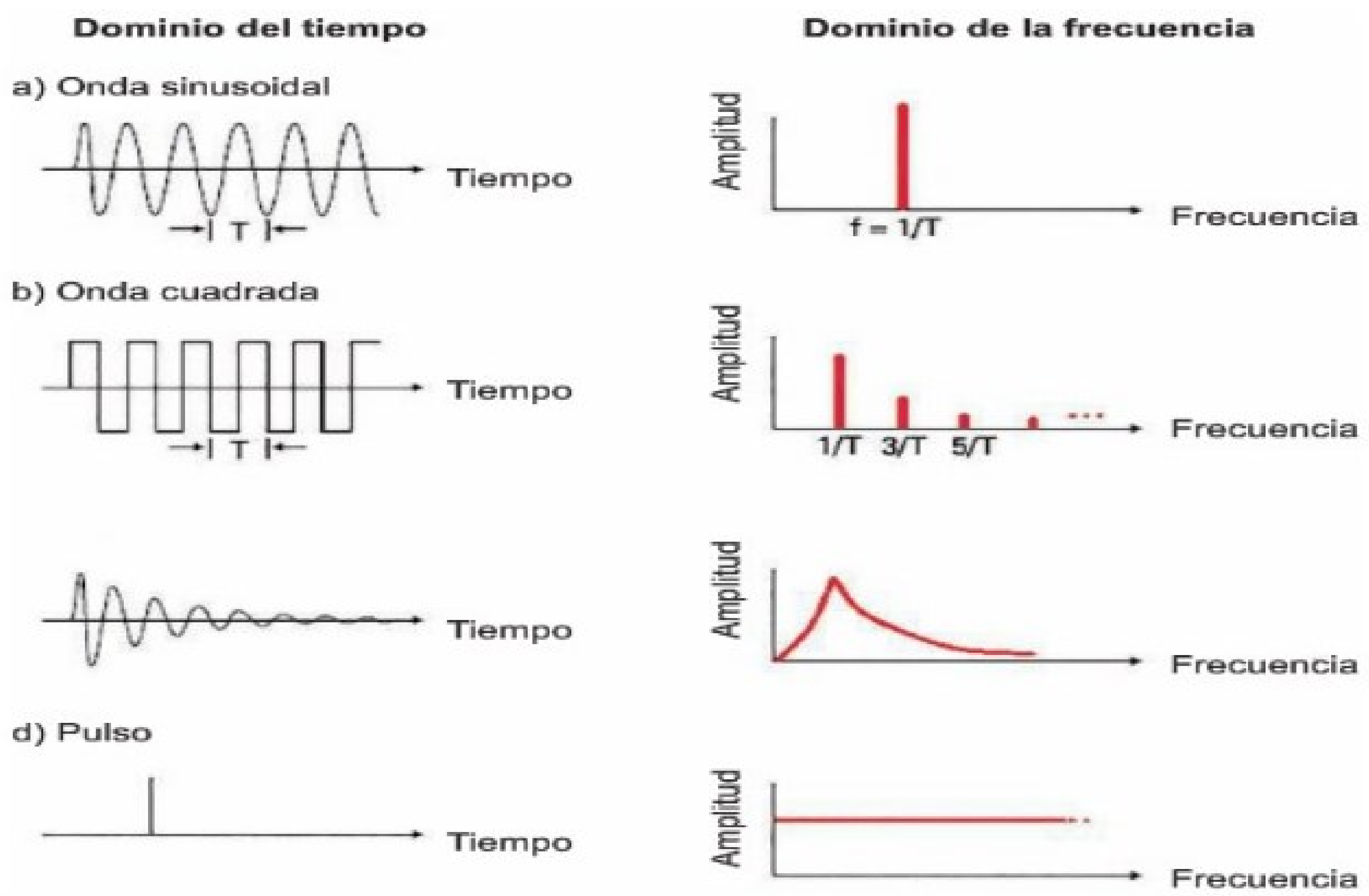



*. Señal periódica compuesta y sus armónicos sinusoidales representados en el dominio del tiempo y en frecuencia.*

- **Representación de las series de Fourier**

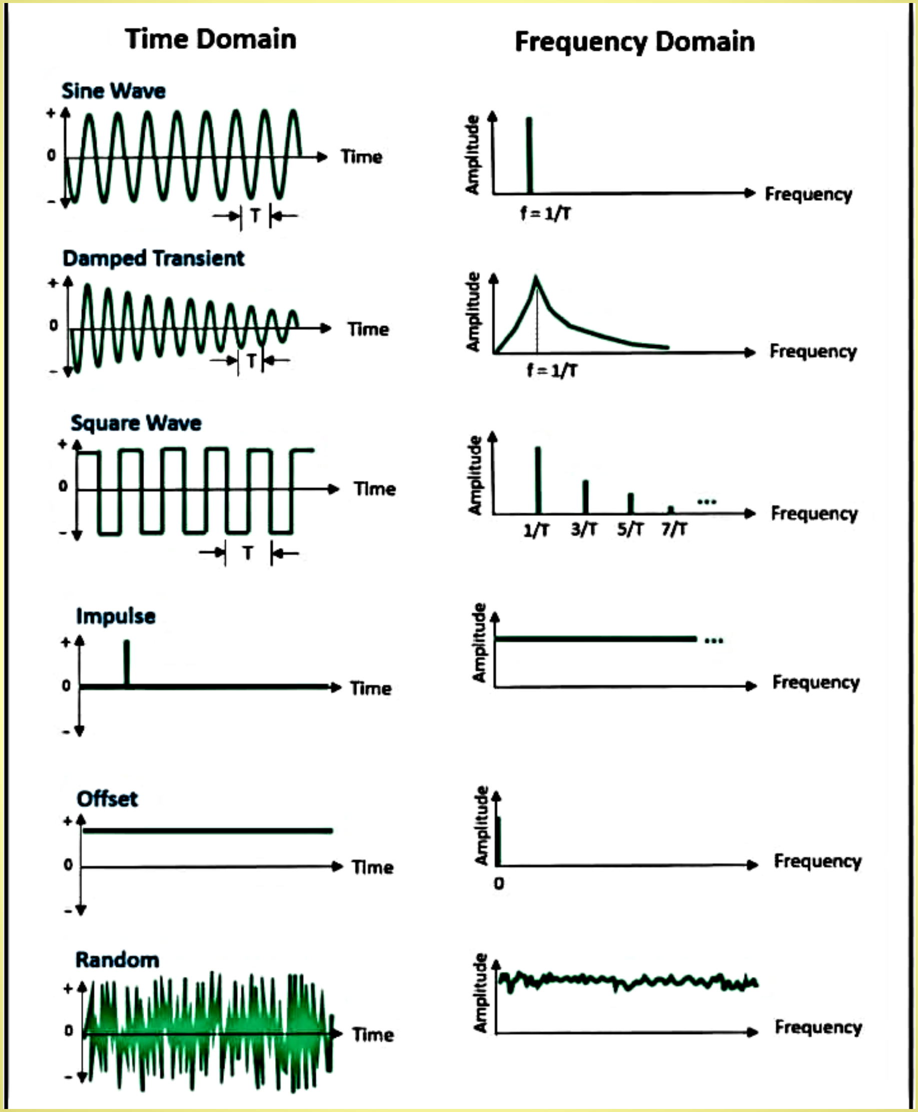


# Transformada de Fourier




*Diferentes señales de ondas representadas en el dominio del tiempo y en frecuencia.*

# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

## Transformación integral

**Una definición.** Una transformación integral se define como la operación matemática que asocia a cada función $f(t)$ en el espacio directo (o real), otra función $F(\tau)$ en el espacio recíproco mediante la siguiente identidad

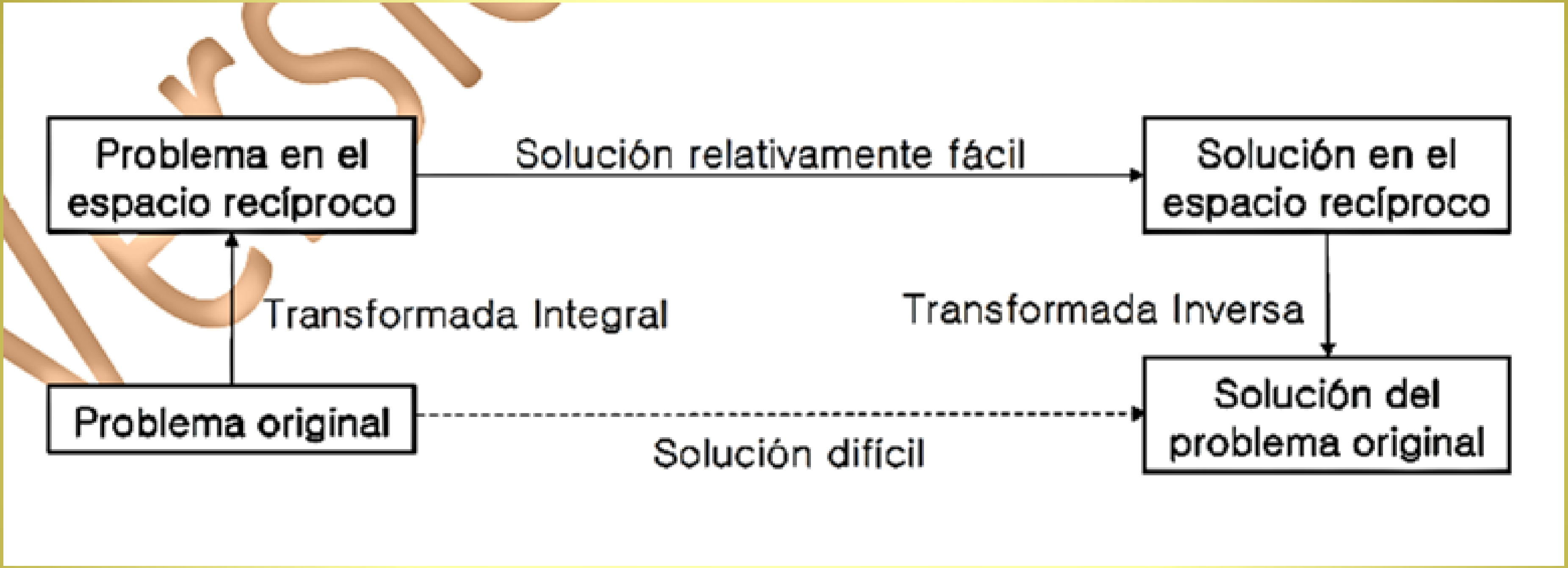
$$F(\tau) \equiv \int_a^b K(\tau,t)\, f(t)\, dt$$

donde $K(\tau,t)$ recibe el nombre de ***kernel*** de la transformación, y los límites $a$ y $b$ están dados por la transformada correspondiente.

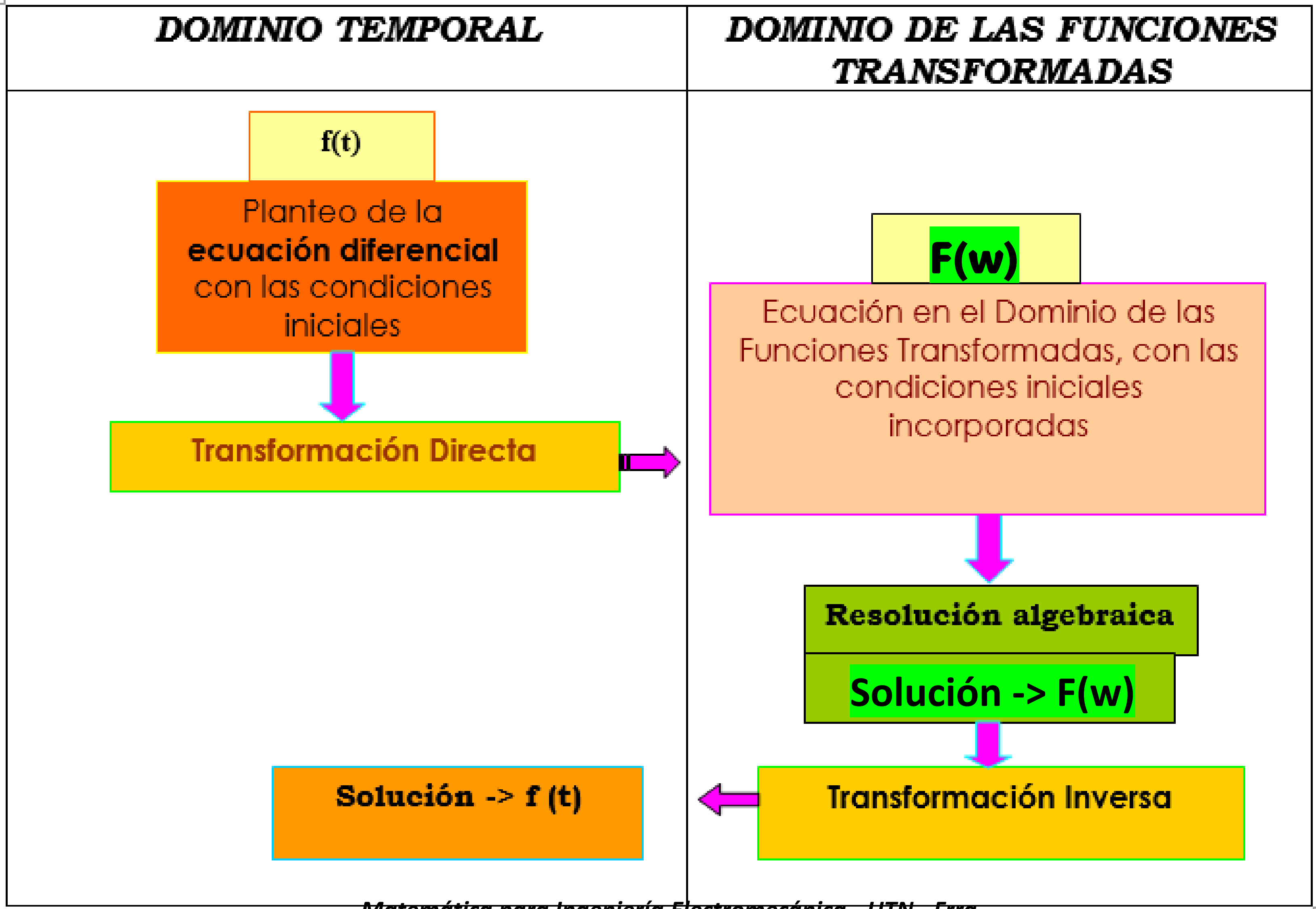
Ejemplos de transformadas integrales son: la de Fourier, la de Laplace, la Z, la de Hilbert, etc., cada una con su correspondiente *kernel* y límites $a$ y $b$.

La importancia de las transformadas integrales reside en que un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" originales (espacio real o directo), a menudo es más sencillo de resolver al transformarlo al espacio recíproco, después de ello, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.

