Matemática para ingeniería electromecánica

Unidad N° 4: Transformada $\mathscr{L}$

Claudio Maggi/Alejandro Folla/Martín Alarcón

UTN - Facultad Regional Reconquista

3 de julio de 2024

Índice

Motivación

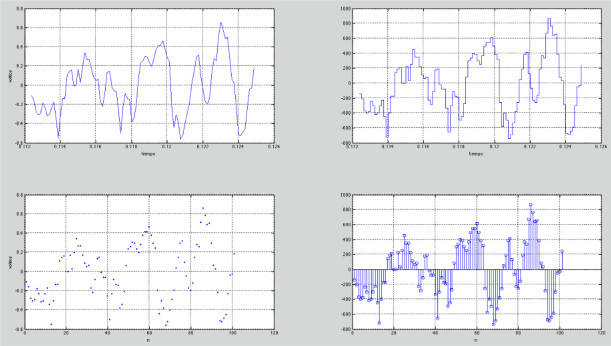
Sistemas de control discreto (digital)

Motivación: Sistemas de control discreto (digital)

Señales en tiempo continuo y discreto:

Analógicas, $x(t)$: Amplitud y Tiempo continuos.

Cuantizada, $x_Q(t)$: Tiempo Continuo, Amplitud discreta.



Muestreadas, $x_s[n]$: Tiempo Discreto, Amplitud continua.

Digital, $x_Q[n]$: Tiempo y Amplitud discretos.

Motivación: Sistemas de control discreto (digital)

1. Sistemas o modelos en tiempo continuo $\rightarrow x(t)$ (señales continuas)
   - Ecuaciones **diferenciales**:
   $$x'' - 2\,a\,x' + (a^2 + b^2)\,x = 0; \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$
2. Sistemas en tiempo discreto $\rightarrow x(k)$ (señales discretas) $(x(n), x[n], x_k)$
   - Ecuaciones **en diferencias**:
   $$3\,x(k+2) - 2\,x(k+1) + a^2\,x(k) = 0; \qquad x(0) = 4$$
   donde k indica el paso (lapso) de tiempo discreto.
   - **Caracterizar** a un sistema discreto (ej. análisis de estabilidad).

La transformada $\mathscr{Z}$

Definición (Bilateral)

La transformada $\mathscr{Z}$ de una señal (sucesión o serie) discreta $x(k)$ se define como:

$$X(z) = \mathscr{Z}\left[x(k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \tag{1}$$

donde z es una variable compleja de la forma $z = re^{j\theta}$, siendo r la magnitud y θ el ángulo.

La relación entre $x(k)$ y su transformada $\mathscr{Z}$ se indica como:

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Región de convergencia: ROC

Como la transformada $\mathscr{Z}$ es una serie geométrica, esta sólo existe para aquellos valores del plano complejo para los que dicha serie converge. Así la ROC de $X(z)$ es el conjunto de todos los valores de z para los cuales $X(z)$ es finita:

$$X(z) = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \right| < \infty$$

Aparte de que la ROC define la existencia o no de la transformada, se da el caso de que está transformada no es única para una determinada señal. Esta inconveniente se resuelve especificando la transformada y su ROC.

Región de convergencia: ROC (Ejemplos)

Se consideran las señales discretas: $x_1(k) = a^k\, u(k)$ y $x_2(k) = -a^k\, u(-k-1)$.

Si se determinan las transformadas $\mathscr{Z}\left[\cdots\right]$ de ambas:

$$X_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k\, u(k)\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k\, z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a\, z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

si y sólo si $|a\, z^{-1}| < 1$, por lo tanto la ROC se define por $|z| > |a|$.

Región de convergencia: ROC (Ejemplos)

Se consideran las señales discretas: $x_1(k) = a^k\, u(k)$ y $x_2(k) = -a^k\, u(-k-1)$.

Si se determinan las transformadas $\mathscr{Z}\left[\cdots\right]$ de ambas:

$$X_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -a^k\, u(-k-1)\, z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -a^k\, z^{-k}$$

Se realiza un cambio de variable $k = -n$:

$$X_2(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}\, z^n = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}\, z^n - 1\right) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1}\, z\right)^n - 1\right) = \frac{z}{z-a}$$

si y sólo si $|a^{-1}\, z| < 1$, por lo tanto la ROC se define por $|z| < |a|$.

Señales causales y no causales

1. Señal estrictamente no causal: toma valores 0 para tiempos positivos.

$$x(k) = 0, \ \forall \ k > 0$$

   En este caso la ROC va ser el interior de un círculo.