# Transformada de Fourier



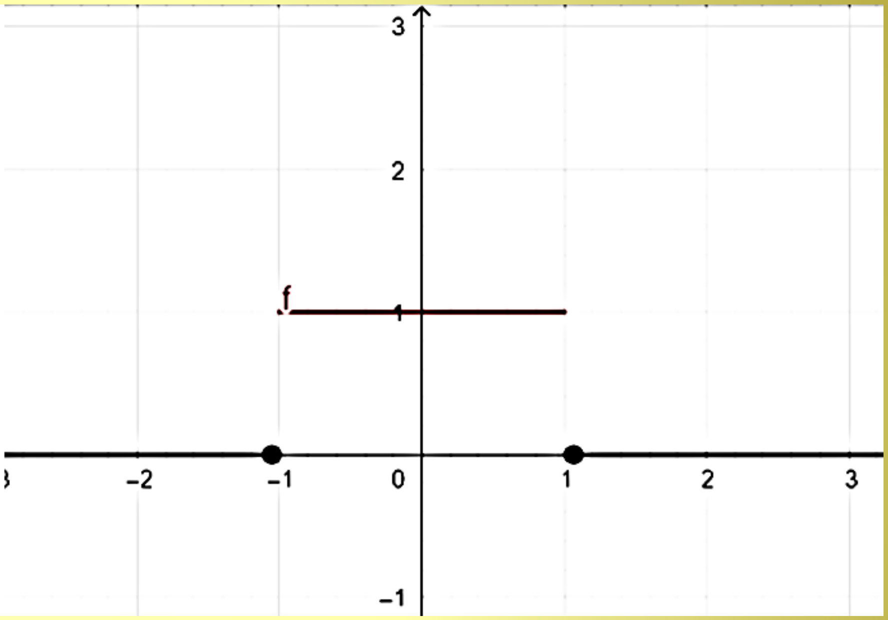
# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ |x| < 1 \\ 0 \ si \ |x| > 1 \end{cases}$$

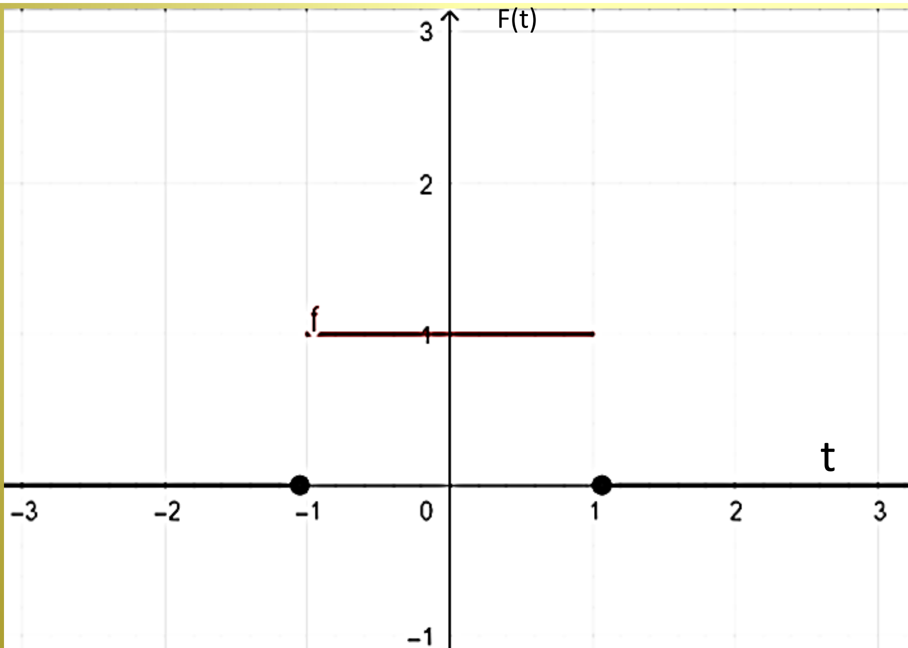
*Función par*

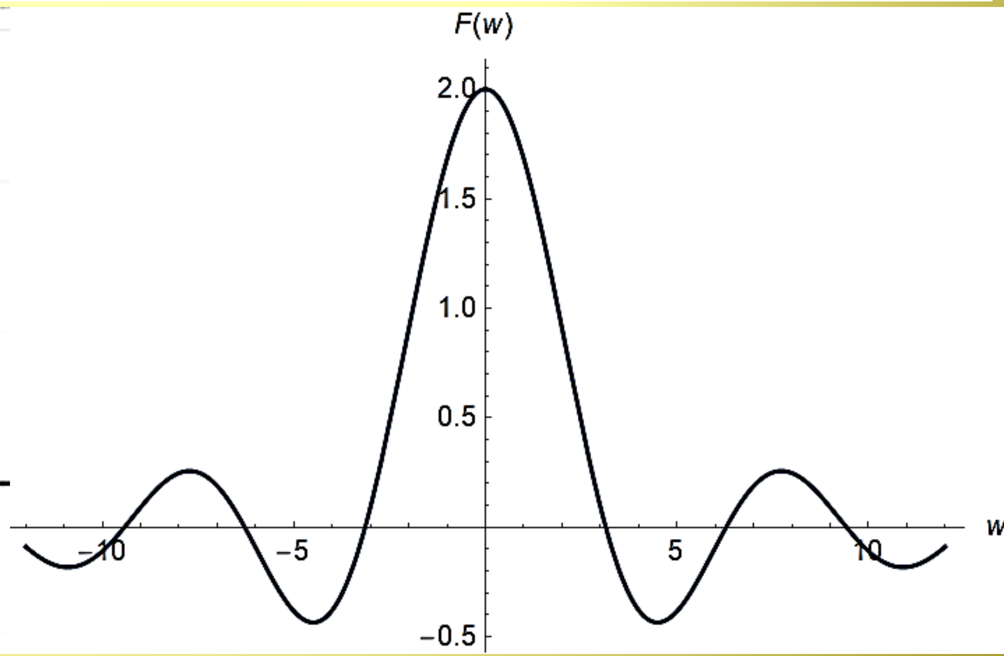


# Transformada de Fourier

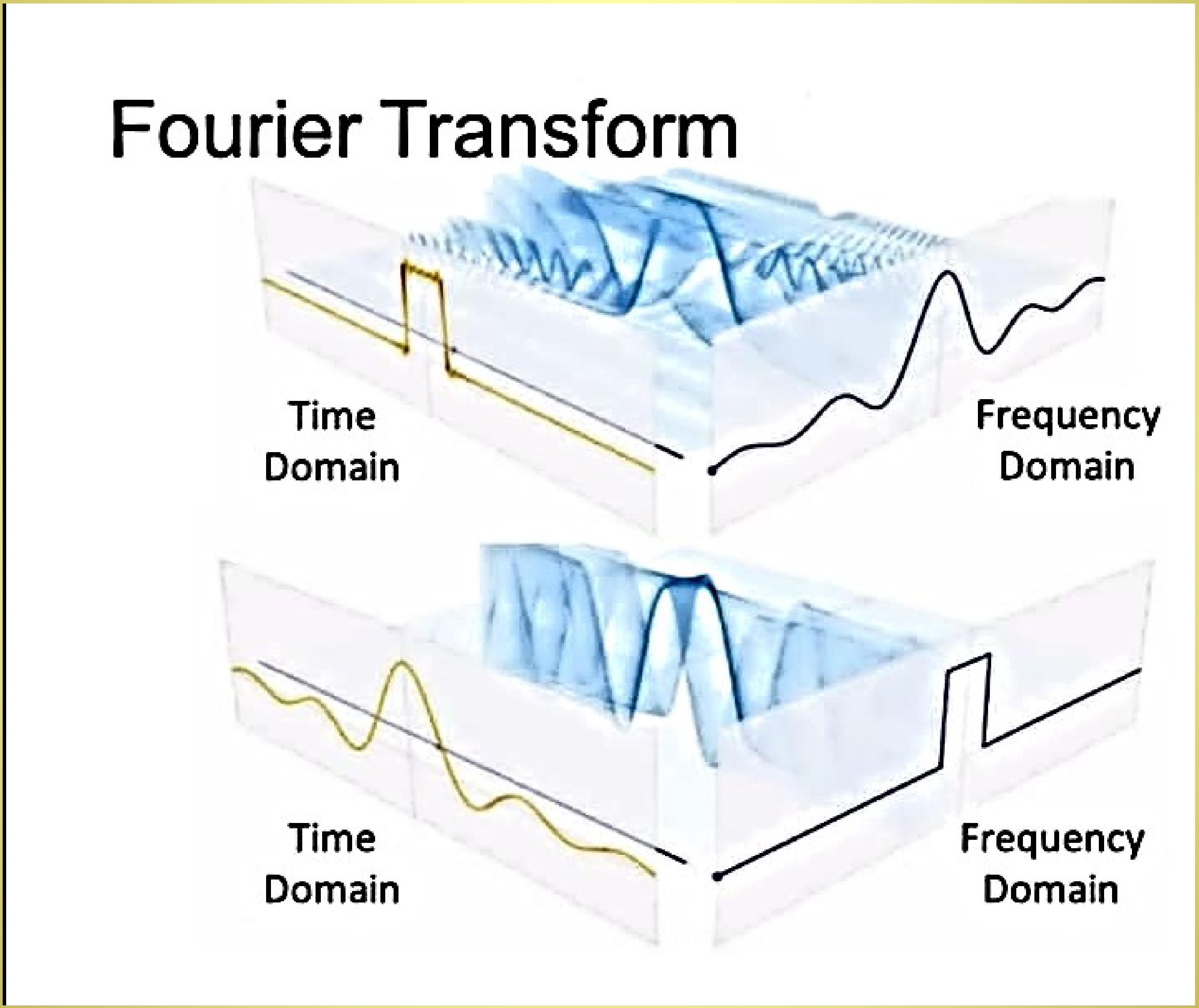
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\,e^{-\omega t i}.\,dt=\int_{-1}^{1} e^{-\omega t i}.\,dt=\left[\frac{e^{-\omega t i}}{-\omega .i}\right]_{-1}^{1}=\frac{-1}{\omega .i}.\left(e^{-\omega i}-e^{\omega i}\right)$$

$$=2.\,\frac{sen(\omega)}{\omega}=F(\omega)$$



# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

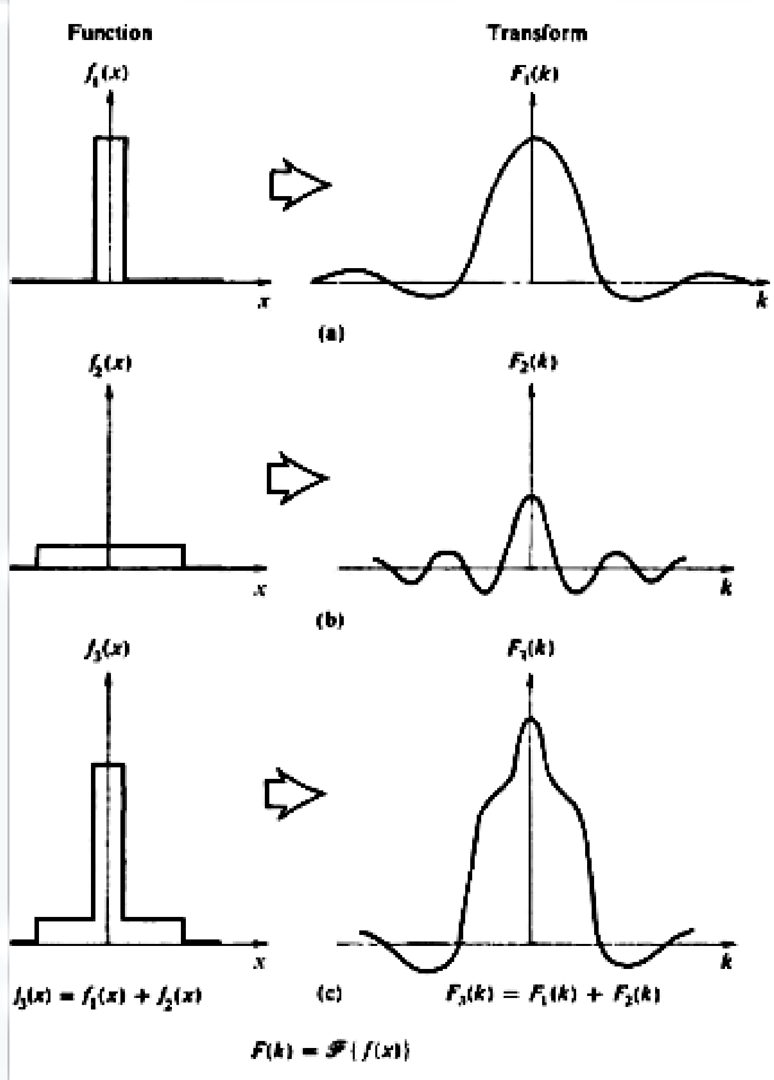
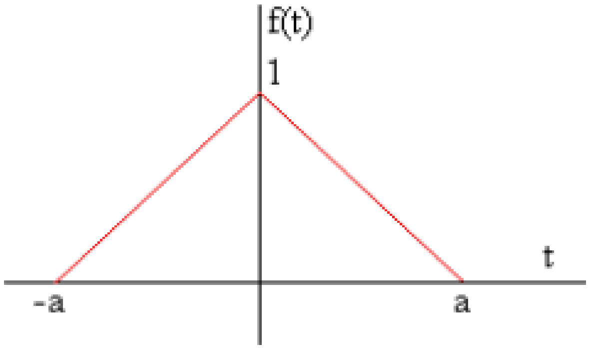


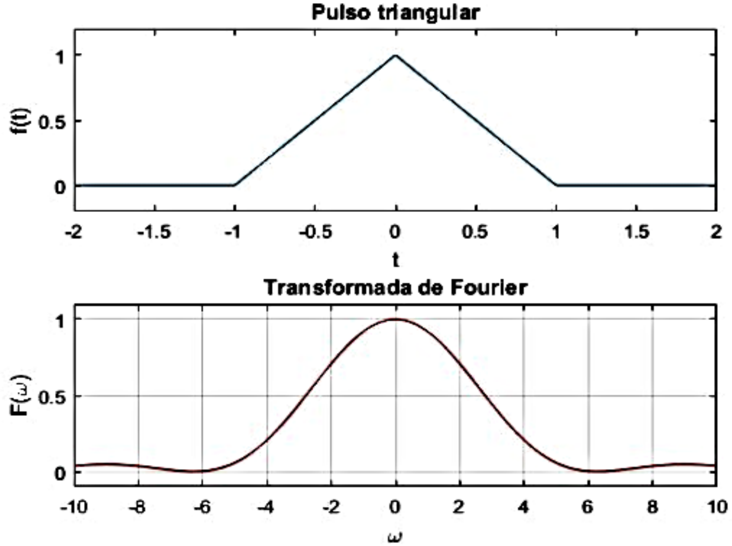

Figura 3. Funciones compuestas y sus transformadas de Fourier.

# Transformada de Fourier

## Pulso triangular




$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{a} & -a \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{a} & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{otros } t \end{cases}$$



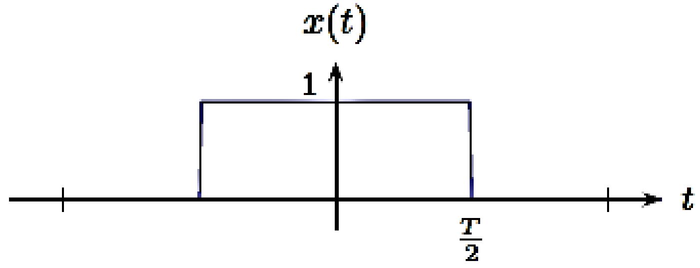

En la ventana de comandos aparece la transformada de Fourier, que es la misma que hemos deducido con $a=1$

La transformada de Fourier es

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt =$$

$$\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{t}{a}\right)\exp(-i\omega t)dt + \int_{0}^{a}\left(1-\frac{t}{a}\right)\exp(-i\omega t)dt = \frac{4\sin^2(\omega a/2)}{a\omega^2}$$

# Transformada de Fourier



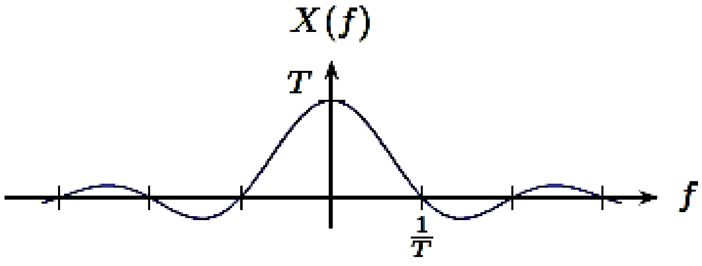
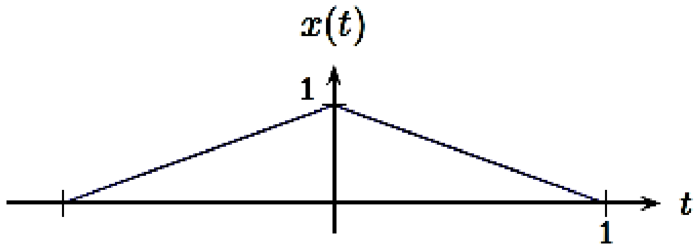




Figura 2.6: Transformada de Fourier de un pulso rectangular



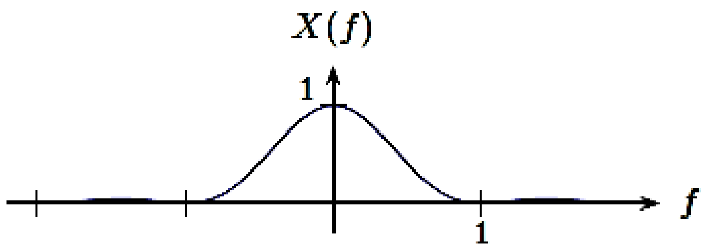
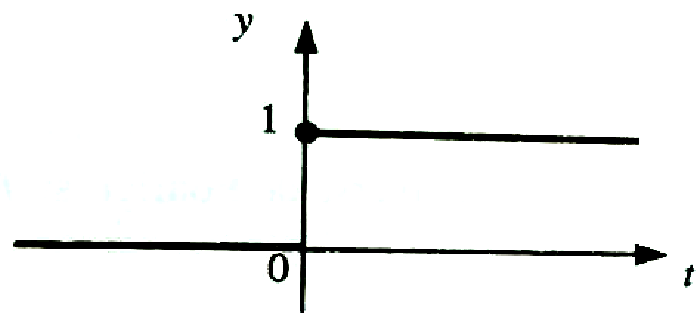




Figura 2.9: Transformada de Fourier de pulso triangular

# Transformada de Fourier

Obtener la transformada de Fourier de $h(t)$, donde $h(t)$ es la función de Heaviside.

Siendo $h(t)=\begin{cases} 1 & si \quad t \geq 0 \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases}$, la gráfica es




Entonces

$$F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iwt}\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{+\infty} 1\, e^{-iwt}\, dt$$

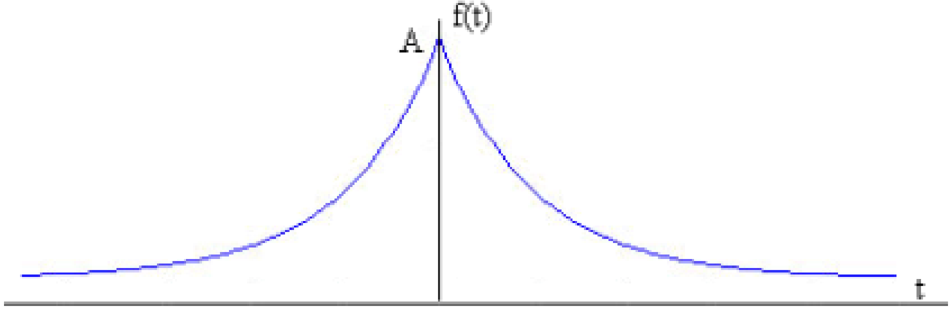
$$F(w) = \left.\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right|_{0}^{+\infty}$$

$$F(w) = \frac{1}{iw}$$

# Transformada de Fourier

## Función exponencial

Transformada de Fourier de la función $f(t)=A\exp(-\gamma|t|)$




Primero, calculamos la transformada de Fourier de la función $f(t)=A\exp(-\gamma t)\cdot u(t)$. La integración de $f(t)$ se extiende entre 0 e $\infty$

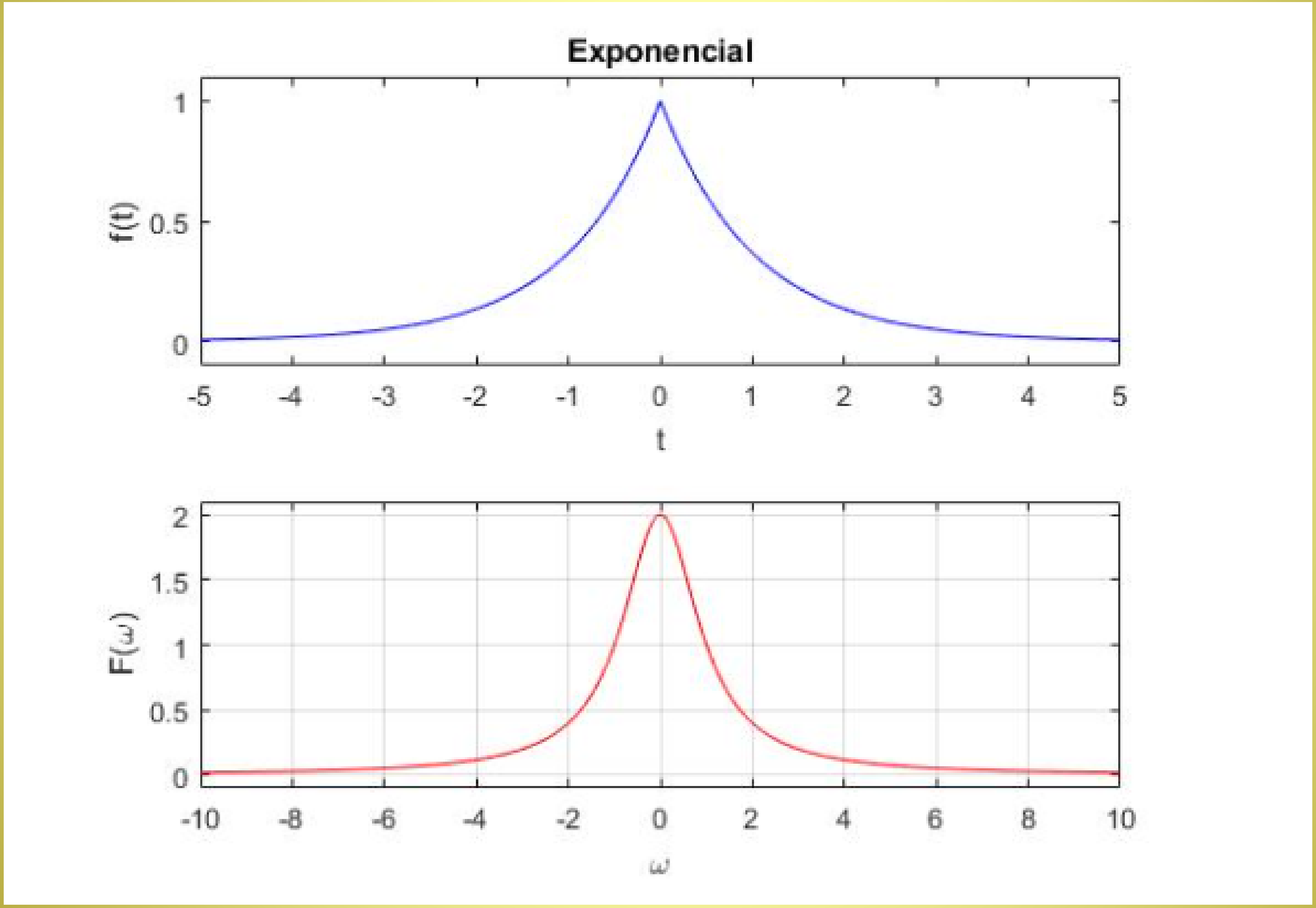
$$F(\omega)=\int_0^\infty Ae^{-\gamma t}e^{-i\omega t}dt=\int_0^\infty A\exp\left(-(\gamma+i\omega)t\right)dt=-\tfrac{A}{\gamma+i\omega}\exp\left(-(\gamma+i\omega)t\right)\Big|_0^\infty=$$

$$\tfrac{A}{\gamma+i\omega}\quad \gamma>0$$

A continuación, tenemos en cuenta la propiedad de la transformada de Fourier de la función $f(-t)$ es $F(-\omega)$, la transformada de las dos exponenciales es la suma

$$F(\omega)=\frac{A}{\gamma+i\omega}+\frac{A}{\gamma-i\omega}=A\frac{2\gamma}{\gamma^2+\omega^2}$$

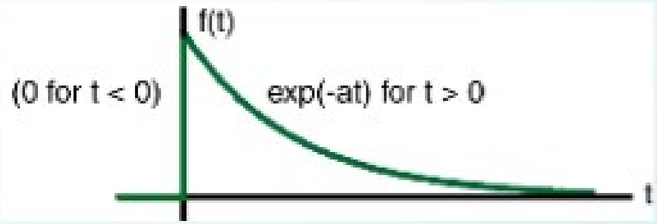
# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

Encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-a\,.\,t}, & si\ t \geq 0 \\ 0 \quad\quad , & si\ t < 0 \end{cases}$$




$a > 0$

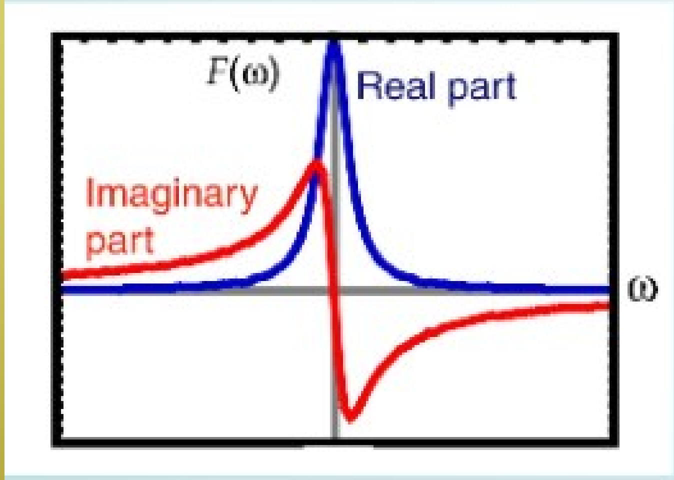
$$\hat{f}(\omega) = \int_0^\infty e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+i\omega)t}\, dt = -\left.\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega}\right|_0^\infty =$$

$$-\frac{1}{a+i\omega}(0-1) = \frac{1}{a+i\omega} =$$

$$\frac{1}{a+i\omega}\,\frac{a-i\omega}{a-i\omega} =$$

$$\frac{a}{a^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$



# Transformada de Fourier

*Obtener la transformada de Fourier de* $f(t) = e^{-a|t|}$ *y* $a > 0$.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}.e^{-i\omega t}\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-t)}.e^{-i\omega t}.dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a(t)}.e^{-i\omega t}.dt$$

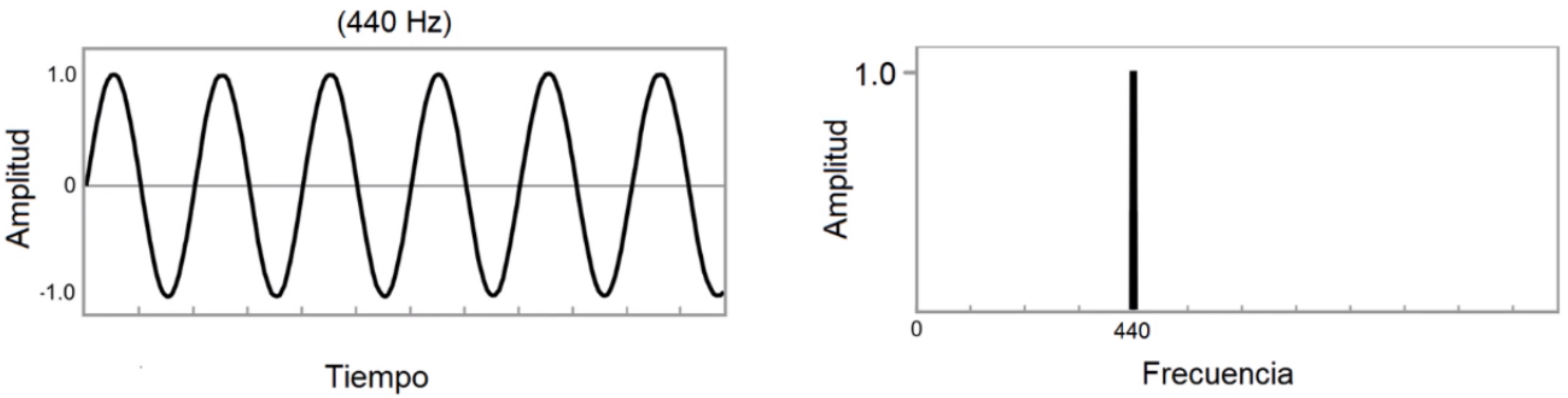
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(a-i\omega)}.dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(a-i\omega)}.dt = \frac{e^{t(a-i\omega)}}{a-i\omega}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-t(a-i\omega)}}{-(a-i\omega)}\Bigg|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{(a+i\omega)+(a-i\omega)}{(a+i\omega).(a-i\omega)} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