2. Señal estrictamente causal: toma valores 0 para tiempos negativos.

$$x(k) = 0, \ \forall \ k < 0$$

   En este caso la ROC va ser el exterior de una determinada circunferencia.

La transformada $\mathscr{Z}$ unilateral ($\mathscr{Z}^+$)

Definición (unilateral)

Si la señal es causal ($x(k) \in k \geq 0$) se tiene que:

$$X(z) = \mathscr{Z}^+ [x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k} \tag{2}$$

A modo de resumen, se presentan algunas características:

1. No se tiene información sobre $x(k)$ para $k < 0$.
2. Es única para este tipo de señales.
3. Se cumple que: $\mathscr{Z}^+ [x(k)] = \mathscr{Z} [x(k)\, u(k)]$.
4. La ROC es siempre la zona exterior de un circulo.

Relación con la transformada de Laplace

Se puede decir que $X(z)$ es la transformada de Laplace para la secuencia discreta $x(k)$. Para demostrarlo es posible aproximar $x(k)$ mediante $x_{\delta_T}(t)$, la versión muestreada de $x(t)$, obtenida mediante la modulación de la señal continua con un tren de pulsos tipo *Delta de Dirac* equi-espaciados:

$$x(k) \approx x_{\delta_T}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t - kT)$$

entonces la transformada de Laplace de $x_{\delta_T}(t)$ está dada por:

$$X_{\delta_T}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t - kT) \right] e^{-st}\,dt$$

Relación con la transformada de Laplace

Intercambiando el orden de la sumatoria y la integral:

$$X_{\delta_T}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st}\, dt \right]$$

integrando:

$$X_{\delta_T}(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\, e^{-skT}$$

Si se compara esta ecuación con la definición de transformada $\mathscr{Z}$, reemplazando previamente $x(kT)$ por $x(k)$, se encuentra que basta la siguiente relación para igualarlas:

$$z = e^{sT} \tag{3}$$

Propiedades de la transformada $\mathscr{Z}^+$

Multiplicación por una constante

Si $x(k) \xleftrightarrow{\mathscr{Z}^+} X(z) \Rightarrow a\,x(k) \xleftrightarrow{\mathscr{Z}^+} a\,X(z)$,

siendo a una constante.

Linealidad

Si $x_1(k) \xleftrightarrow{\mathscr{Z}^+} X_1(z)$ y $x_2(k) \xleftrightarrow{\mathscr{Z}^+} X_2(z) \Rightarrow$

$$x(k) = a\,x_1(k) \pm b\,x_2(k) \xleftrightarrow{\mathscr{Z}^+} X(z) = a\,X_1(z) \pm b\,X_2(z), \tag{4}$$

donde la ROC$=$ ROC$_1 \cap$ ROC$_2$, mientras que a y b son constantes.

Propiedades de la transformada $\mathscr{Z}^+$

Primera propiedad de traslación: Desplazamiento temporal (retardo)

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow x(k-n) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} z^{-n}\,X(z) \tag{5}$$

Segunda propiedad de traslación: Desplazamiento temporal (avance)

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow x(k+n) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} z^{n}\left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\,z^{-k}\right] \tag{6}$$

Ejemplos:

$$\mathscr{Z}^+\left[x(k+1)\right] = z\,X(z) - z\,x(0)$$

$$\mathscr{Z}^+\left[x(k+2)\right] = z^2\,X(z) - z^2\,x(0) - z\,x(1)$$

Propiedades de la transformada $\mathscr{Z}^+$

Multiplicación por a^k

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow a^k\, x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}\, z) \tag{7}$$

siendo a una constante.

Diferenciación en z

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow k\, x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} -z\frac{\partial}{\partial z}X(z) \tag{8}$$

Y de manera general:

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow k^n\, x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} -z^n\frac{\partial\, n}{\partial z^n}X(z) \tag{9}$$

Propiedades de la transformada $\mathscr{Z}^+$

Teorema del valor inicial

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow \lim_{z\to\infty} X(z) = x(o) \tag{10}$$

Teorema del valor final

$$x(k) \overset{\mathscr{Z}^+}{\longleftrightarrow} X(z) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left(1 - z^{-1}\right) X(z) \tag{11}$$

si $\left(1 - z^{-1}\right) X(z)$ no tiene polos sobre o fuera de $|z| = 1$.