# Transformada de Fourier

| | $f(t)$ | $F(w)$ |
|---|---|---|
| 1 | $h(t)$ | $\dfrac{1}{iw}$ |
| 2 | $h(t)\,e^{-at}$; $a>0$ | $\dfrac{1}{a+iw}$ |
| 3 | $e^{-a\|t\|}$; $a>0$ | $\dfrac{2a}{a^2+w^2}$ |
| 4 | $e^{-at^2}$; $a>0$ | $\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-w^2/4a}$ |
| 5 | $h(t+a)-h(t-a)$ | $F(w)=\dfrac{2}{w}\mathrm{sen}(aw)$ |
| 6 | $\delta(t)$ | 1 |

# Transformada de Fourier

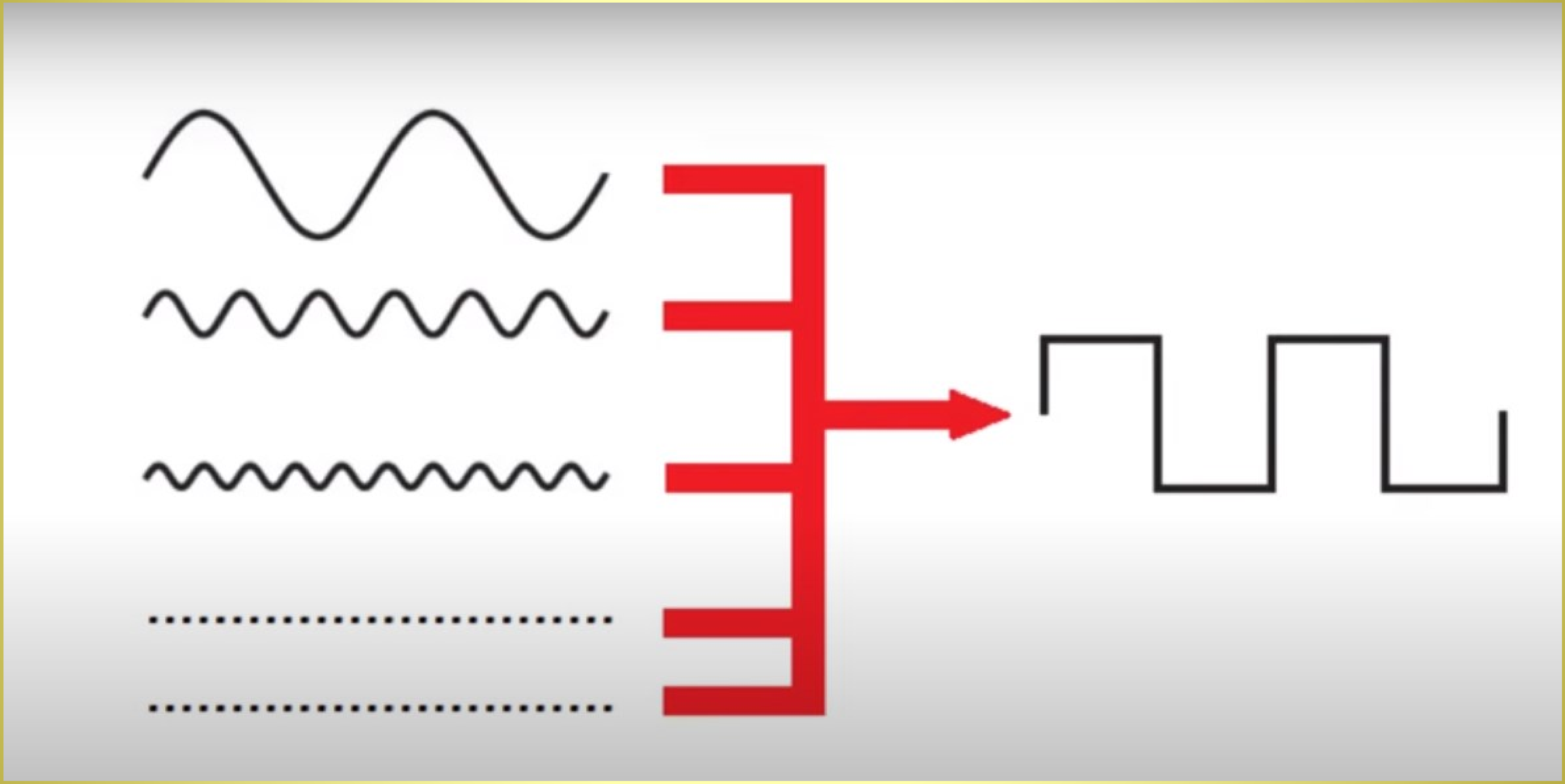



## *ESPECTRO DE FRECUENCIAS*

# Transformada de Fourier

**Se denomina espectro de frecuencias a la representación de las amplitudes de las ondas senoidales en función de la frecuencia de las mismas.**
**Es una medida de la distribución de las amplitudes de cada frecuencia.**

# Transformada de Fourier



## *SERIE DE FOURIER*

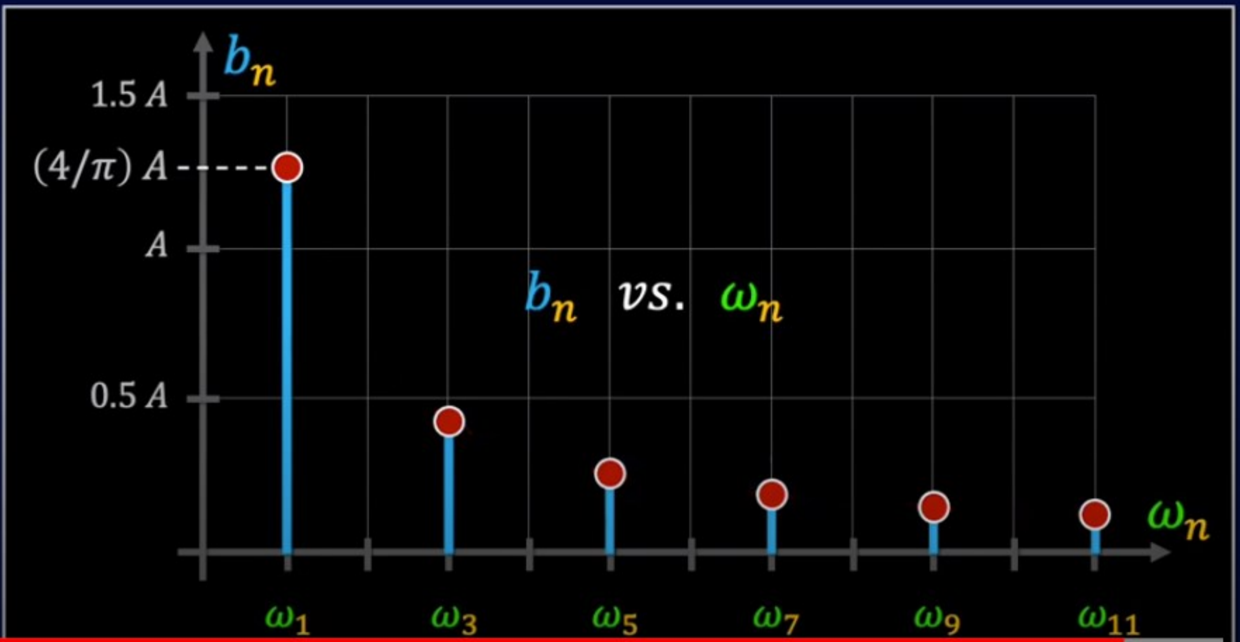
# Transformada de Fourier

08 - Cómo Graficar el Espectro de Frecuencias de una Serie de Fourier

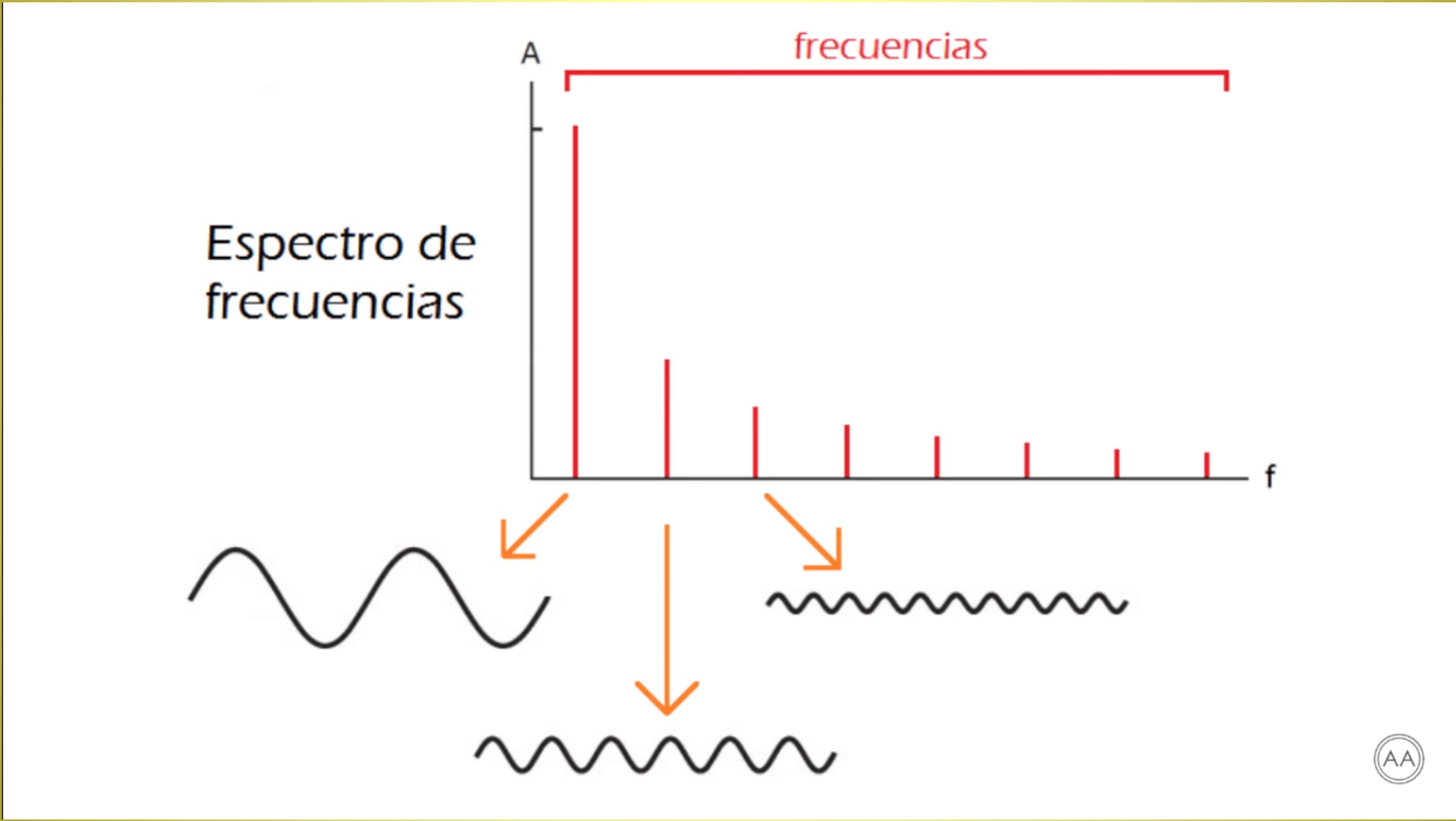
$$f(t) = \begin{cases} -A, & -\dfrac{T}{2} < t < 0 \\ +A, & 0 < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

$$\omega_n = n\,\omega_0 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \omega_n = n\,\frac{2\pi}{T}$$

| $n$ | $\omega_n$ | $a_n$ | $b_n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $\omega_0$ | 0 | $\frac{4}{\pi}\frac{A}{1}$ |
| 2 | $2\,\omega_0$ | 0 | 0 |
| 3 | $3\,\omega_0$ | 0 | $\frac{4}{\pi}\frac{A}{3}$ |
| 4 | $4\,\omega_0$ | 0 | 0 |
| 5 | $5\,\omega_0$ | 0 | $\frac{4}{\pi}\frac{A}{5}$ |
| 6 | $6\,\omega_0$ | 0 | 0 |
| 7 | $7\,\omega_0$ | 0 | $\frac{4}{\pi}\frac{A}{7}$ |



# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

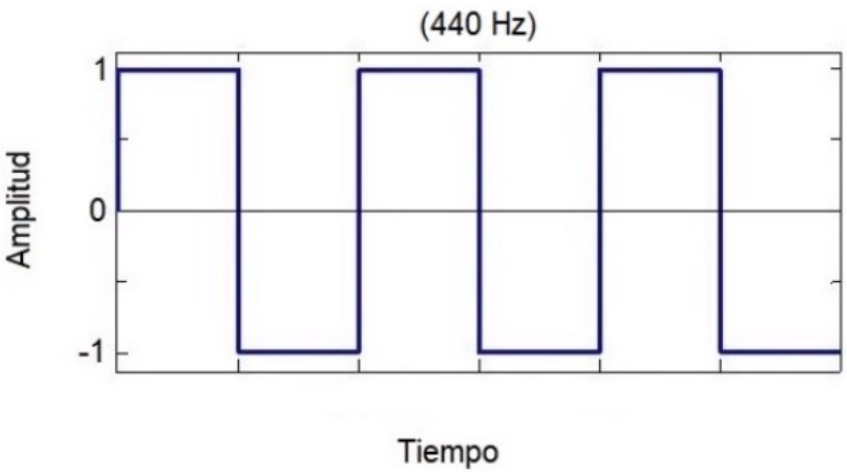
$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi(2k-1)ft\right)}{2k-1}$$

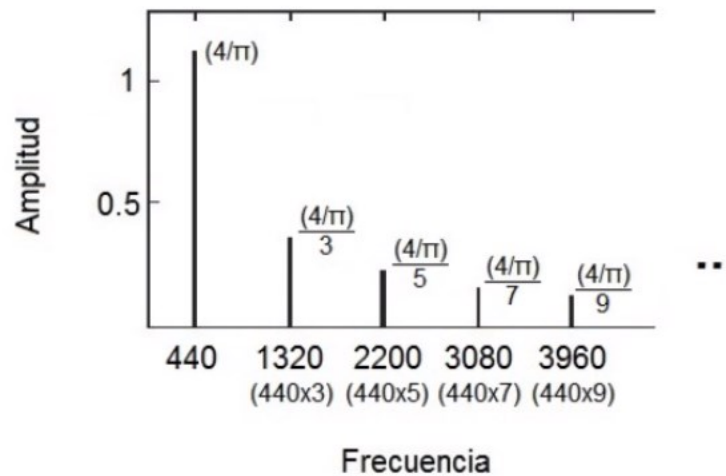
$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(wt) + \frac{1}{3}\sin(3wt) + \frac{1}{5}\sin(5wt) + \ldots\right)$$

$$\text{Donde } w = 2\pi f$$


## *ESPECTRO DE FRECUENCIAS*

# Transformada de Fourier



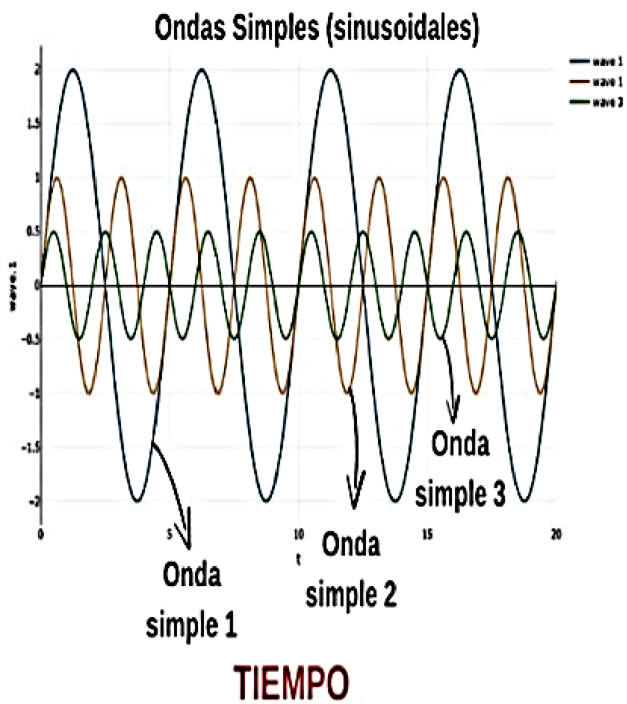



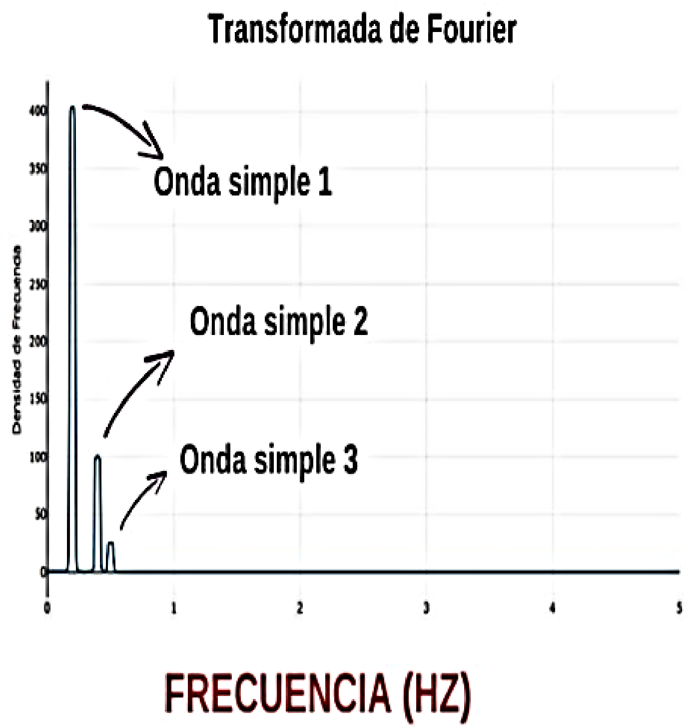

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\big(2\pi(2k-1)ft\big)}{2k-1}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin(wt) + \frac{1}{3}\sin(3wt) + \frac{1}{5}\sin(5wt) + \dots\right)$$

$$\text{Donde } w = 2\pi f$$

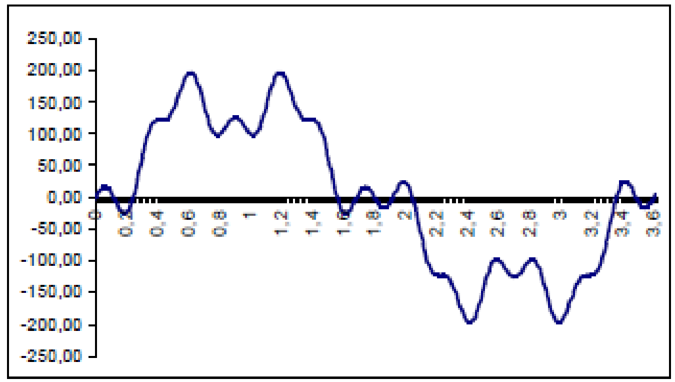
## *ESPECTRO DE FRECUENCIAS*


Ondas Simples (sinusoidales)
Onda simple 1
Onda simple 2
Onda simple 3
TIEMPO

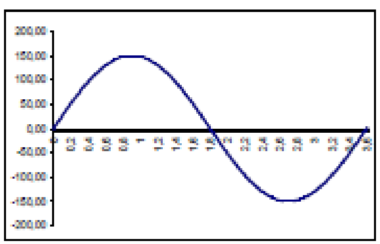

Transformada de Fourier
Onda simple 1
Onda simple 2
Onda simple 3
Densidad de Frecuencia
FRECUENCIA (HZ)

# Transformada de Fourier

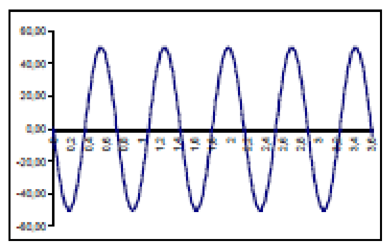
## Descomposición Armónica



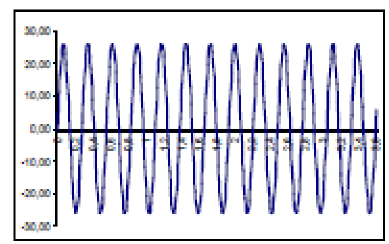

=



+

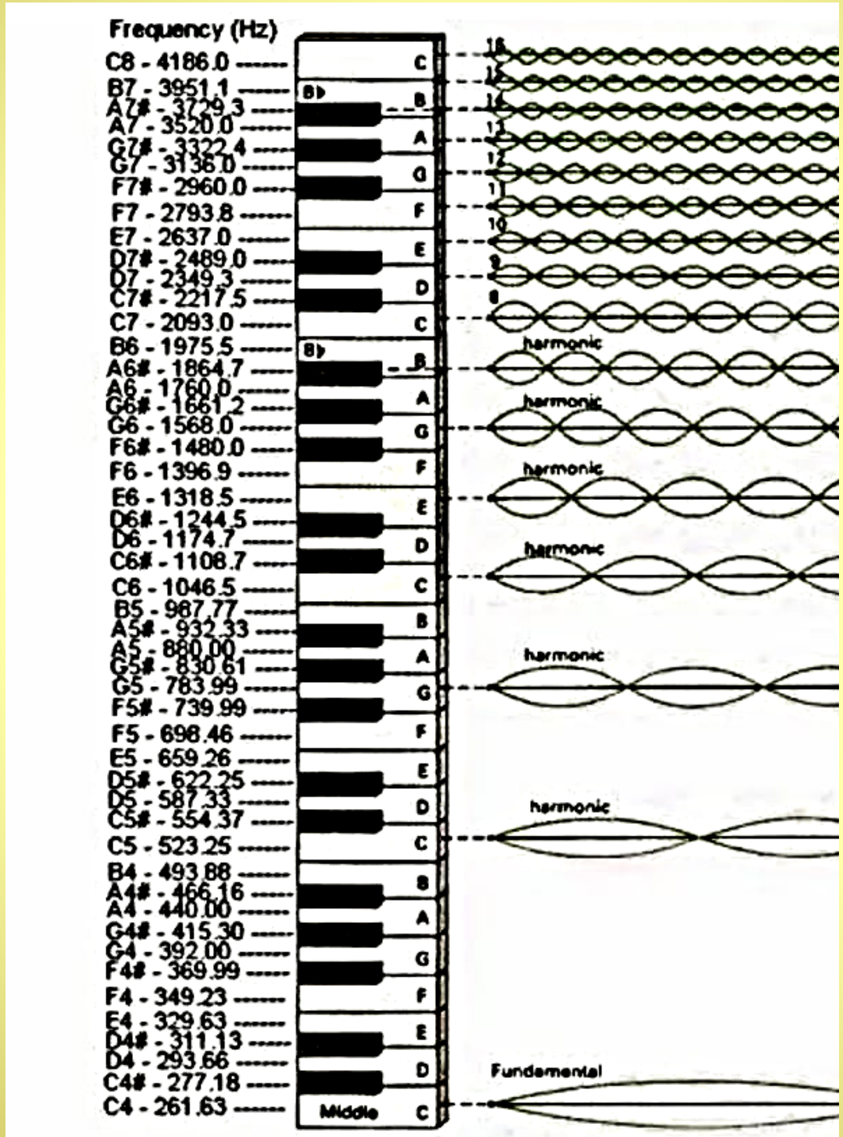


+



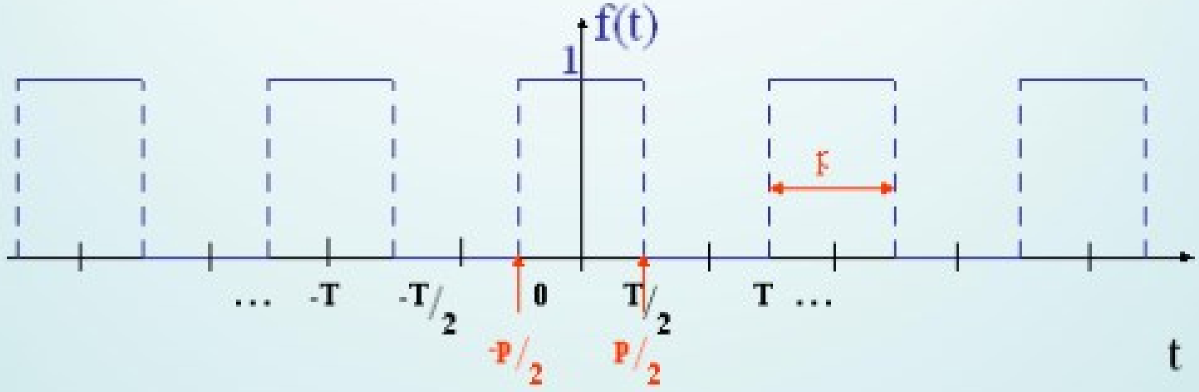
**Fundamental** **Armónicos**

# Transformada de Fourier



# Transformada de Fourier

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T:




$$f(t)=\begin{cases} 0 & \frac{-T}{2}<t<\frac{-p}{2} \\ 1 & \frac{-p}{2}<t<\frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2}<t<\frac{T}{2} \end{cases}$$

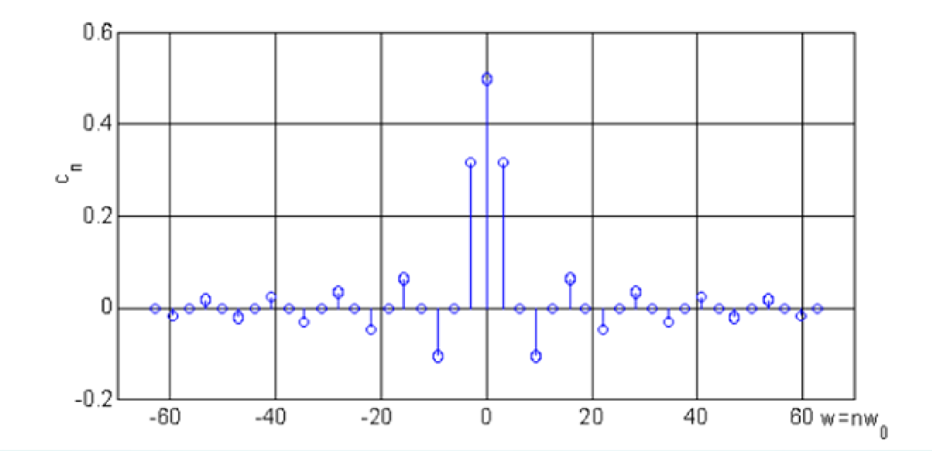
# Transformada de Fourier

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

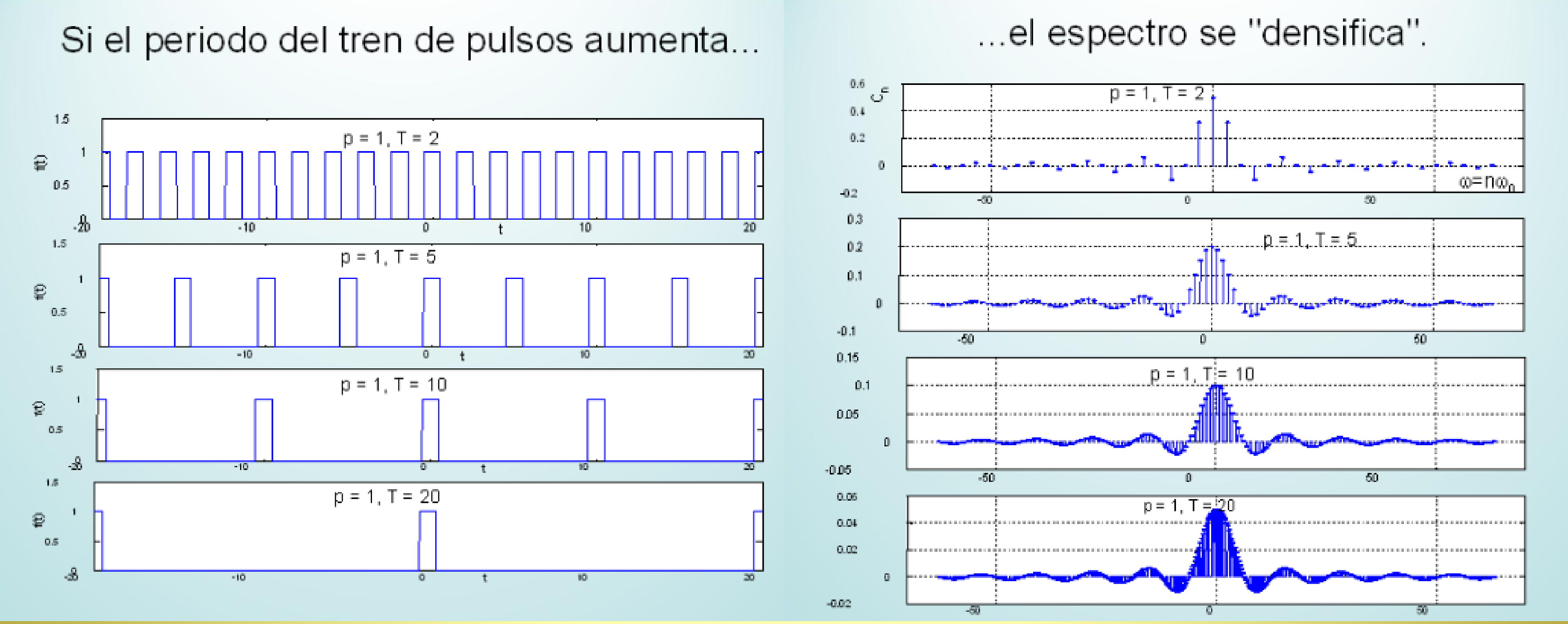
$$c_n = \left(\frac{p}{T}\right)\frac{sen(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando $c_n$ contra $\omega = n\omega_0$.