Algunas transformadas directas (a, w y T son constantes)

$x(k)$ para $k \geq 0$	$\mathscr{Z}\left[x(k)\right]$	Región de convergencia (ROC)
$\delta_1(k)$(pulso unitario en $k=0$)	1	Todo el plano complejo z
$u(k)$	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
a^k	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
$k\,a^{k-1}$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert > a$
e^{-kT}	$\frac{z}{z-e^{-T}}$	$\lvert z\rvert > e^{-T}$
$\cos(k\,w\,T)$	$\frac{z(z-\cos(w\,T))}{z^2-2\,z\,\cos(w\,T)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(k\,w\,T)$	$\frac{z\,\sin(w\,T)}{z^2-2\,z\,\cos(w\,T)+1}$	$\lvert z\rvert > 1$

Ejercicios: parte (a)

Determine la transformada $\mathscr{Z}$ y su región de convergencia (ROC) de la siguientes señales causales:

1. $x(k) = 2^k$ (resolver por definición)
2. $x(k) = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$
3. $x(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$
4. $x(k) = 3\,k$
5. $x(k) = \sin(k\,w)$ (resolver por definición)
6. $x(k) = k\,\left(\frac{1}{2}\right)^k$

La transformada $\mathscr{Z}$ inversa

La transformada $\mathscr{Z}$ inversa está formalmente definida como:

$$x(k) = \mathscr{Z}^{-1}\left[X(z)\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\, z^{k-1}\, dz \tag{12}$$

donde es una integral de línea sobre el camino cerrado C, que encierra al origen y se encuentra en la región de convergencia de $X(z)$ en el plano z. Existen tres métodos para recuperar la secuencia original a partir de su transformada $\mathscr{Z}$:

1. Cálculo directo de la integral.
2. Expansión en series de términos z y z^{-1}.
3. ☞ Expansión en fracciones parciales y búsqueda en tabla. ☜

La transformada $\mathscr{Z}$ inversa. Ejercicios: parte (b)

Encontrar la señal discreta original $x(k)$ de las siguientes funciones indicadas en el dominio de la transformada $\mathscr{Z}$:

1. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\dfrac{z}{(z-1)(z-2)}\right]$
2. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\dfrac{2z+1}{(z+1)(z-3)}\right]$
3. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\dfrac{z}{z^2+4}\right]$
4. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\dfrac{z}{z^2-z+1}\right]$
5. $\mathscr{Z}^{-1}\left[\dfrac{z}{3z+1}\right]$

Ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes

Ecuación en diferencia

Una ecuación en diferencia pueden surgir como aproximaciones de la ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de un sistema en tiempo continuo, o también por pensar y proponer directamente la dinámica del sistema de forma discreta.

Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias ($k \geq 0$):

1. $x(k+2) + x(k+1) - 2\,x(k) = u(k)$, donde $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$.
2. $8\,x(k+2) - 6\,x(k+1) + x(k) = 9\,u(k)$, donde $x(0) = 1$ y $x(1) = \frac{3}{2}$.
3. $x(k+2) + 4\,x(k) = 0$, donde $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$.

Caracterización de sistemas discretos utilizando $\mathscr{Z}$

Definición (Sistemas LTI (Linear and Time-Invariant))

Cumplen la propiedad de linealidad e invarianza con respecto al tiempo.

Definición (Sistemas lineales)

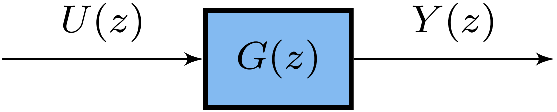
Es lineal si posee la propiedad de superposición. Es decir, si una entrada consiste en la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es la suma ponderada de las respuestas del sistema para cada una de estas señales.

Definición (Sistemas invariantes en el tiempo)

Es invariante en el tiempo, si un desplazamiento en la entrada produce el mismo desplazamiento en la salida. Esto es equivalente a decir que los coeficientes de la ecuación que define la dinámica del sistema son constantes.

Caracterización de sistemas discretos utilizando $\mathscr{Z}$

☞ **Representación del sistema:**



☞ **Función de transferencia:**

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m\, z^m + b_{m-1}\, z^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n\, z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \cdots + a_0} \tag{13}$$

En esta forma de deducir $G(z)$ se supone que el sistema está inicialmente en reposo, es decir condiciones iniciales iguales a cero.