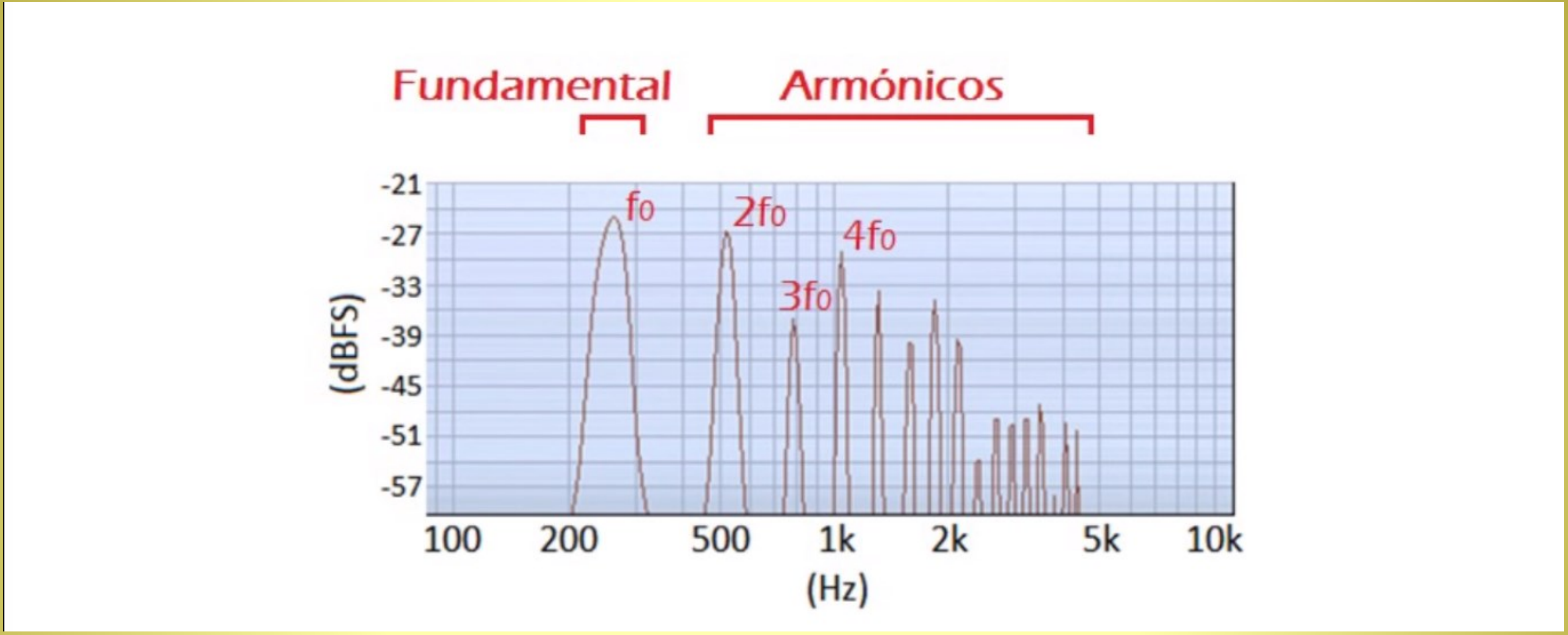
Espectro del tren de pulsos para p = 1, T = 2



# Transformada de Fourier



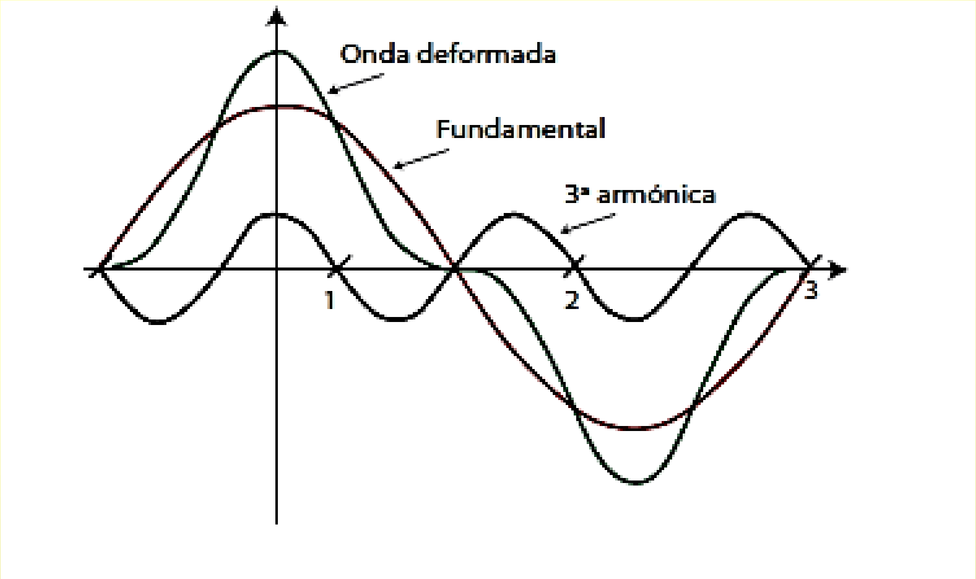
# Transformada de Fourier




## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

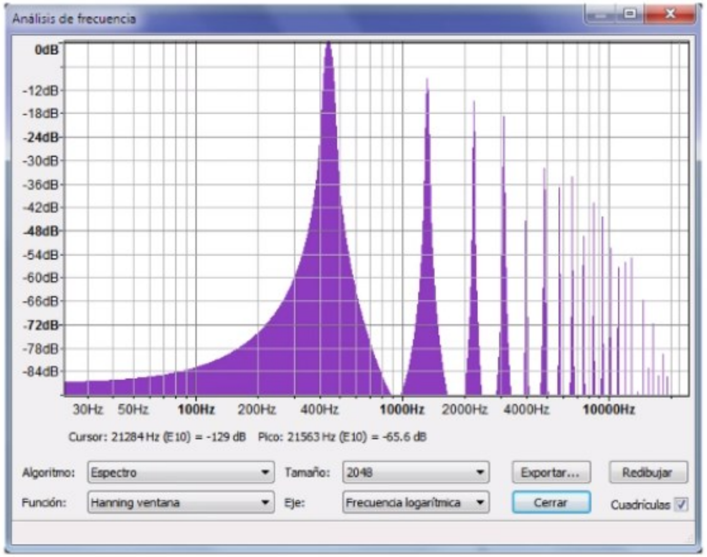
# Transformada de Fourier

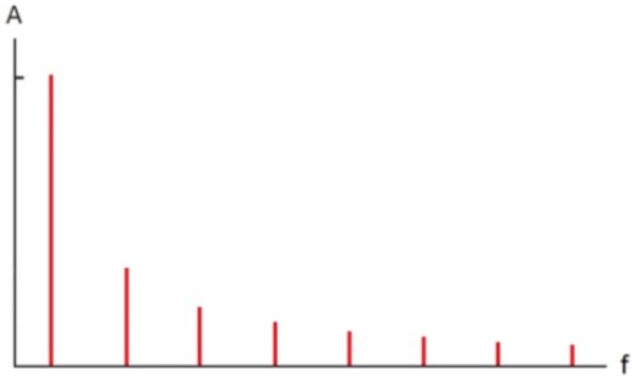
Se denomina *armónica* a una función senoidal cuya frecuencia es un múltiplo de la frecuencia fundamental .




***ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL***

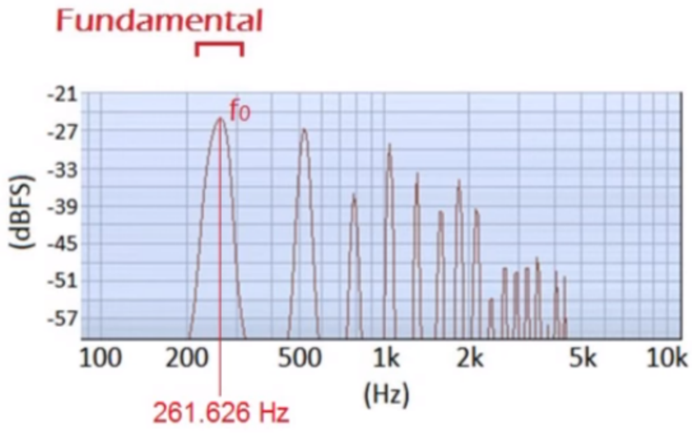
# Transformada de Fourier

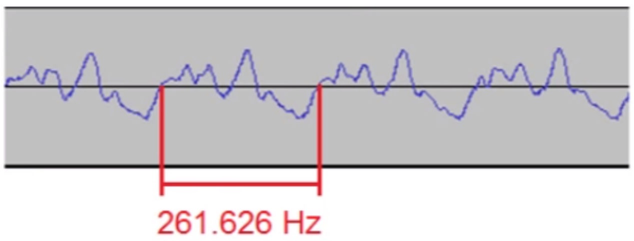



## ESPECTRO DE FRECUENCIAS

# Transformada de Fourier

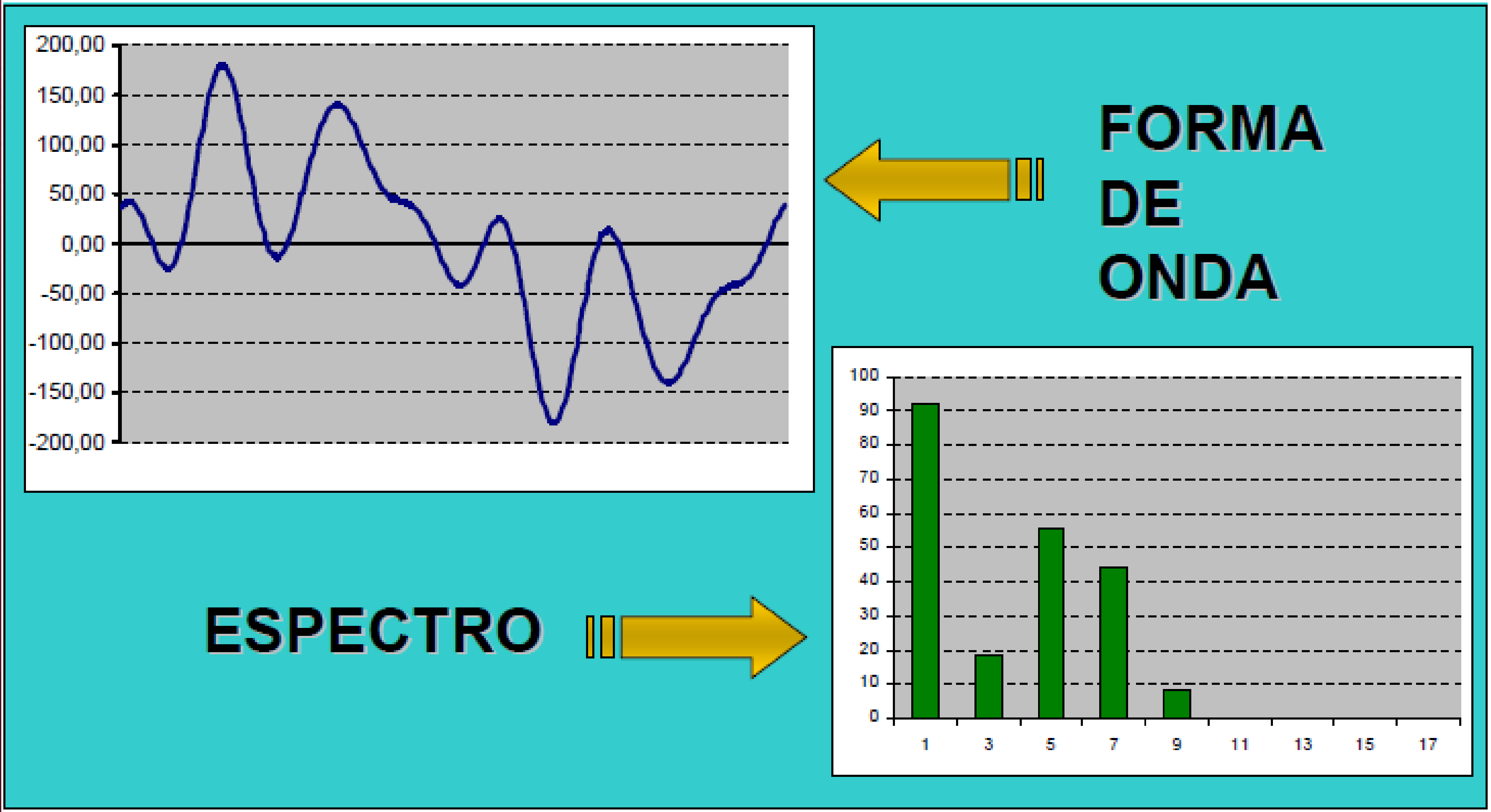



$f_0$ = 261.626 Hz (Do4)

# *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

# Transformada de Fourier




## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

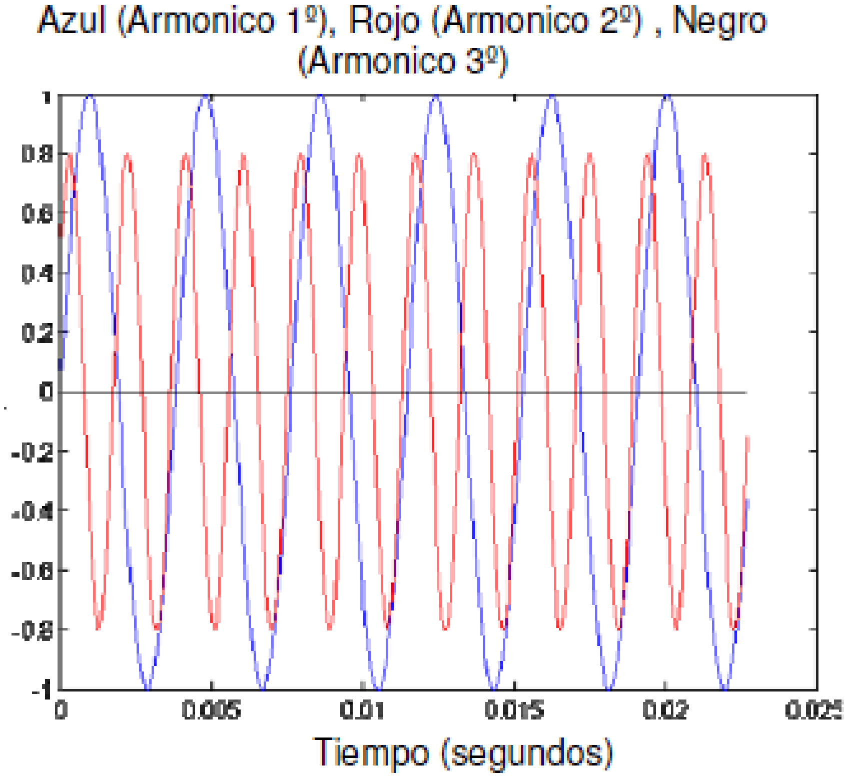
# Transformada de Fourier

## Ejemplo: Análisis de Fourier

Descomposición de una onda compleja en sus armónicos

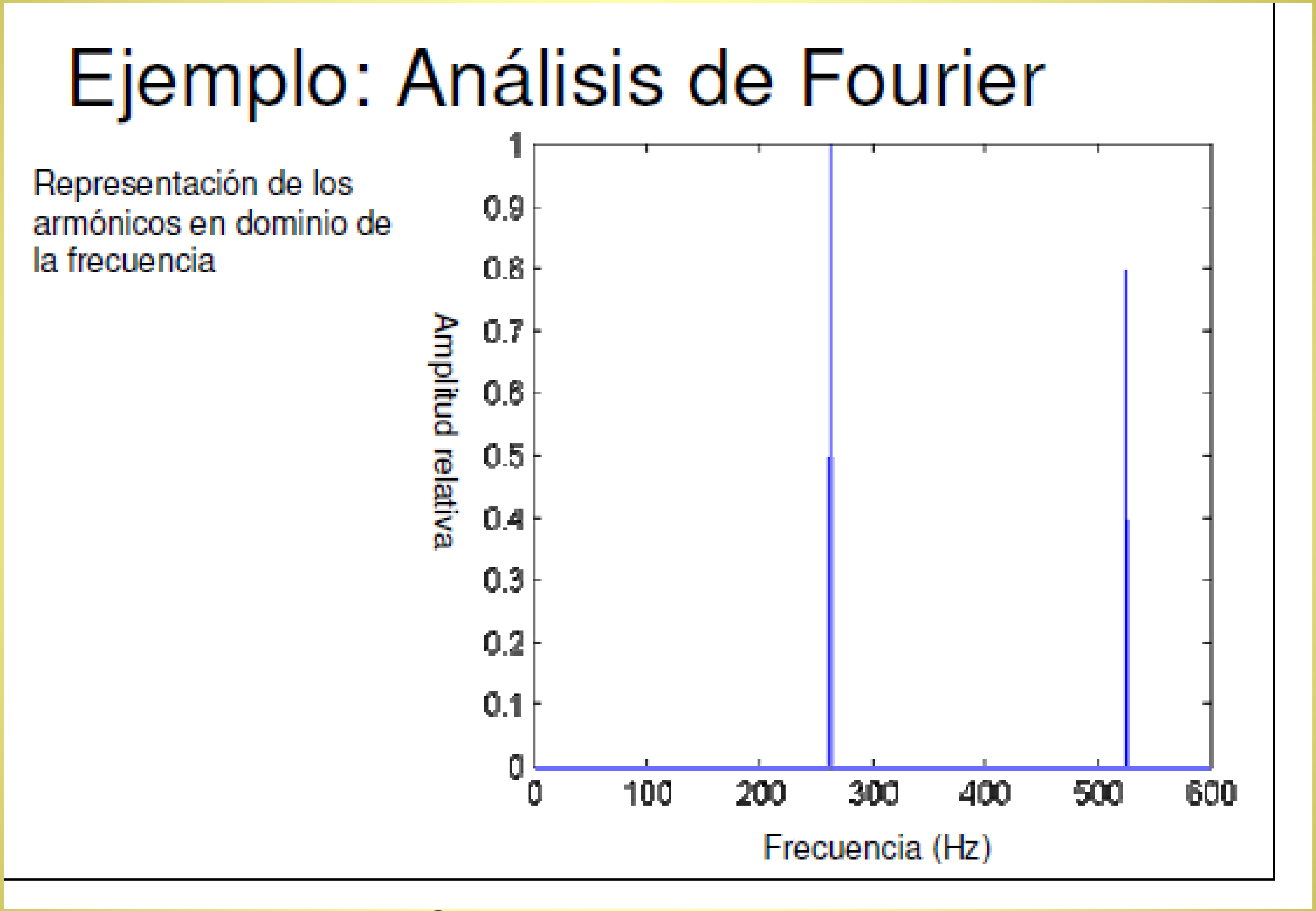
f1=262 Hz (frecuencia fundamental)

f2=2x262Hz=524 Hz



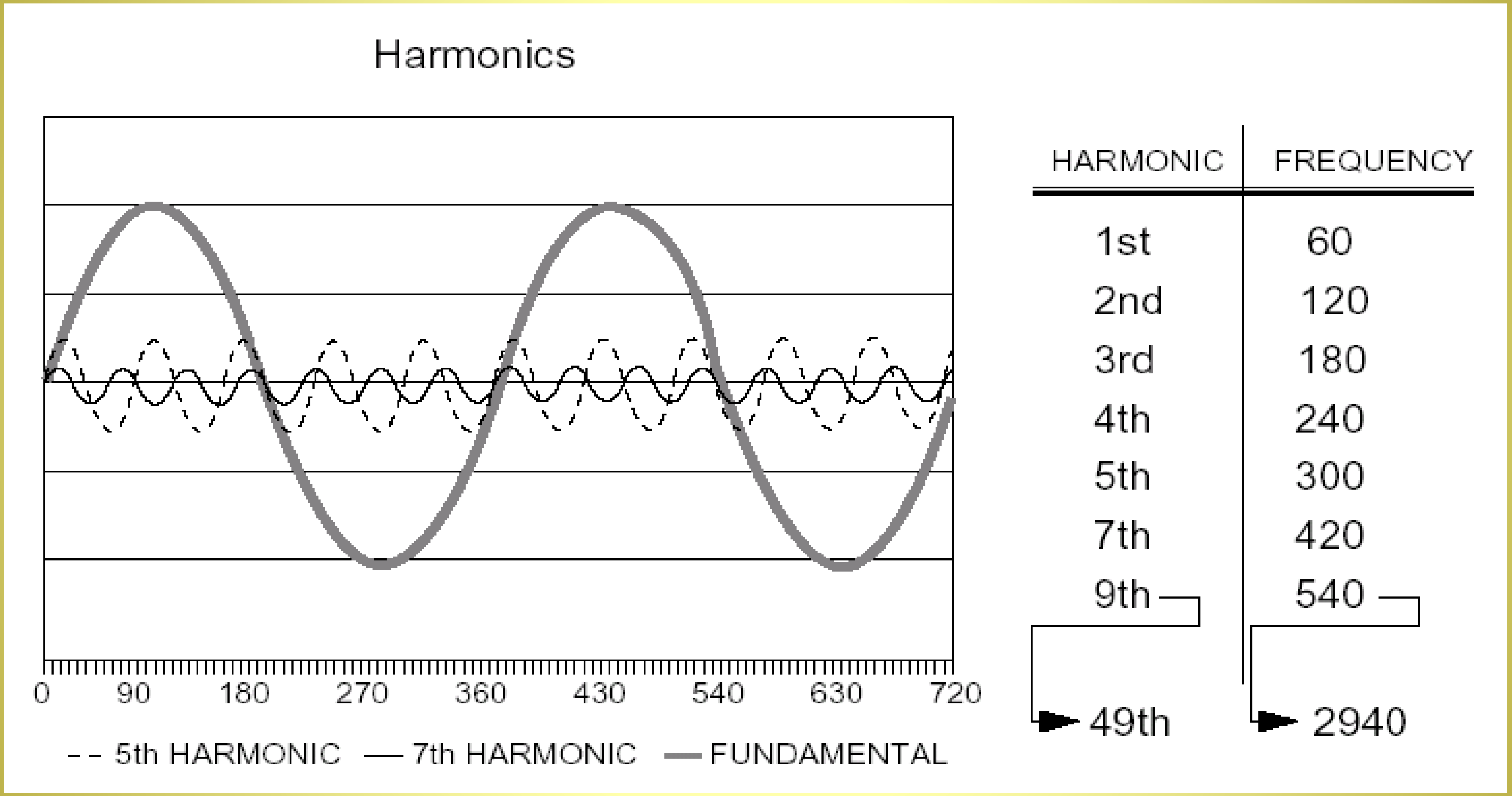

## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

# Transformada de Fourier



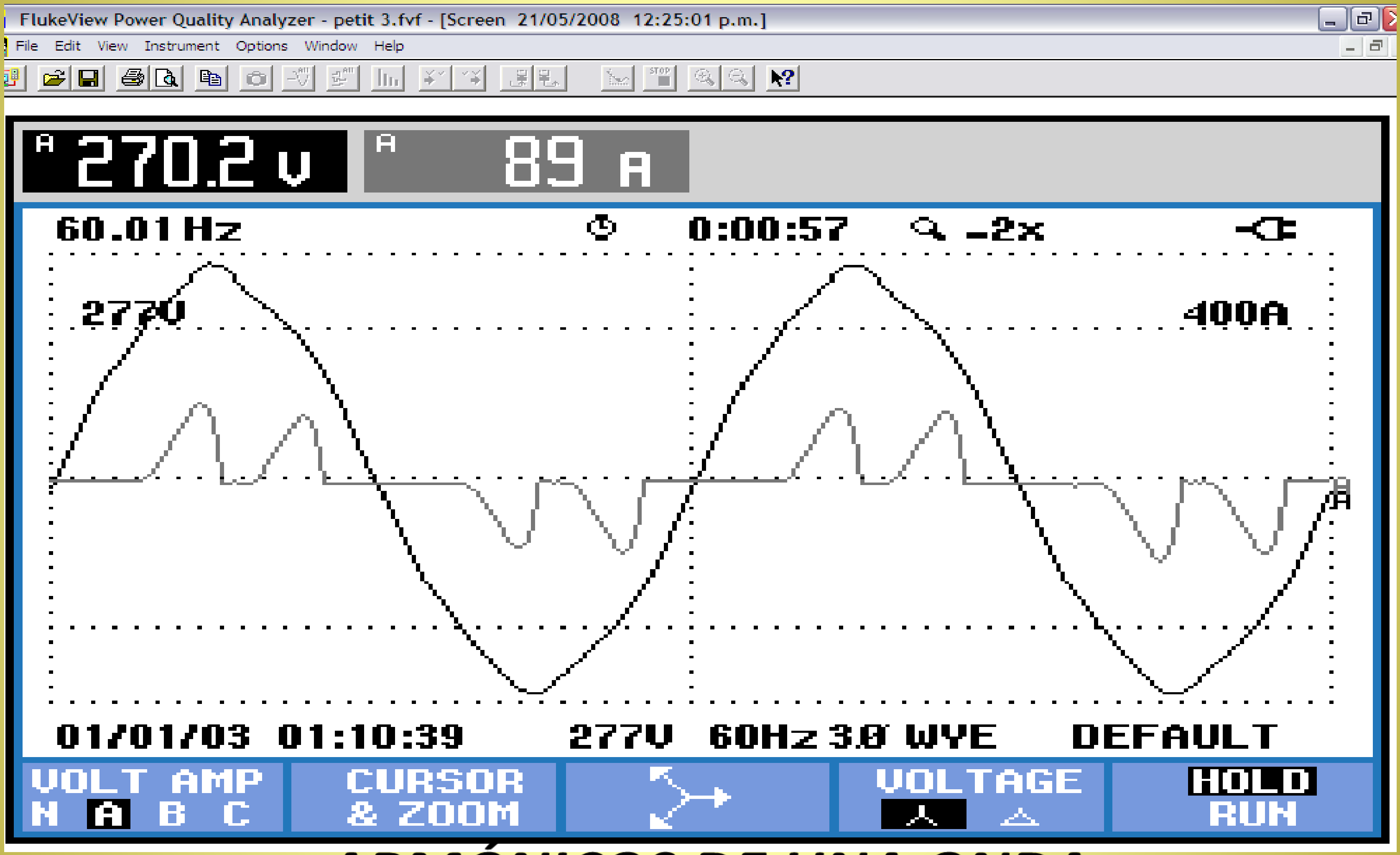

## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

# Transformada de Fourier




***ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL***

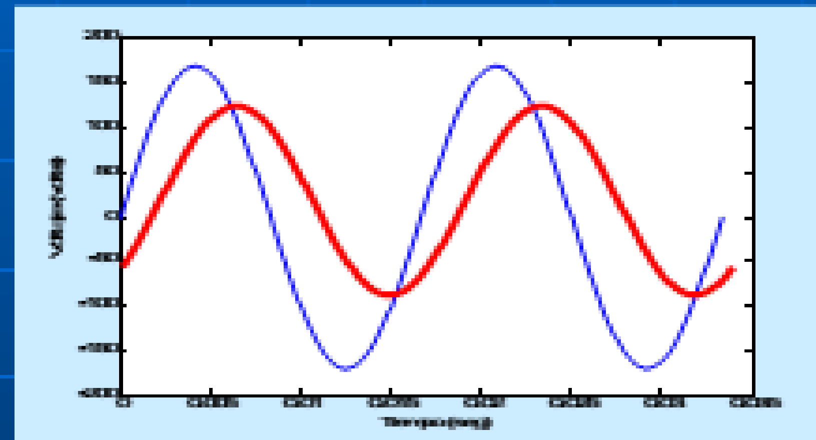
# Transformada de Fourier



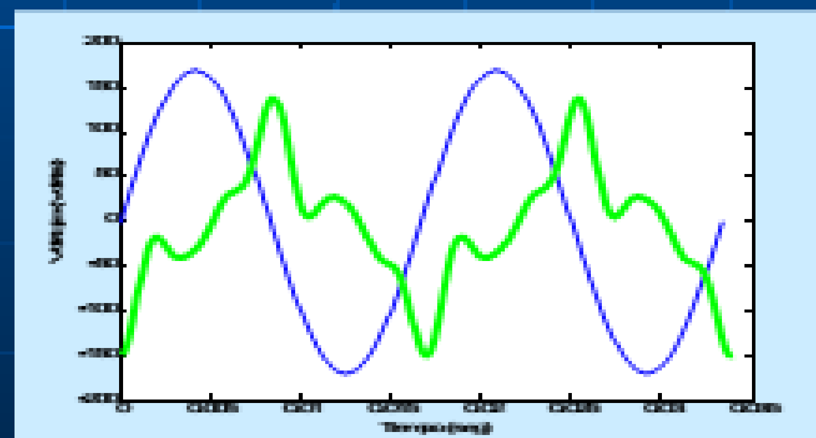

**_ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL_**

# Armónicas en sistemas eléctricos

- Operación de equipos eléctricos
  - Motores
  - Lámparas incandescentes
  - Capacitores
  - Entre otros