Caracterización de sistemas discretos utilizando $\mathscr{Z}$

Para sistemas físicamente realizables el orden del denominador $U(z)$ es mayor o igual al del numerador $Y(z)$, es decir que $n \geq m$. La ecuación $U(z) = 0$ es llamada la **ecuación característica** del sistema discreto y su orden n determina el **orden del sistema**, mientras que sus raíces se llaman **polos** de la función de transferencia discreta. De igual manera, la raíces de $Y(z) = 0$ se denominan los **ceros**.

Ejemplo

Encontrar la función de transferencia del sistema discreto modelado por la siguiente ecuación en diferencias:

$$y(k+2) + 3\,y(k+1) - y(k) = u(k)$$

Respuesta al impulso

Impulso unitario: $\delta_1(k) = \{1, 0, 0, \cdots\}$, donde su transformada $\mathscr{Z}[\delta_1(k)] = 1$. Si se considera un sistema con función de transferencia $G(z)$, entonces:

$$Y(z) = G(z)\,U(z) \tag{14}$$

Si la entrada es este pulso unitario y el sistema está inicialmente en reposo, se tiene que: $U(z) = \mathscr{Z}[\delta_1(k)] = 1$ y se obtiene la **respuesta al impulso** del sistema:

$$Y(z) = G(z)\,U(z) = G(z) = Y_{\delta_1}(z) \tag{15}$$

Respuesta al impulso

Corolario

Así la transformada $\mathscr{Z}$ para una salida en respuesta a cualquier entrada, es el producto de la transformada de está entrada $U(z)$ con la transformada de su respuesta al impulso. Este hecho refleja la relación fundamental entre los conceptos de respuesta al impulso y función de transferencia.

$$Y(z) = Y_{\delta_1}(z)\,U(z) \tag{16}$$

Ejemplo

Encuentre la respuesta al impulso del sistema:

$$G(z) = \frac{z}{(z+2)(z+1)}$$

Concepto de estabilidad

En palabras ···

Un sistema es estable, cuando a entradas acotadas se generan salidas acotadas.

Ejemplo

Un sistema tiene una respuesta al impulso dada por:

$$y_{\delta_1}(k) = a^k - 0,5^k$$

Analizar que pasa con la respuesta cuando $k \to \infty$: (i) $a = 0,4$ y (ii) $a = 1,2$

Corolario

Un sistema lineal en tiempo discreto con coeficientes constantes es estable siempre que su respuesta al impulso tienda a cero cuando $k \to \infty$.

Concepto de estabilidad

Se puede relacionar el concepto de estabilidad con los polos de la función de transferencia.

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \tag{17}$$

donde estos polos son las raíces de la ecuación característica $U(z) = 0$

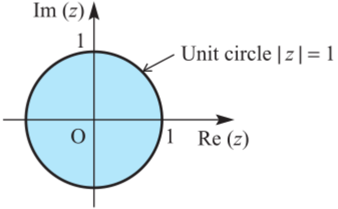
☞ Si se considera el sistema $G(z) = \frac{z}{(z+2)(z+1)}$, cuyos polos son $z = -2$ y $z = -1$ y donde su respuesta al impulso es $y_{\delta_1}(k) = (-1)^k - (-2)^k$. Es **inestable**.

☞ Ahora para $G(z) = \frac{z}{(z+0,2)(z+0,1)}$, cuyos polos son $z = -0,2$ y $z = -0,1$ y donde su respuesta al impulso es $y_{\delta_1}(k) = (-0,1)^k - (-0,2)^k$. Es **estable**.

Concepto de estabilidad

Definición

Un sistema lineal en tiempo discreto de coeficientes constantes con función de transferencia $G(z)$ es estable si y sólo si todos los polos de $G(z)$ están dentro del circulo unitario $|z| < 1$ en el plano complejo z. Si uno o más polos están fueras del circulo unitario entonces el sistema es inestable. Si uno o más polos distintos están sobre el circulo unitario $|z| = 1$, con todos los otros polos dentro, entonces el sistema se dice que es marginal-mente estable.



Referencias

Glyn James and David Burley.
Matemáticas avanzadas para ingeniería.
Pearson Educación, 2002.

Emilio Soria Olivas, Marcelino Martínez Sober, José Vicente Francés Villora, Gustavo Camps i Valls, and Departament d'Enginyeria Electrónica.
Problemas de tratamiento digital de señales.

Benjamin C Kuo.
Sistemas de control automático.
Pearson Educación, 1996.

Katsuhiko Ogata.
Sistemas de control en tiempo discreto.
Pearson educación, 1996.