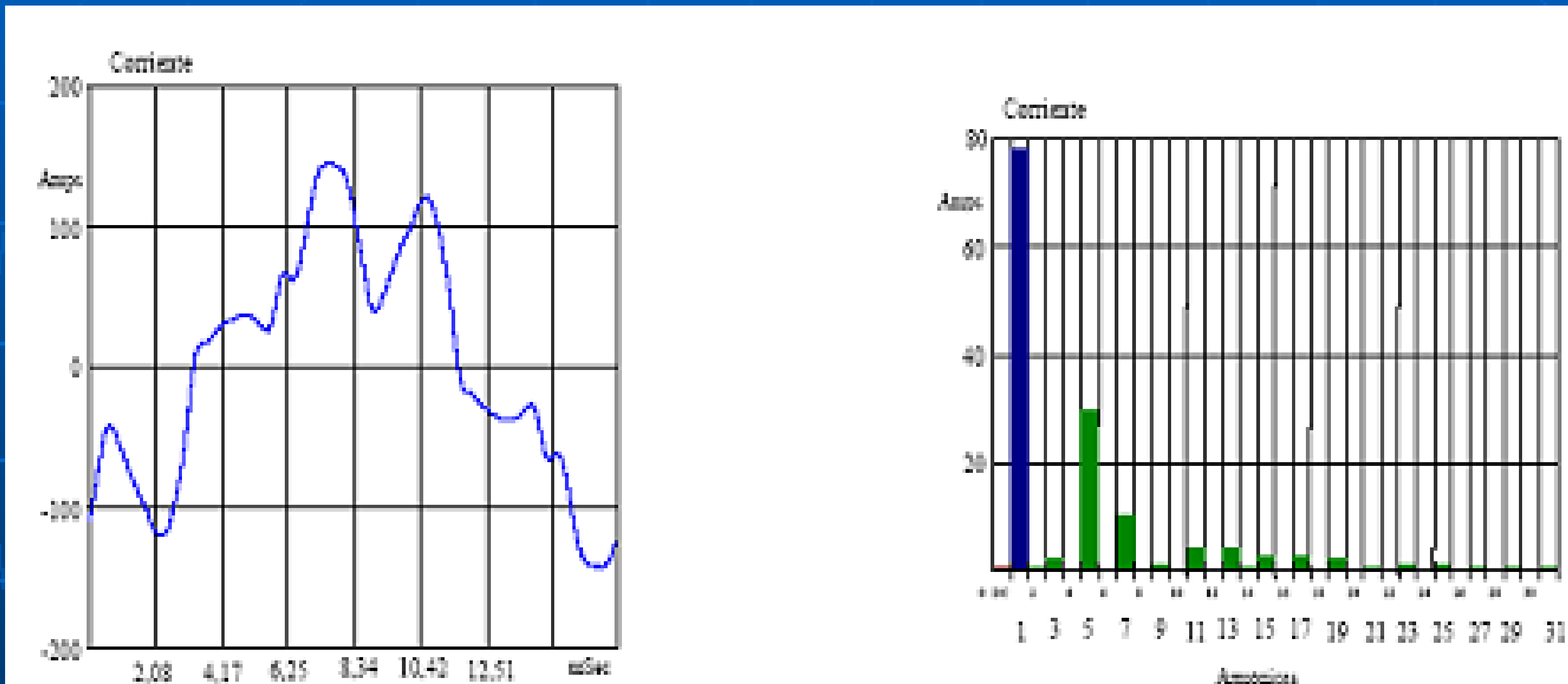


- Operación de equipos electrónicos
  - Rectificadores
  - Computadoras
  - Lámparas ahorradoras
  - Entre otros



## ***ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL***

- **Horno de inducción**



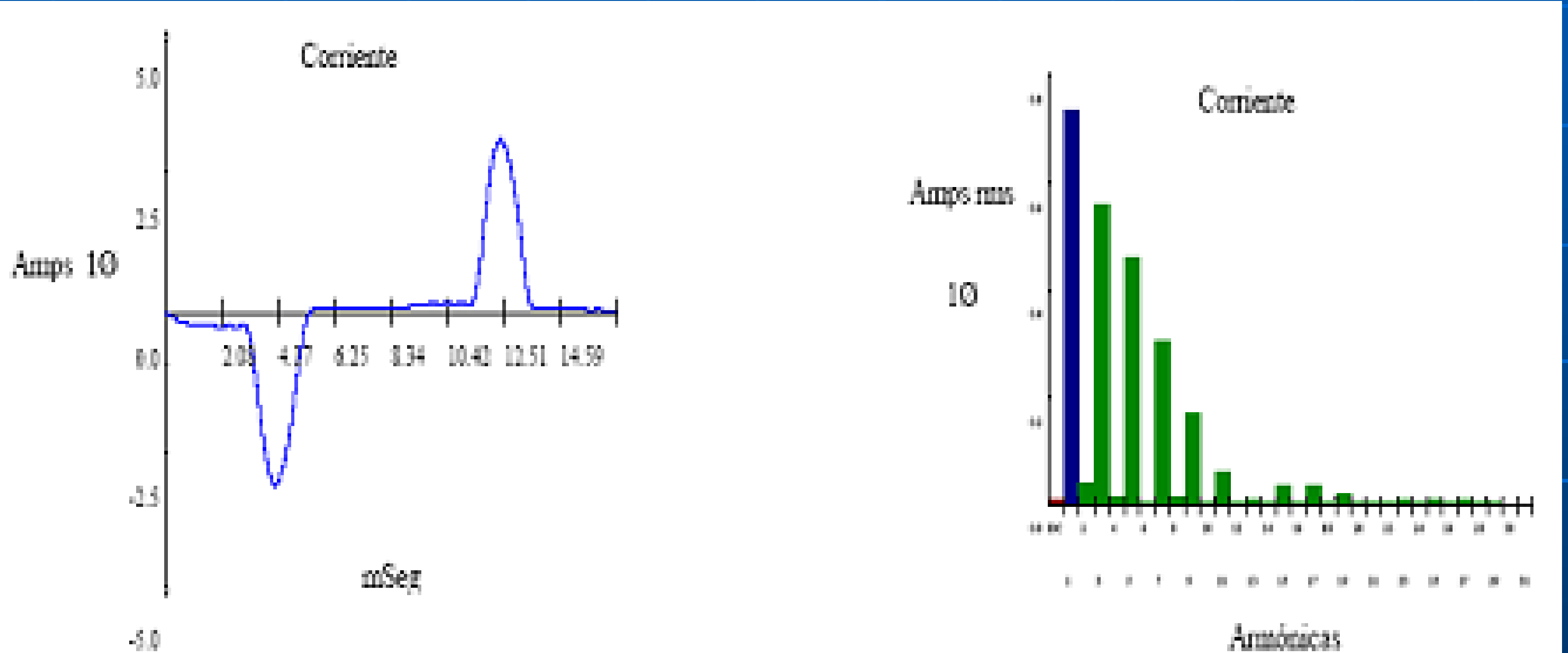

*a) Forma de onda*

*b) Contenido armónico*

# ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

# Transformada de Fourier

- **Equipo de computo**



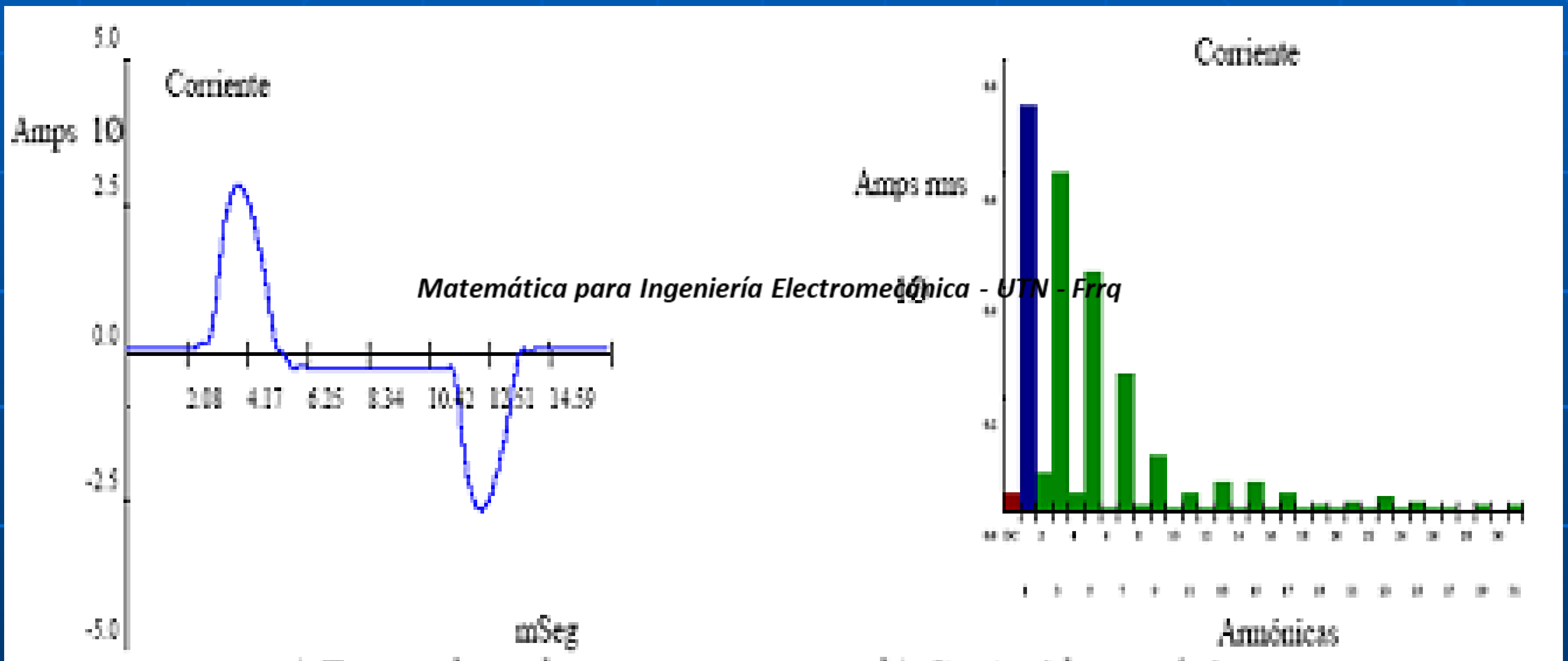

a)Forma de onda

b) Contenido armónico

## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

# Transformada de Fourier

- **Televisor**



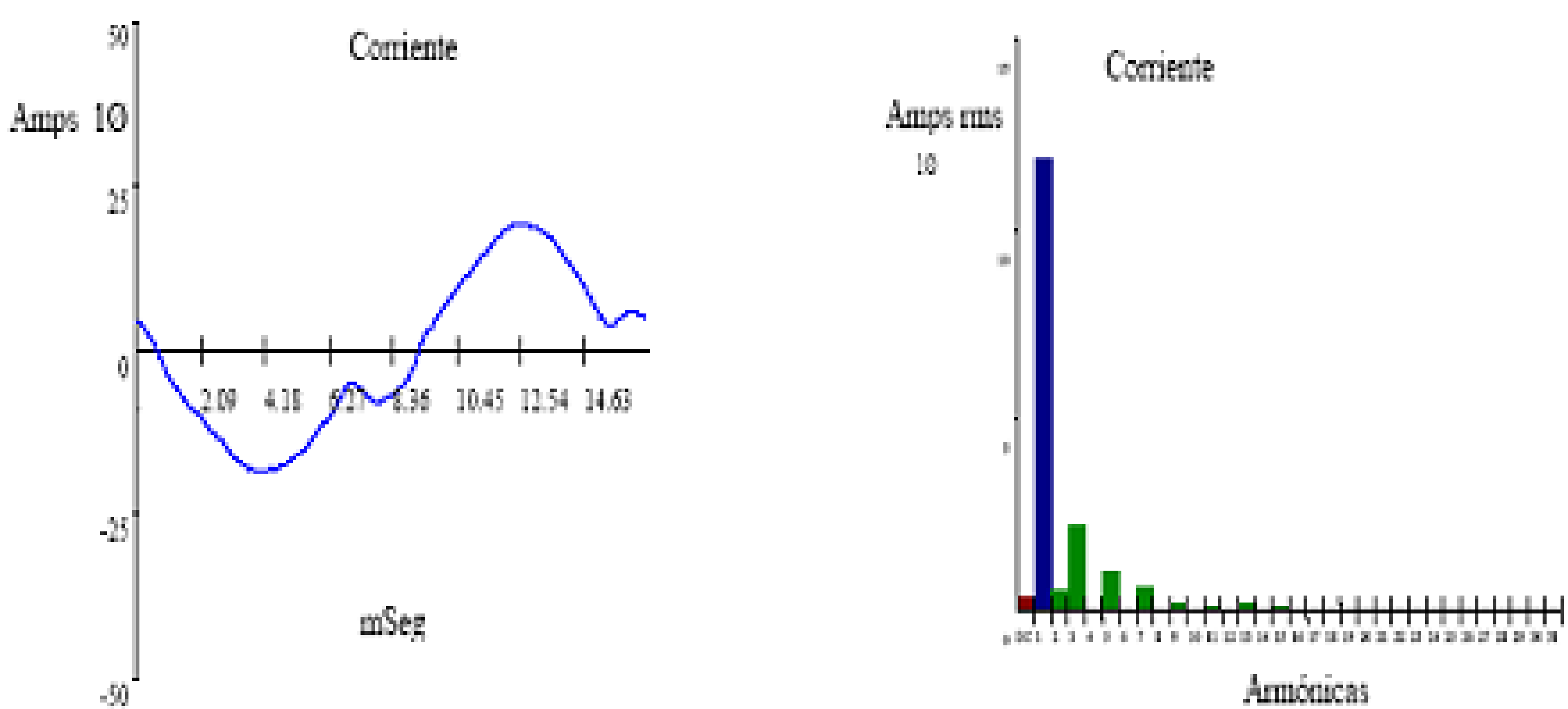

a) Forma de onda b) Contenido armónico



## *ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL*

# Transformada de Fourier

- **Horno de microondas**




a) Forma de onda

b) Contenido armónico

## ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL