

Serie de Fourier

Transformada de Fourier

Serie de Fourier

Sea $f(x)$ una función periódica de período $T = 2\pi$

La serie de Fourier correspondiente es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \operatorname{sen} nx \quad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx \cdot dx \quad n: 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \operatorname{sen} nx \cdot dx \quad n: 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Recordemos por otra parte las expresiones de las funciones complejas circulares, $\cos Z$ y $\operatorname{sen} Z$.

$$\cos Z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} Z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Si tomo $Z = nx$. $\in \mathbb{R}$.

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (4)$$

Reemplazamos (4) en (1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_{ni} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Sacamos factor común e^{inx} y e^{-inx} en la suma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n:1}^{\infty} \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} e^{-inx} \quad (5)$$

Si ahora llamamos:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \quad (6)$$

Nos queda:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n:1}^{\infty} c_n \cdot e^{inx} + c_{-n} \cdot e^{-inx} \quad (7)$$

Serie compleja de Fourier con sus coeficientes expresados en (6).

Forma compleja de la serie de Fourier

Vamos a expresar esos mismos coeficientes dados en (6) en forma compleja:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad ; \quad c_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \quad ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \quad (6)$$

Queda: $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{inx} + c_{-n} \cdot e^{-inx}$ (7)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Se puede expresar la serie de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (7)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9)$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Observaciones:

1. Los coeficientes a_n y b_n de la serie de Fourier son números reales, mientras que los coeficientes complejos c_n y c_{-n} son números complejos. Por lo que hemos visto en (6) los coeficientes c_n y c_{-n} son complejos conjugados.
2. Si $f(x)$ es función par sobre $[-\pi, \pi]$, entonces los b_n son ceros. Los coeficientes de la serie compleja en este caso son iguales y también reales.

$$c_n = c_{-n} = \frac{a_n}{2}$$

3. Si en particular $f(x)$ es una función impar $[-\pi, \pi]$ los $a_n = 0$ para todo $n=0, 1, 2, \dots$, en este caso:

$$c_n = -\frac{ib_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{ib_n}{2} \quad \text{son imaginarios puros.}$$

4. Por lo que hemos visto en la serie real de Fourier podemos asegurar que (9) nos conduce a lo mismo si se integra sobre $[a, a+2\pi]$.

Forma compleja de la serie de Fourier

Además fuera de esas dos pueden calcularse los coeficientes reales si se conocen los coeficientes complejos. Partiendo de (6)

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \rightarrow \quad a_0 = 2c_0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{sumando miembro a miembro} \quad c_n + c_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} \quad \rightarrow \quad a_n = c_n + c_{-n}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{sumando miembro a miembro} \quad \rightarrow \quad c_n + c_{-n} = -\frac{ib_n}{2} - \frac{ib_n}{2} \quad \rightarrow \quad b_n = \frac{c_{-n} - c_n}{i}$$

$$b_n = (c_n - c_{-n})$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Serie compleja de Fourier de $f(x)$ de periodo arbitrario $T = 2l$.

$$(1) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}$$

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot dx; \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$(3) \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cdot dx; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Si seguimos con un procedimiento análogo al caso (1) o bien transformando la función $f(x)$ en una función de período 2π llegaremos a que también puede expresarse por una serie compleja de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{i\pi n x}{l}}$$

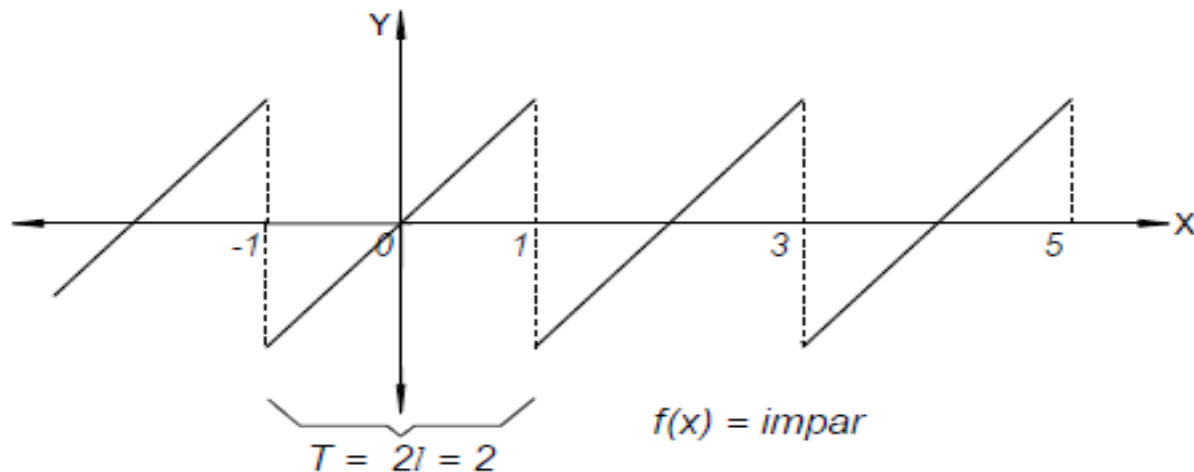
Además obtendremos que los coeficientes complejos tienen la siguiente:

$$c_n = \frac{1}{2l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Forma compleja de la serie de Fourier

Ejemplo: Obtener la serie compleja de Fourier de la función:

$$f(x) = x \quad -1 < x < 1 \quad \text{y} \quad f(x) = f(x+2)$$



$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{\frac{in\pi x}{l}}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 f(x) \cdot e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2 \cdot 1} \int_{-1}^1 x \cdot e^{\frac{-in\pi x}{1}} dx = \frac{2}{2 \cdot 1} \int_0^1 x \cdot e^{\frac{-in\pi x}{1}} dx = \left| \frac{e^{\frac{-in\pi x}{1}} \cdot (in\pi x - 1)}{(in\pi)^2} \right|_0^1 =$$

Forma compleja de la serie de Fourier

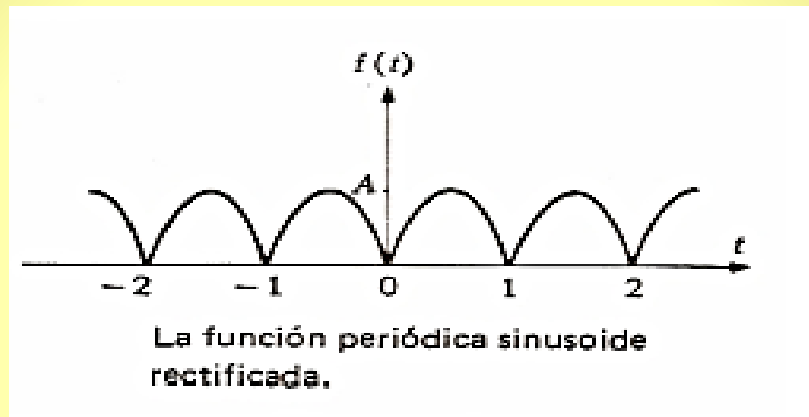
$$= \frac{e^{-in\pi}}{-n^2\pi^2} \cdot (-in\pi - 1) + \frac{e^{-in\pi} \cdot 0}{-n^2\pi^2} (-1) = e^{-in\pi} \cdot \frac{in\pi}{n^2\pi^2} + \frac{e^{-in\pi}}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} =$$

$$= i \frac{\cos n\pi}{n\pi} + \left(\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} \right) = \frac{(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} + i \frac{\cos n\pi}{n\pi} \quad n: \pm 1, \pm 2, \dots \quad n \neq 0$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n+\infty} \left[\frac{(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} + i \frac{\cos n\pi}{n\pi} \right] \cdot e^{in\pi x}$$

Serie compleja de Fourier

Se desea hallar la serie compleja de Fourier de la función periódica :



Serie compleja de Fourier

$$f(t) = A \cdot \text{sen}(\pi t), \quad 0 < t < 1, \quad T = 1$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i2n\pi t}$$

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_0^1 f(t) \cdot e^{-i2n\pi t} dt = \frac{1}{1} \int_0^1 A \cdot \text{sen}(\pi t) \cdot e^{-i2n\pi t} dt = A \int_0^1 \left(\frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i} \right) \cdot e^{-i2n\pi t} dt$$

Serie compleja de Fourier

De la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$

se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$c_n = \frac{A}{2i} \int_0^1 (e^{-i\pi(2n-1)t} - e^{-i\pi(2n+1)t}) \cdot dt = \frac{A}{2i} \cdot \left(\frac{e^{-i\pi(2n-1)t}}{-i\pi(2n-1)} - \frac{e^{-i\pi(2n+1)t}}{-i\pi(2n+1)} \right) \Big|_0^1 =$$

$$e^{\pm i2n\pi} = e^0 \cdot (\cos(2n\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(2n\pi)) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1$$

$$e^{-i\pi} = e^0 \cdot (\cos(-\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(-\pi)) = e^0 \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \operatorname{sen}(\pi)) = e^{\pi i}$$

$$c_n = \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)}, \quad c_0 = \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4 \cdot 0^2 - 1)} = \frac{2 \cdot A}{\pi}$$

Serie compleja de Fourier

$$c_n = \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)}, \quad c_0 = \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4 \cdot 0^2 - 1)} = \frac{2 \cdot A}{\pi}$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i2n\pi t} = f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} \cdot e^{i2n\pi t} = \frac{-2 \cdot A}{\pi} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cdot e^{i2n\pi t}$$

Expresar esta serie de forma trigonométrica:

$$\sum_{n=-10}^{10} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{i2\pi n t}$$
$$-1 + \frac{1}{3} e^{-2i\pi t} + \frac{1}{3} e^{2i\pi t} + \frac{1}{15} e^{-4i\pi t} + \frac{1}{15} e^{4i\pi t} + \frac{1}{35} e^{-6i\pi t} + \frac{1}{35} e^{6i\pi t} +$$
$$\frac{1}{63} e^{-8i\pi t} + \frac{1}{63} e^{8i\pi t} + \frac{1}{99} e^{-10i\pi t} + \frac{1}{99} e^{10i\pi t} + \frac{1}{143} e^{-12i\pi t} + \frac{1}{143} e^{12i\pi t} + \frac{1}{195} e^{-14i\pi t} +$$
$$\frac{1}{195} e^{14i\pi t} + \frac{1}{255} e^{-16i\pi t} + \frac{1}{255} e^{16i\pi t} + \frac{1}{323} e^{-18i\pi t} + \frac{1}{323} e^{18i\pi t} + \frac{1}{399} e^{-20i\pi t} + \frac{1}{399} e^{20i\pi t}$$

Serie compleja de Fourier

$$\text{recordando: } a_n = 2 \cdot \text{Re}[c_n] = 2 \cdot \frac{-2 \cdot A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)} = \frac{-4 \cdot A}{\pi \cdot (4n^2 - 1)}$$

$$b_n = -2 \cdot \text{Im}[c_n] = 0$$

$$\text{por lo } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\pi t/l) + b_n \cdot \text{sen}(n\pi t/l))$$

$$f(t) = \frac{2 \cdot A}{\pi} - \frac{4 \cdot A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cdot \cos(n\pi t / \frac{1}{2})$$

$$\text{por lo } f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\pi t/l) + b_n \cdot \text{sen}(n\pi t/l))$$

$$f(t) = \frac{2 \cdot A}{\pi} - \frac{4 \cdot A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} \cdot \cos(n\pi t / \frac{1}{2})$$

$$f(t) = \frac{2 \cdot A}{\pi} - \frac{4 \cdot A}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cdot \cos(2\pi t) + \frac{1}{15} \cdot \cos(4\pi t) + \frac{1}{3} \cdot \cos(6\pi t) + \dots \right)$$

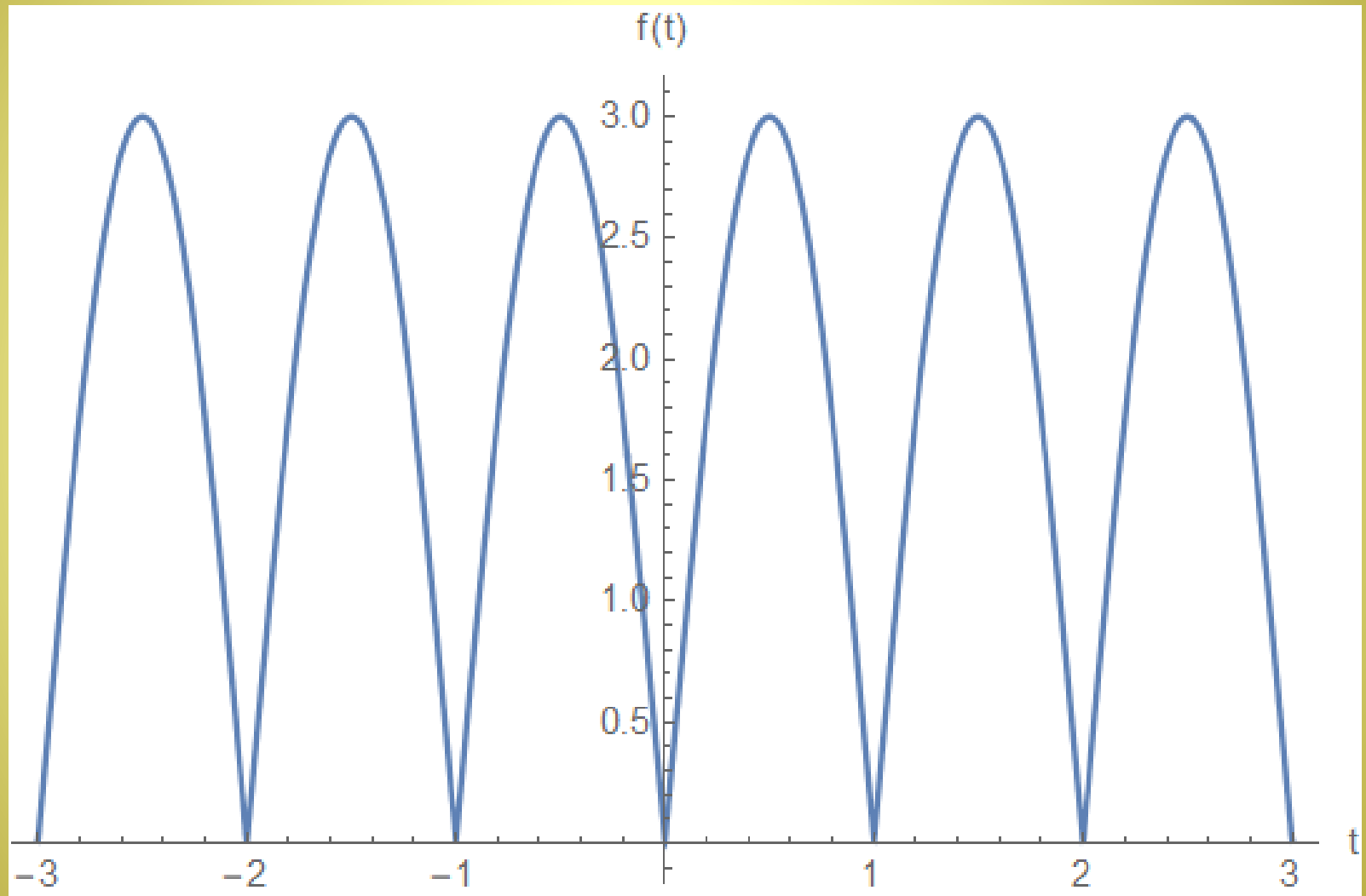
Serie compleja de Fourier

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{i2\pi t} + \frac{1}{15} e^{i4\pi t} + \frac{1}{35} e^{i6\pi t} + \dots \right) - \frac{2A}{\pi} \left(\frac{1}{3} e^{-i2\pi t} + \frac{1}{15} e^{-i4\pi t} + \frac{1}{35} e^{-i6\pi t} + \dots \right) =$$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \left(\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}) \right) + \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2} (e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}) + \frac{1}{35} \cdot \frac{1}{2} (e^{i6\pi t} + e^{-i6\pi t}) + \dots \right)$$

$$f(t) = \frac{2 \cdot A}{\pi} - \frac{4 \cdot A}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \cos(2\pi t) + \frac{1}{15} \cdot \cos(4\pi t) + \frac{1}{35} \cdot \cos(6\pi t) + \dots \right)$$

Serie compleja de Fourier



Transformada de Fourier

Transformación integral

Una definición. Una transformación integral se define como la operación matemática que asocia a cada función $f(t)$ en el espacio directo (o real), otra función $F(\tau)$ en el espacio recíproco mediante la siguiente identidad

$$F(\tau) \equiv \int_a^b K(\tau, t) f(t) dt$$

donde $K(\tau, t)$ recibe el nombre de *kernel* de la transformación, y los límites a y b están dados por la transformada correspondiente.

Ejemplos de transformadas integrales son: la de Fourier, la de Laplace, la Z, la de Hilbert, etc., cada una con su correspondiente *kernel* y límites a y b .

La importancia de las transformadas integrales reside en que un problema que es difícil de resolver en sus "coordenadas" originales (espacio real o directo), a menudo es más sencillo de resolver al transformarlo al espacio recíproco, después de ello, la transformada inversa nos devuelve la solución en el espacio original.

Transformada de Fourier

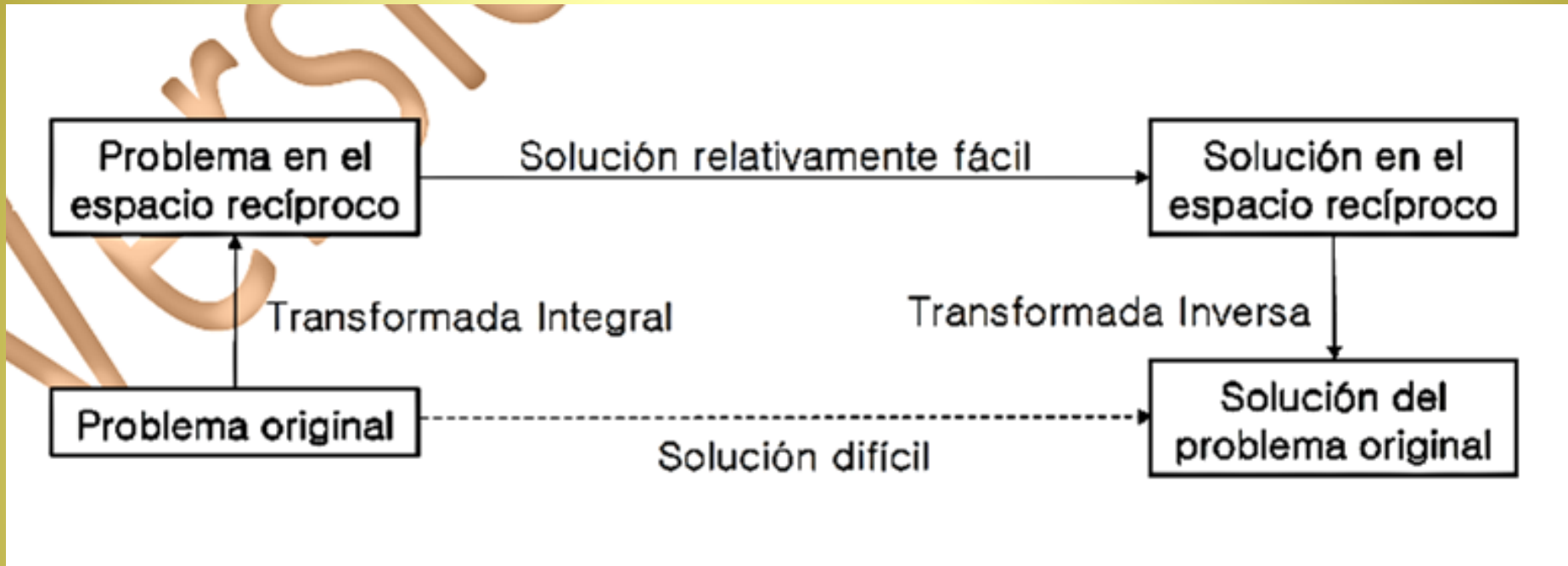
Transformada de Fourier de la función $f(t)$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt$$

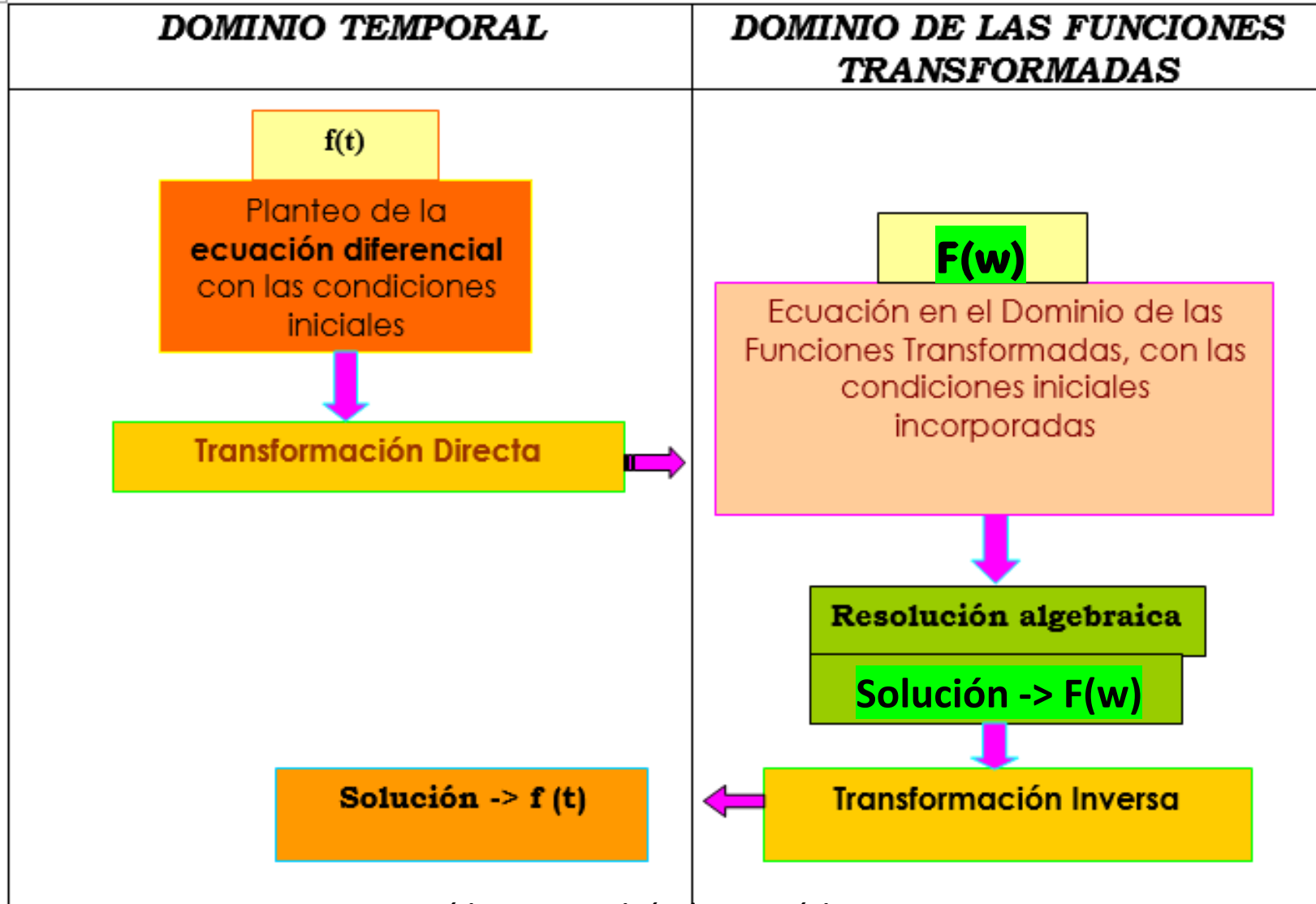
Transformada inversa de Fourier de la función $F(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega$$

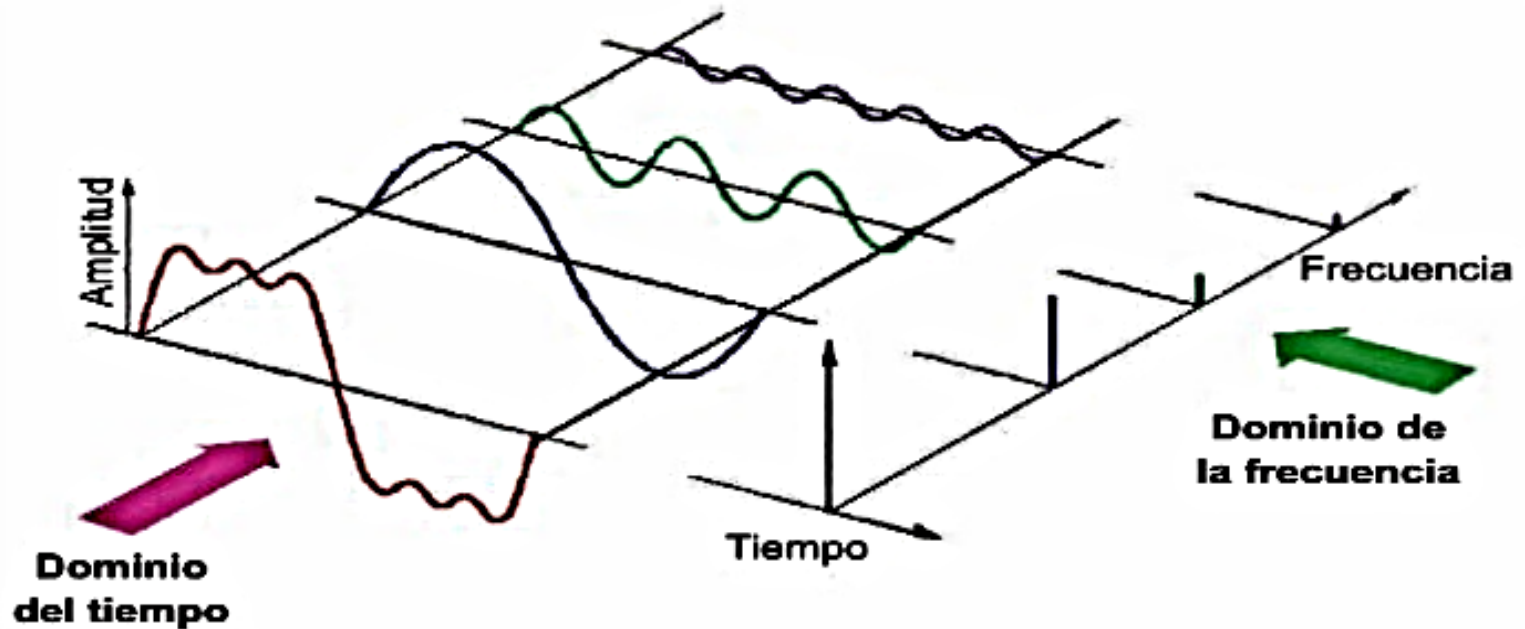
Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

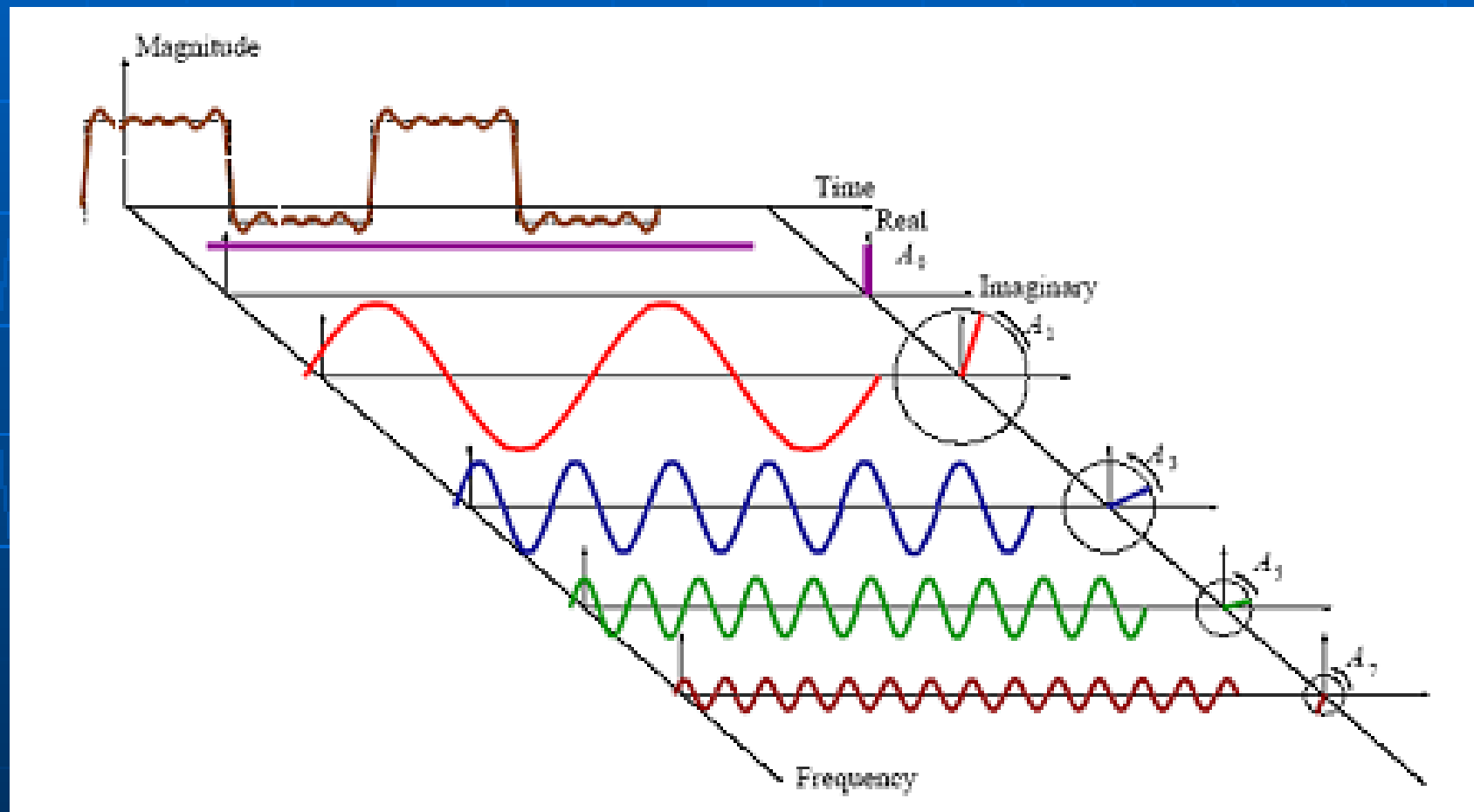


Transformada de Fourier



. Señal periódica compuesta y sus armónicos sinusoidales representados en el dominio del tiempo y en frecuencia.

■ Representación de las series de Fourier



Transformada de Fourier

	$f(t)$	$F(w)$
1	$h(t)$	$\frac{1}{iw}$
2	$h(t)e^{-at}; a > 0$	$\frac{1}{a+iw}$
3	$e^{-a t }; a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + w^2}$
4	$e^{-at^2}; a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-w^2/4a}$
5	$h(t+a) - h(t-a)$	$F(w) = \frac{2}{w} \text{sen}(aw)$
6	$\delta(t)$	1

Transformada de Fourier

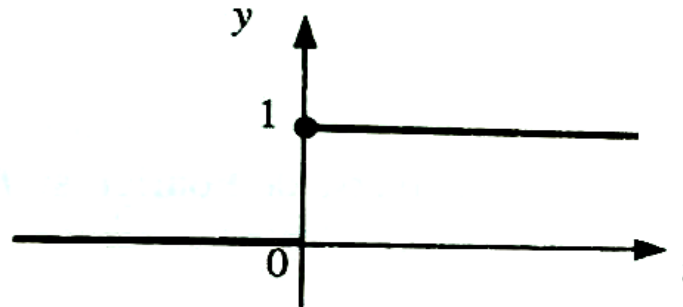
$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = f(t)$	$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$
9.1 $a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$ Prop. de linealidad
9.2 $f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$ cambio de escala
9.3 $f(-t)$	$F(-\omega)$
9.4 $f(t-t_0)$	$F(\omega) e^{-i\omega t_0}$ Prop. de desplazamiento en el tiempo.
9.5 $f(t) \cdot e^{i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$ Prop. de desplazamiento en la frecuencia
9.6 $f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$
9.7 $f(t) \sen(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2i} F(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2i} F(\omega + \omega_0)$
9.8 $F(t)$	$2\pi i f(-\omega)$ Prop. de simetría
9.9 $-it f(t)$	$F'(\omega)$
9.10 $(-it)^n f(t)$	$F^{(n)}(\omega)$
9.11 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$ Teorema de convolución en el tiempo
9.12 $f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(y) F_2(\omega-y) dy$ Teorema de convolución en la frecuencia

Transformada de Fourier

Propiedad 1

Obtener la transformada de Fourier de $h(t)$, donde $h(t)$ es la función de Heaviside.

Siendo $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, la gráfica es



Entonces

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^{+\infty} 1 e^{-i\omega t} dt$$

$$F(\omega) = \left. \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right|_0^{+\infty}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{i\omega}$$

Transformada de Fourier

Propiedad 2

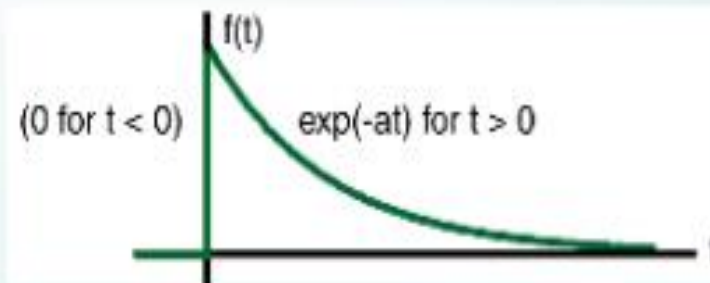
Encontrar la transformada de Fourier de la función:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-a \cdot t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

$$a > 0$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt =$$

$$\mathcal{F}[u(t) \cdot e^{-at}]$$



$$\int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = -\frac{e^{-(a+i\omega)t}}{a+i\omega} \Big|_0^{\infty} =$$

$$-\frac{1}{a+i\omega} (0 - 1) = \frac{1}{a+i\omega} =$$

Transformada de Fourier

Propiedad 3

Obtener la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$ y $a > 0$.

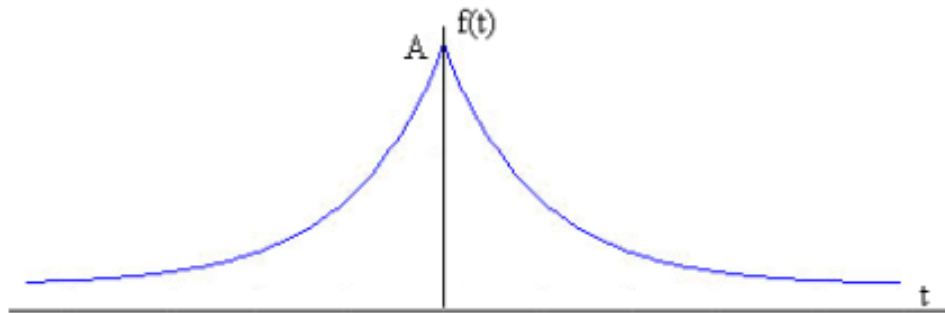
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-a(-t)} \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-a(t)} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{t(a-i\omega)} dt + \int_0^{\infty} e^{-t(a-i\omega)} dt = \frac{e^{t(a-i\omega)}}{a-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-t(a-i\omega)}}{-(a-i\omega)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{(a+i\omega) + (a-i\omega)}{(a+i\omega)(a-i\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Función exponencial

Transformada de Fourier de la función $f(t) = A \exp(-\gamma|t|)$



Primero, calculamos la transformada de Fourier de la función $f(t) = A \exp(-\gamma t) \cdot u(t)$. La integración de $f(t)$ se extiende entre 0 e ∞

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} A e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} A \exp(-(\gamma + i\omega)t) dt = -\frac{A}{\gamma + i\omega} \exp(-(\gamma + i\omega)t) \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\gamma + i\omega} \quad \gamma > 0$$

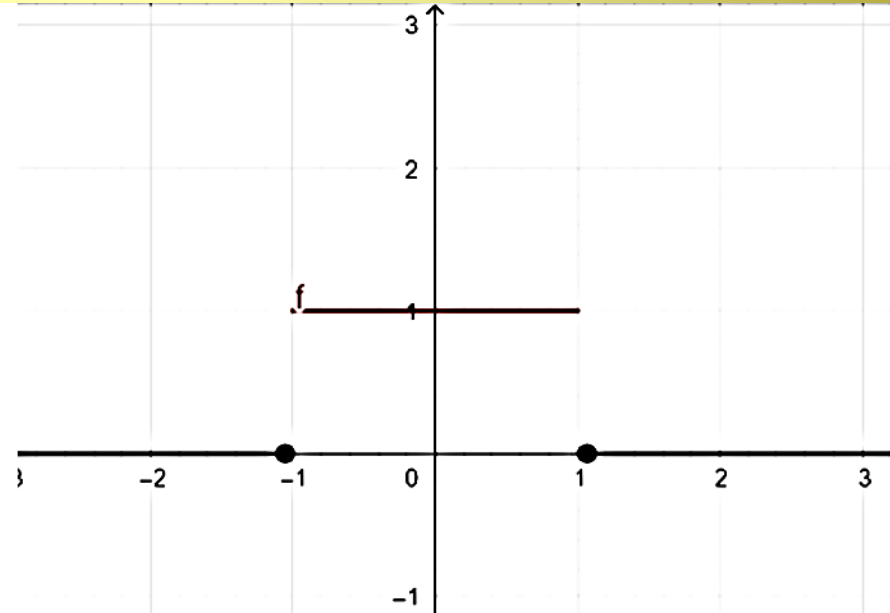
A continuación, tenemos en cuenta la propiedad de la transformada de Fourier de la función $f(-t)$ es $F(-\omega)$, la transformada de las dos exponenciales es la suma

$$F(\omega) = \frac{A}{\gamma + i\omega} + \frac{A}{\gamma - i\omega} = A \frac{2\gamma}{\gamma^2 + \omega^2}$$

Transformada de Fourier

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

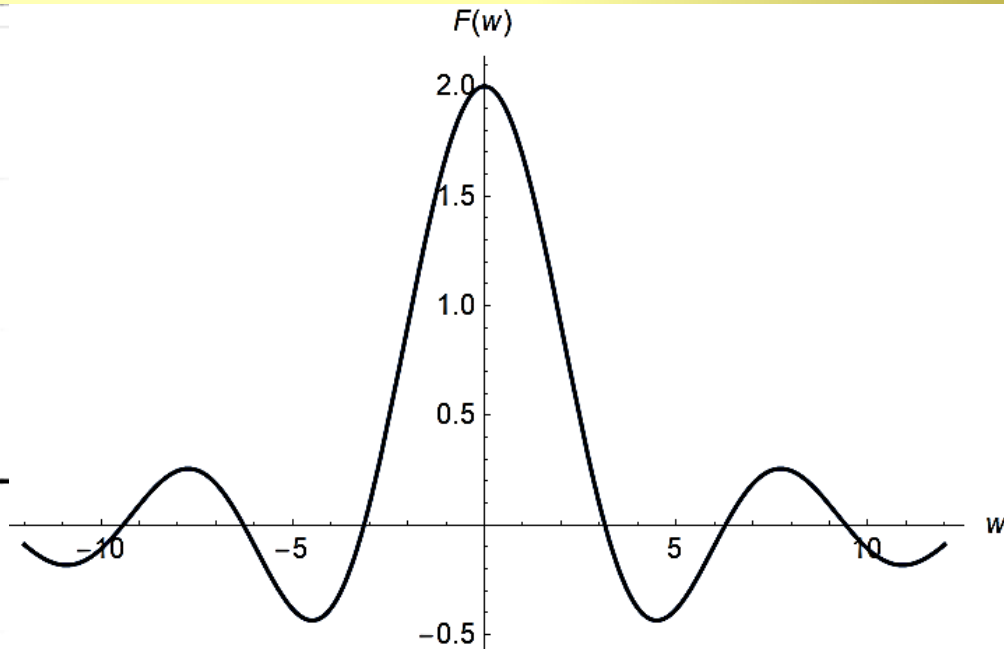
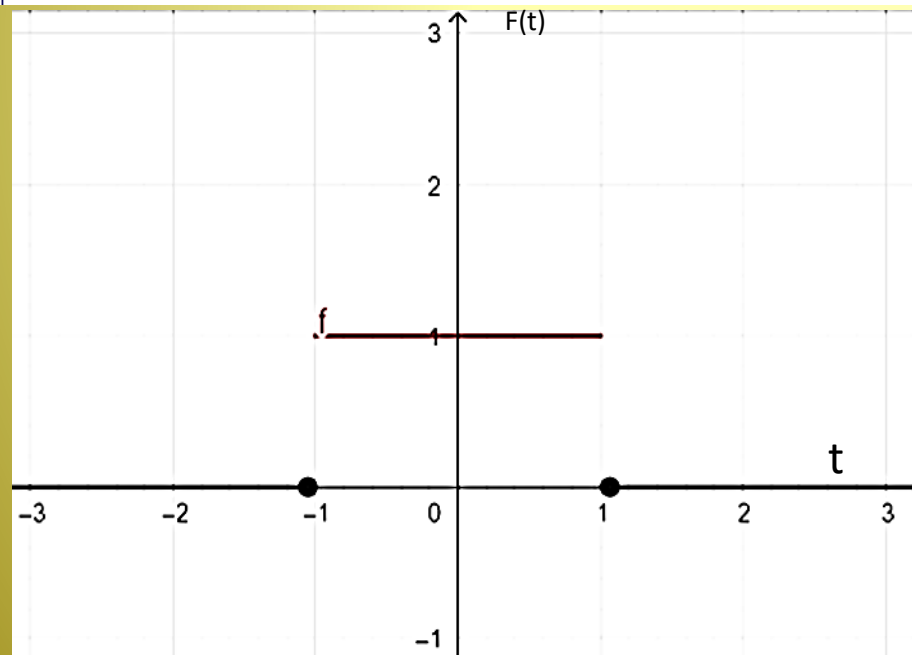
Función par



Ejemplo

Transformada de Fourier

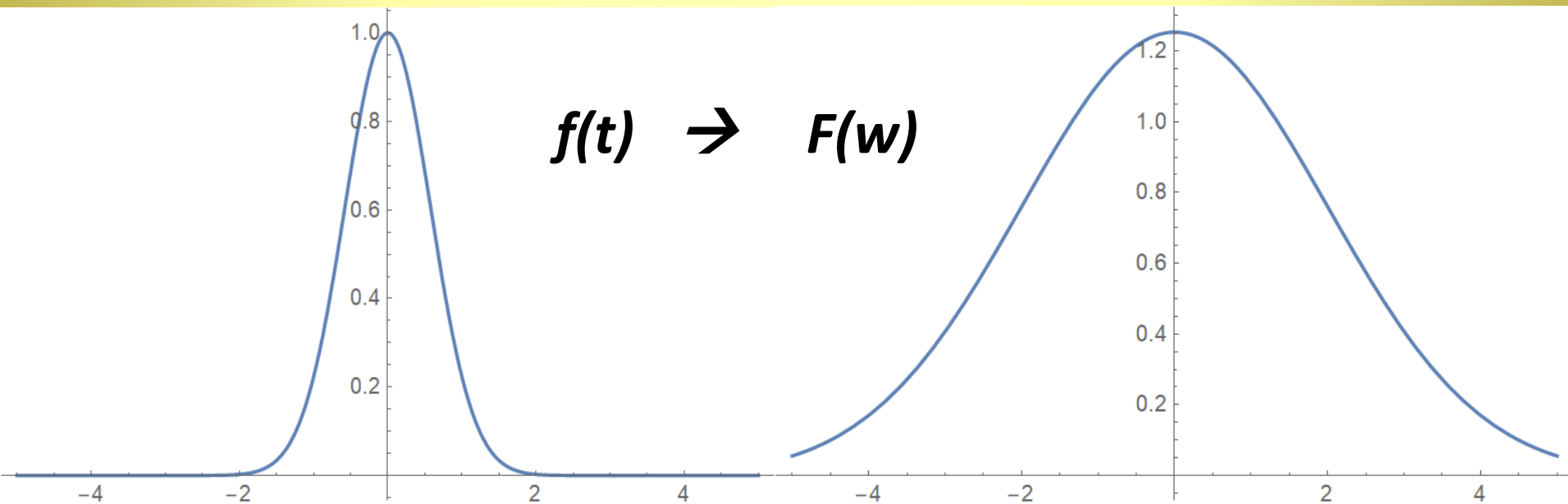
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\omega t i} \cdot dt = \int_{-1}^1 e^{-\omega t i} \cdot dt = \left[\frac{e^{-\omega t i}}{-\omega \cdot i} \right]_{-1}^1 = \frac{-1}{\omega \cdot i} \cdot (e^{-\omega i} - e^{\omega i})$$
$$= 2 \cdot \frac{\text{sen}(\omega)}{\omega} = F(\omega)$$



Transformada de Fourier

Propiedad 4

$$\mathfrak{F}[e^{-at^2}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-i\omega t} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

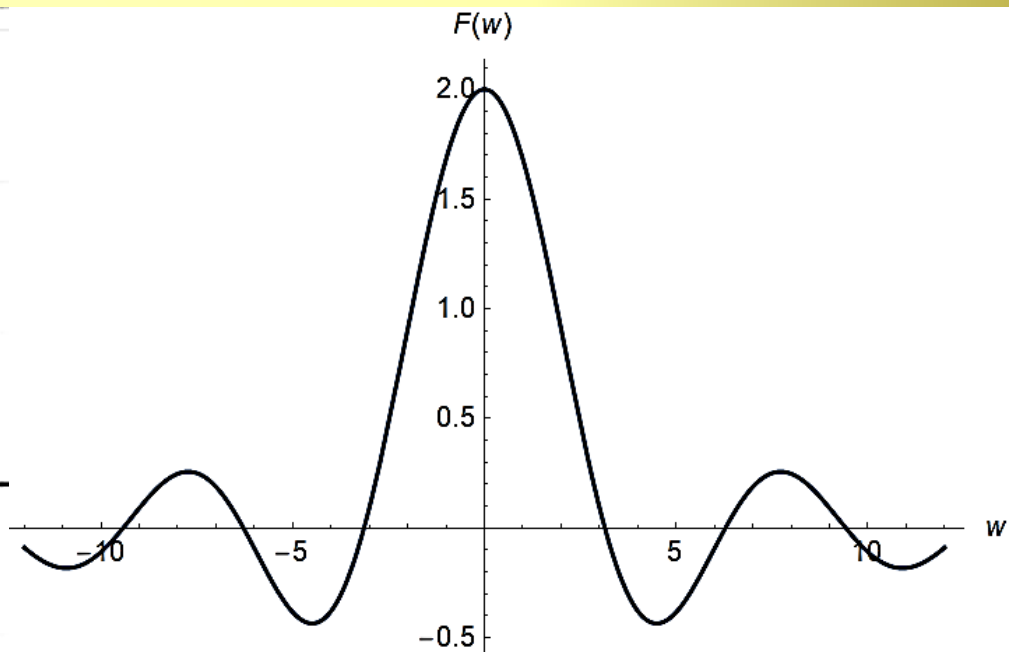
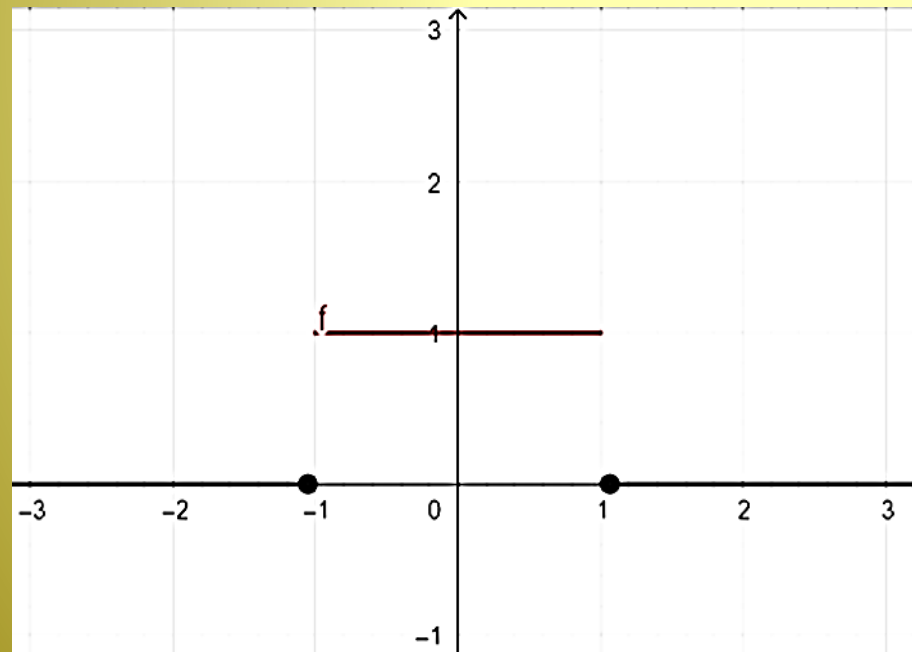


Transformada de Fourier

Propiedad 5

$$\mathcal{F}[u(t+a) - u(t-a)] = \frac{2}{w} \text{sen}(a \cdot w)$$

$$\mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] = \frac{2}{w} \text{sen}(1 \cdot w), \text{ con } a = 1$$



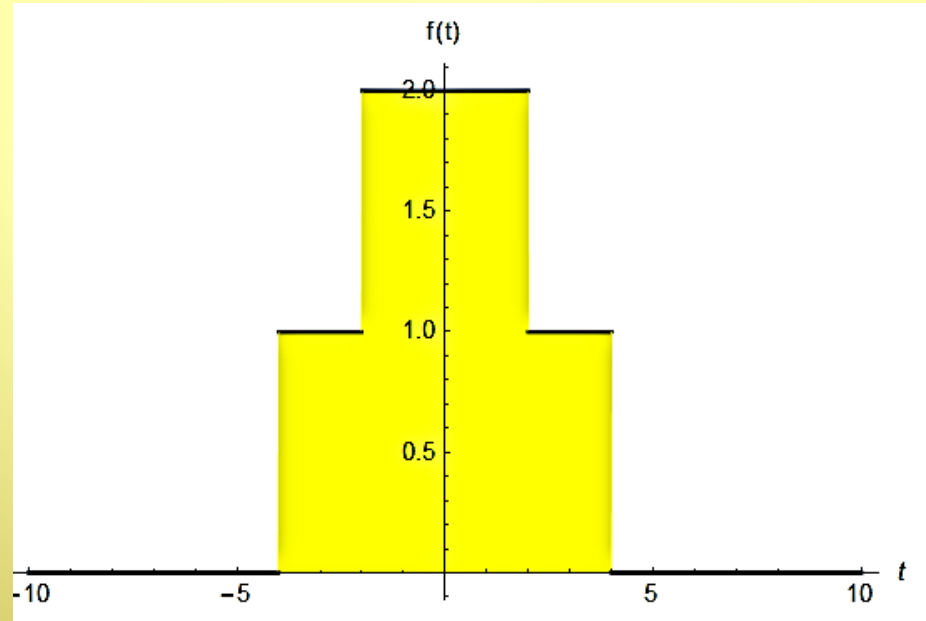
Transformada de Fourier

Propiedad 5

$$\mathfrak{F}[u(t+a) - u(t-a)] = \frac{2}{w} \text{sen}(a \cdot w) :$$

$$\mathfrak{F}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(w) + F_2(w) :$$

$$\mathfrak{F}[u(t+4) - u(t-4) + u(t+2) - u(t-2)] = \frac{2}{w} \text{sen}(4 \cdot w) + \frac{2}{w} \text{sen}(2 \cdot w) ,$$



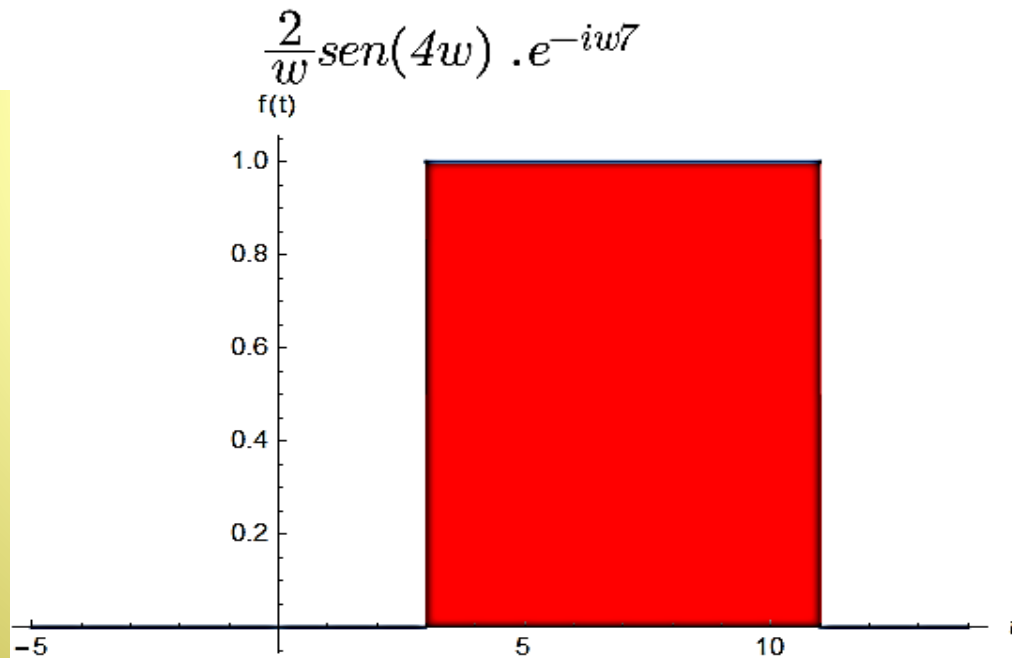
Transformada de Fourier

Propiedad 5

$$\mathfrak{F}[f(t - t_0)] = F(w) \cdot e^{-iwt_0} \quad \text{Propiedad de desplazamiento}$$

$$\mathfrak{F}[u(t - 3) - u(t - 11)] = \mathfrak{F}[(u(t_0 + 4) - u(t_0 - 4))], \quad \text{con } t_0 = 7$$

$$\mathfrak{F}[(u(t - 7 + 4) - u(t - 7 - 4))] = \frac{2}{w} \text{sen}(aw) \cdot e^{-iwt_0}, \quad \text{con } a = 4 \text{ y } t_0 = 7$$



Transformada de Fourier

Propiedad 6

La función Impulso Unitario

La función impulso unitario $\delta(t)$, también conocida como Delta de Dirac, tiene un papel fundamental en el análisis de señales. La misma está definida de la siguiente manera:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Esta señal se puede ver como un pulso rectangular de área unidad, ancho ε y altura $1/\varepsilon$, tal como se muestra en la Figura 1:

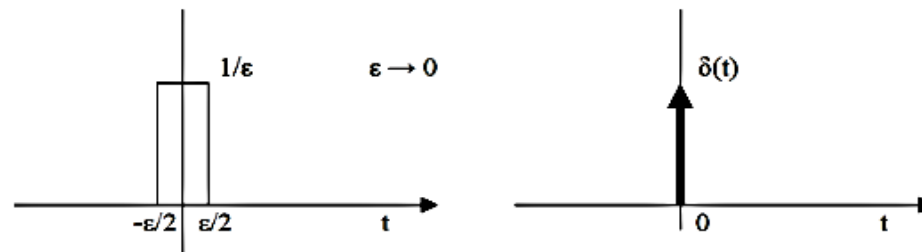


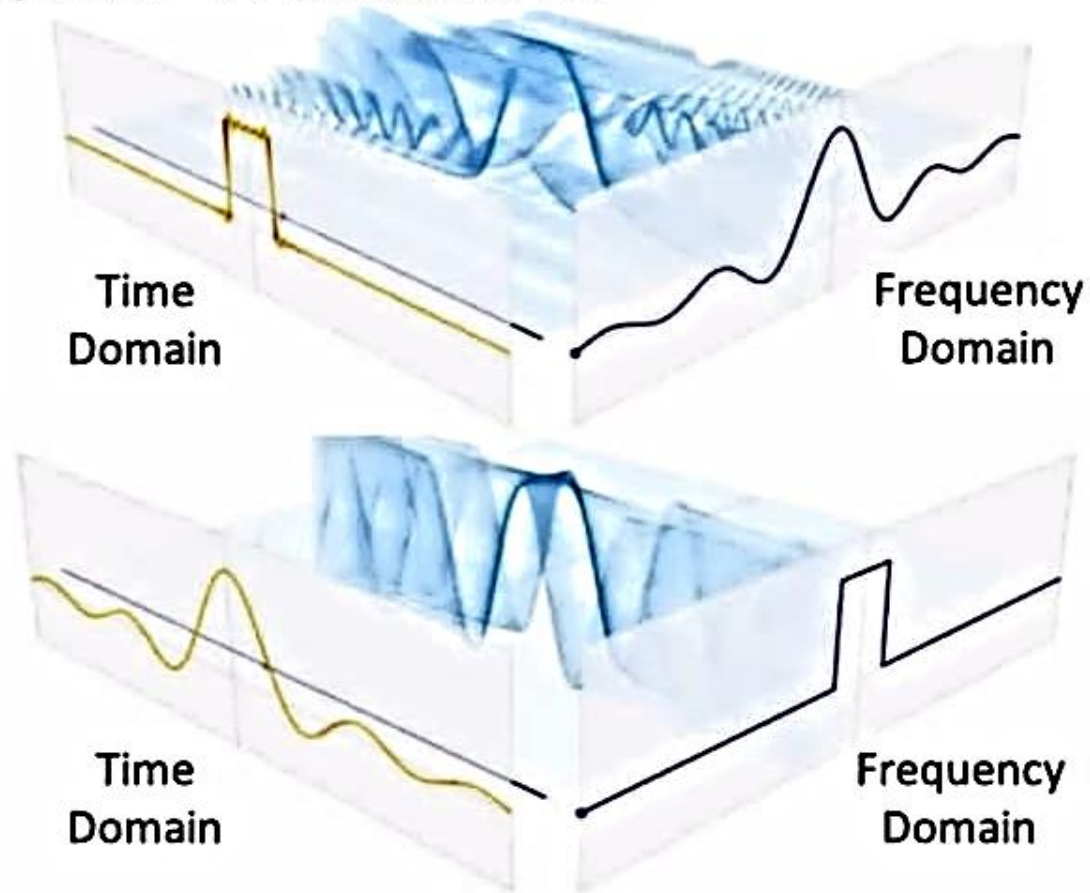
Figura 1

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-i\omega t} dt = 1$$

Función Delta de Dirac $\delta(t)$

Transformada de Fourier

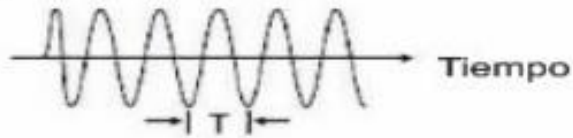
Fourier Transform



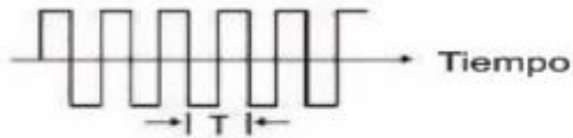
Transformada de Fourier

Dominio del tiempo

a) Onda sinusoidal



b) Onda cuadrada



d) Pulso

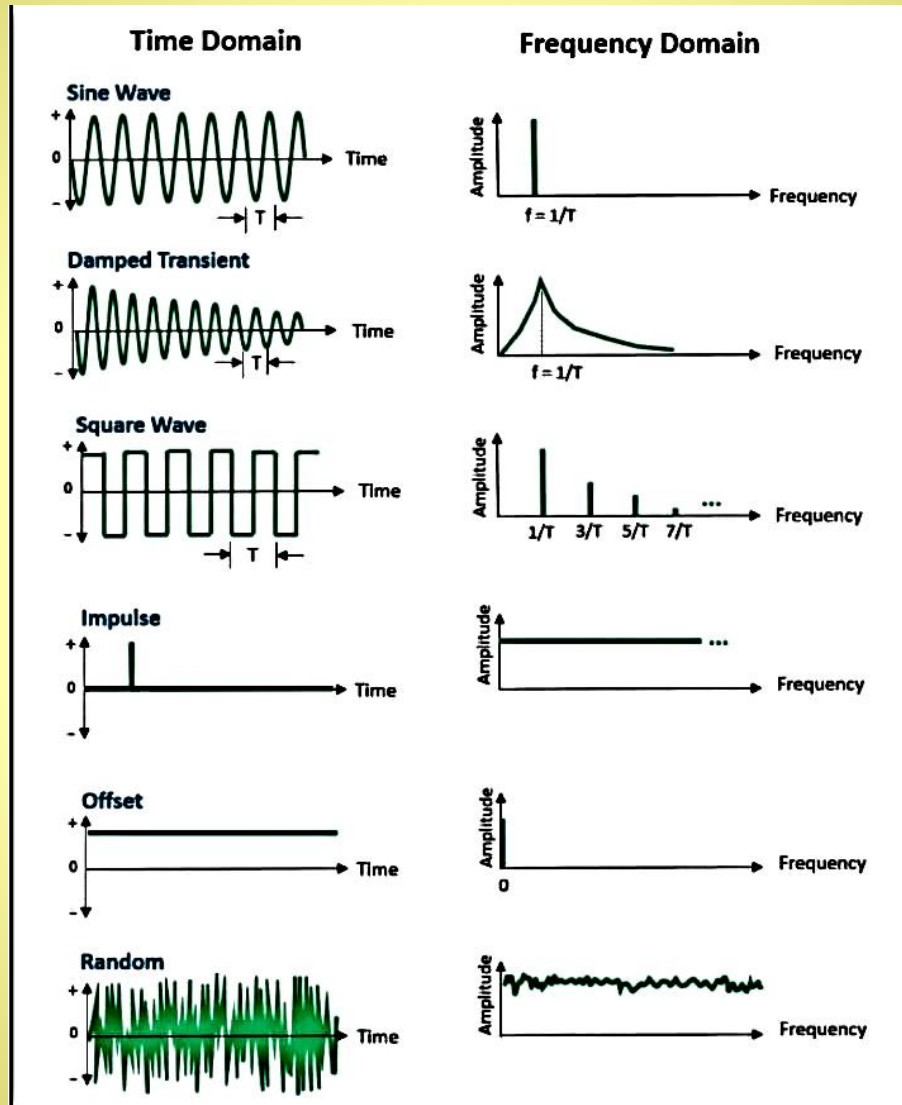


Dominio de la frecuencia



Diferentes señales de ondas representadas en el dominio del tiempo y en frecuencia.

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

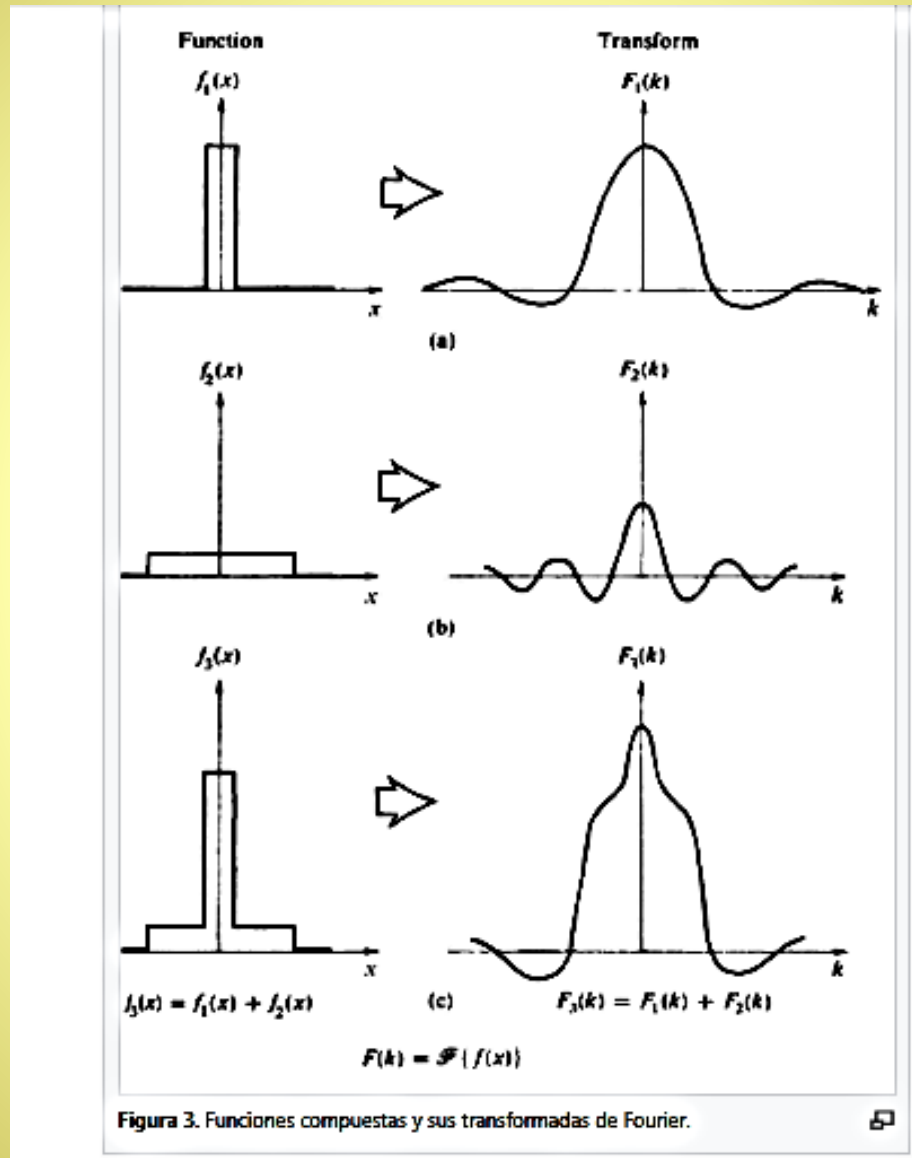
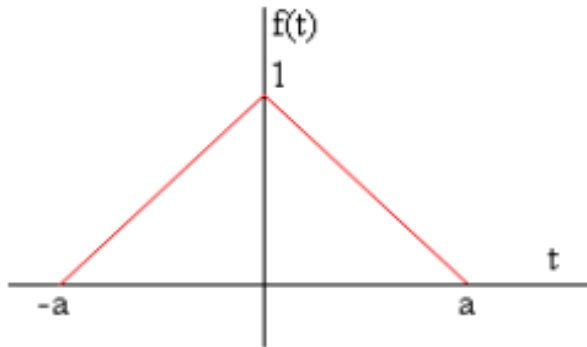


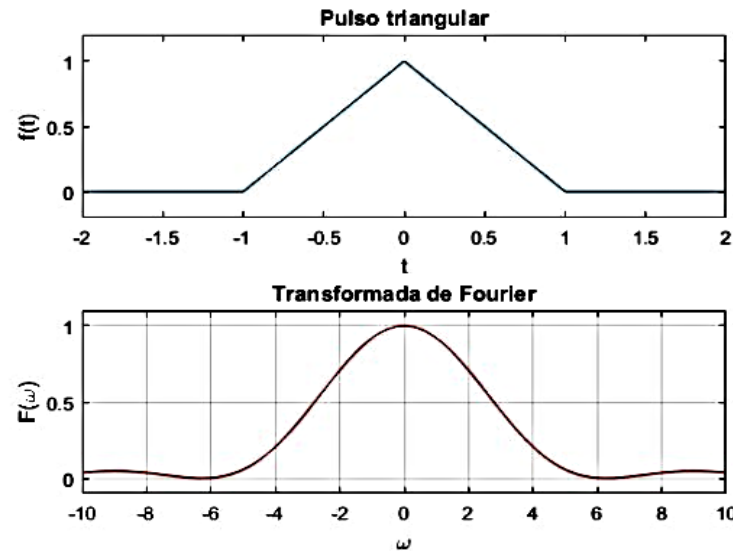
Figura 3. Funciones compuestas y sus transformadas de Fourier.

Transformada de Fourier

Pulso triangular



$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{a} & -a \leq t < 0 \\ 1 - \frac{t}{a} & 0 \leq t < a \\ 0 & \text{otros } t \end{cases}$$



En la ventana de comandos aparece la transformada de Fourier, que es la misma que hemos deducido con $a=1$

La transformada de Fourier es

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt =$$

$$\int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) \exp(-i\omega t) dt + \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \exp(-i\omega t) dt = \frac{4\sin^2(\omega a/2)}{a\omega^2}$$

Transformada de Fourier



Figura 2.6: Transformada de Fourier de un pulso rectangular

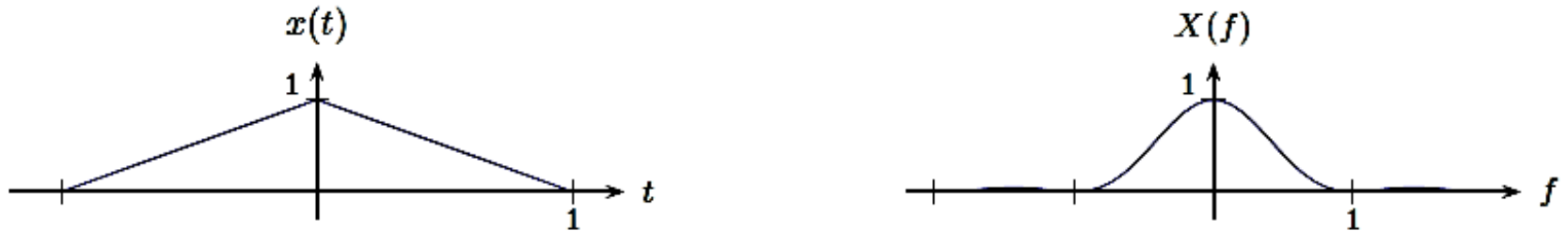
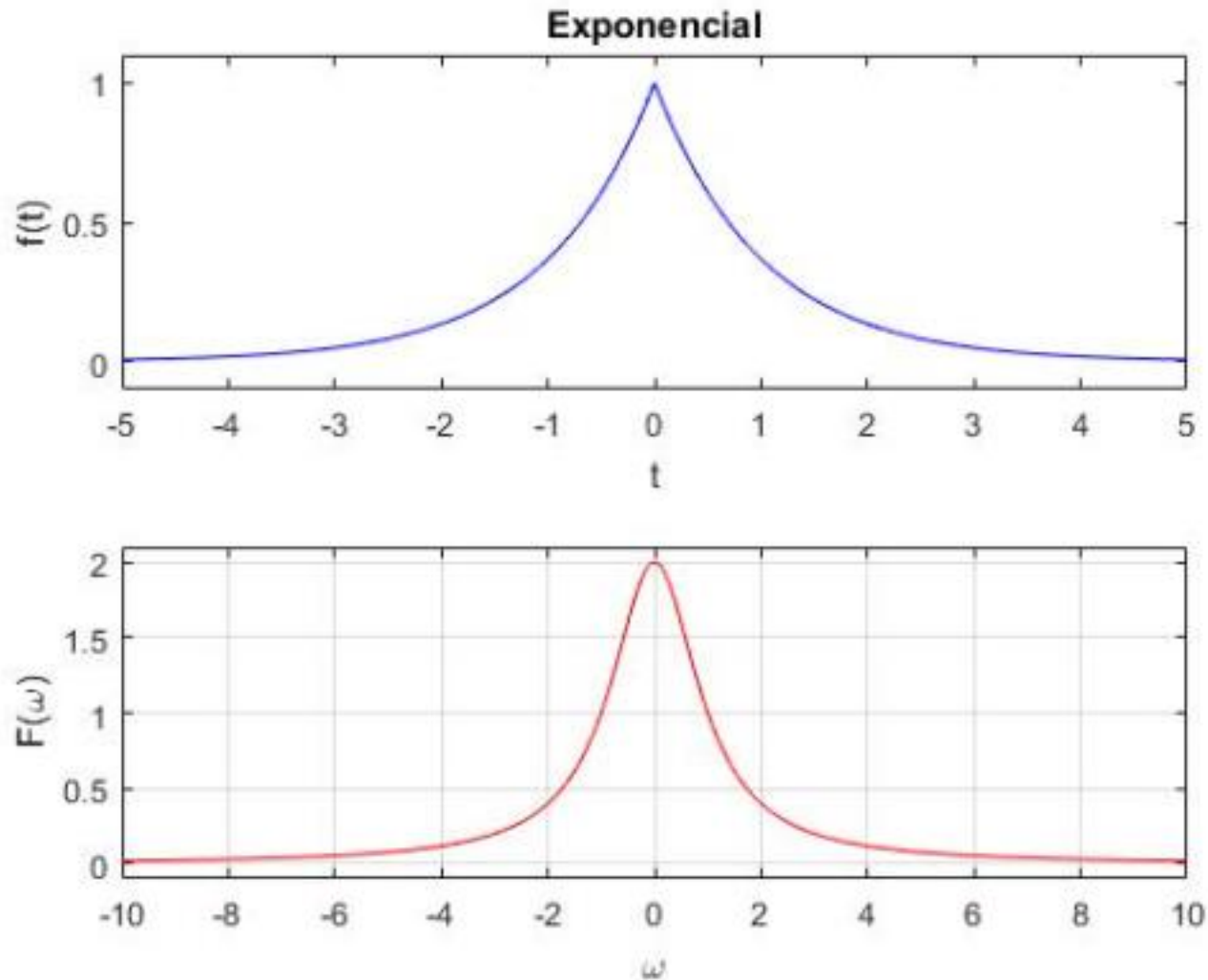
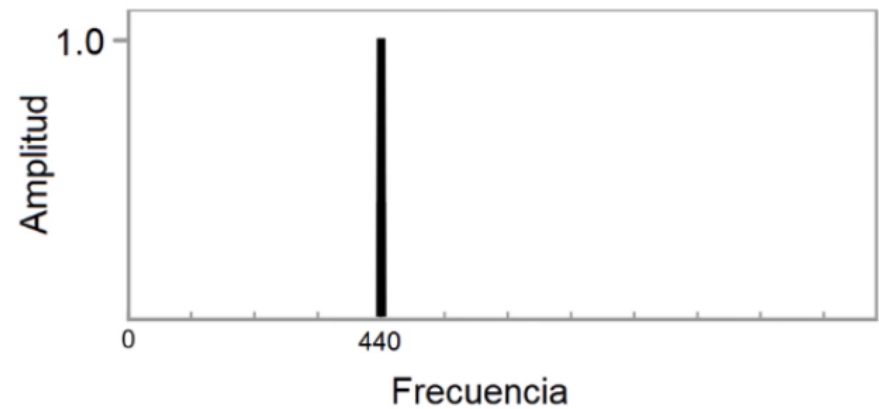
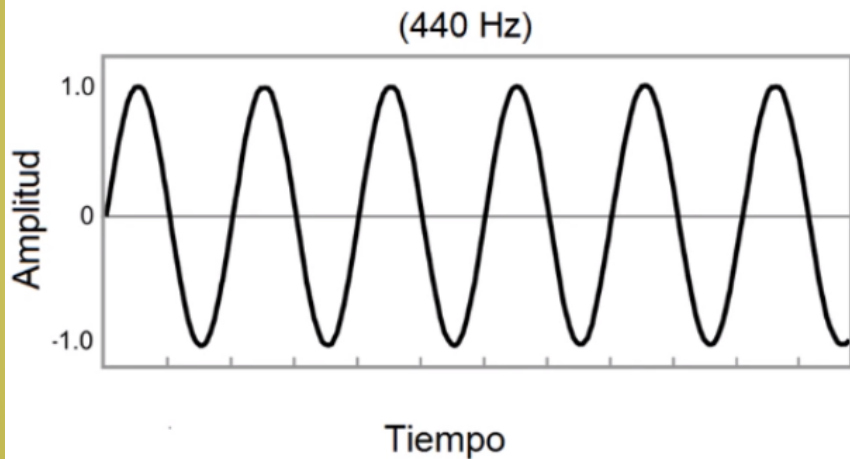


Figura 2.9: Transformada de Fourier de pulso triangular

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

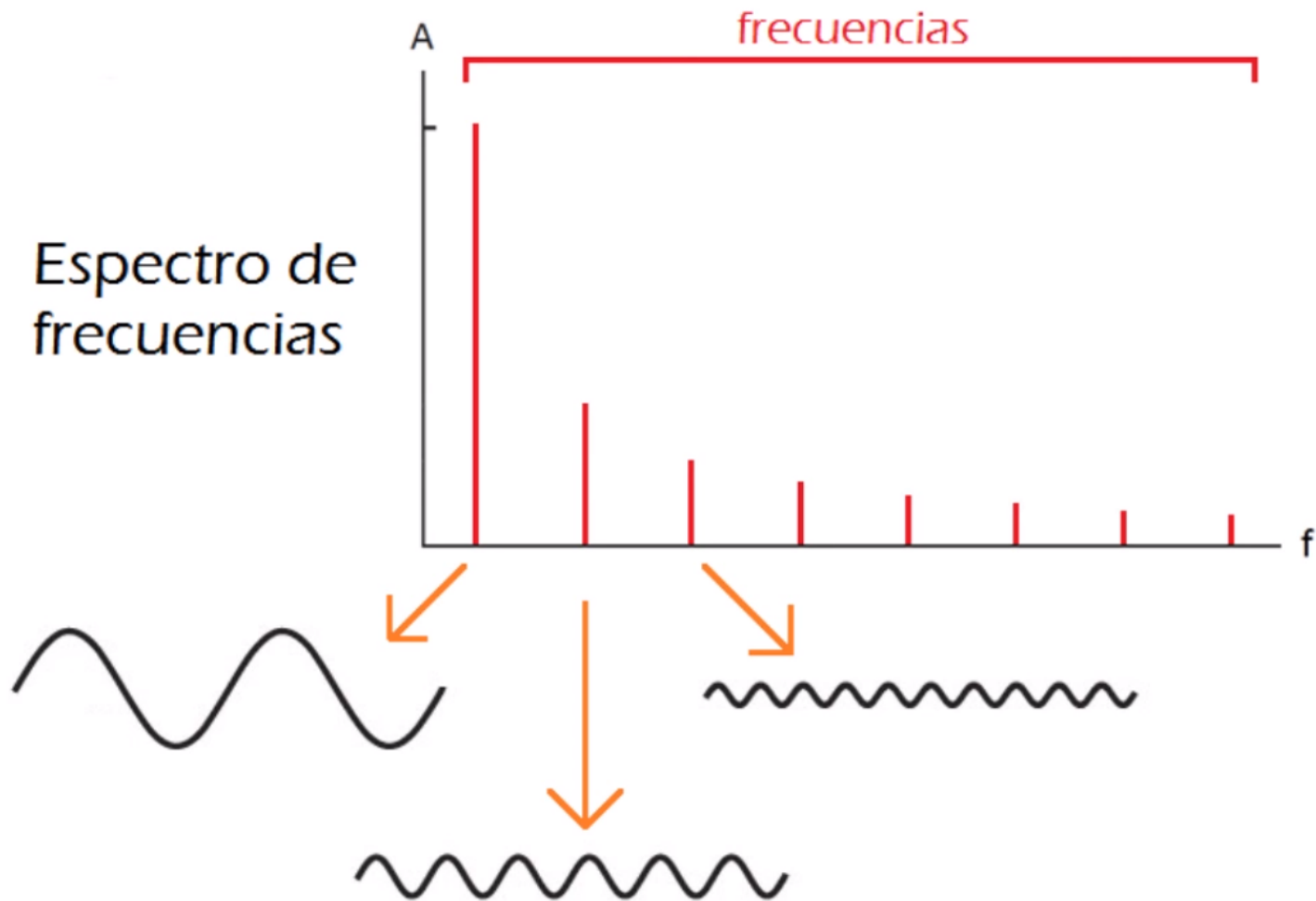


Transformada de Fourier

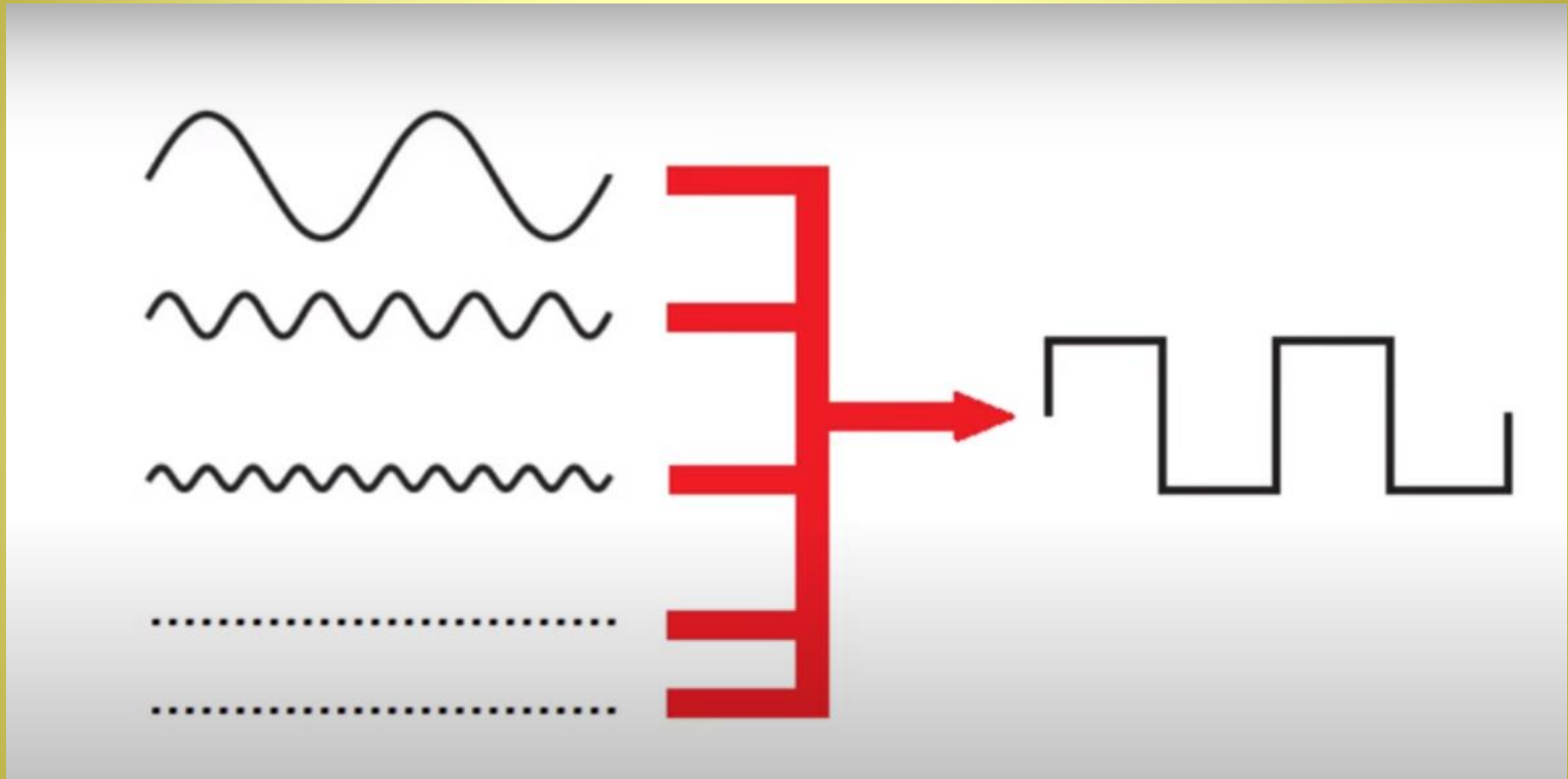
Se denomina *espectro de frecuencias* a la representación de las amplitudes de las ondas senoidales (en ordenadas) en función de la frecuencia de las mismas (en abcisas).

Es una medida de la distribución de las amplitudes de cada frecuencia.

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier



SERIE DE FOURIER

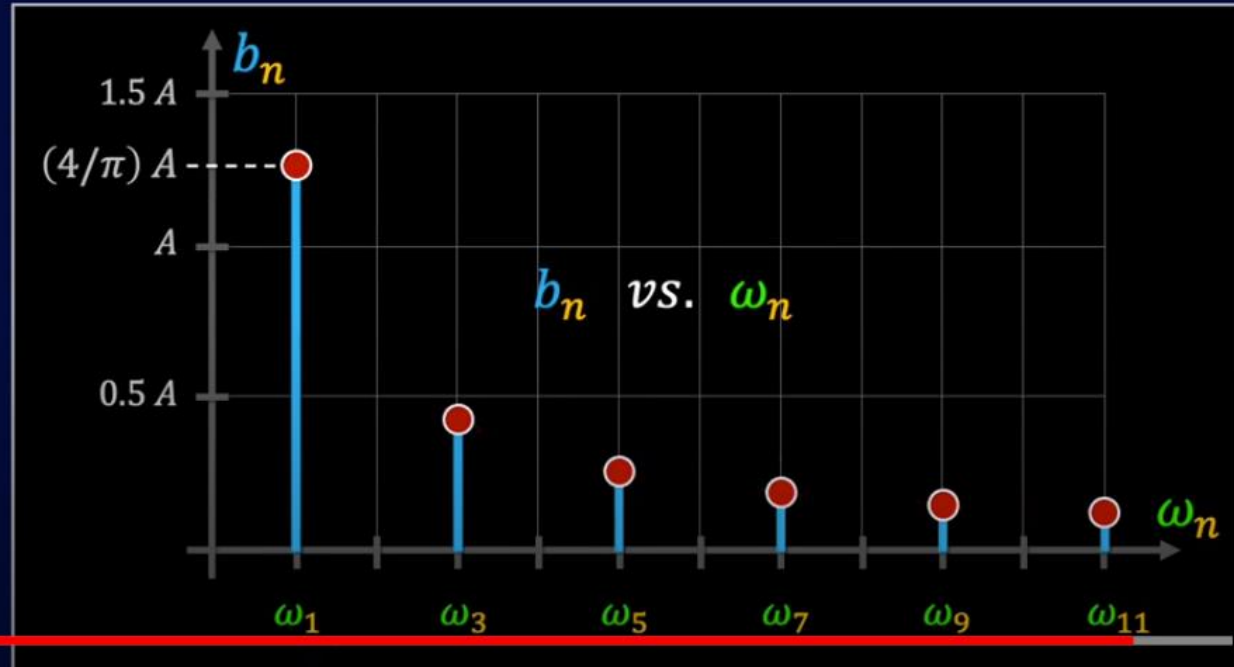
Transformada de Fourier

08 - Cómo Graficar el Espectro de Frecuencias de una Serie de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} -A, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ +A, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$\omega_n = n \omega_0 = n \frac{2\pi}{T}$$

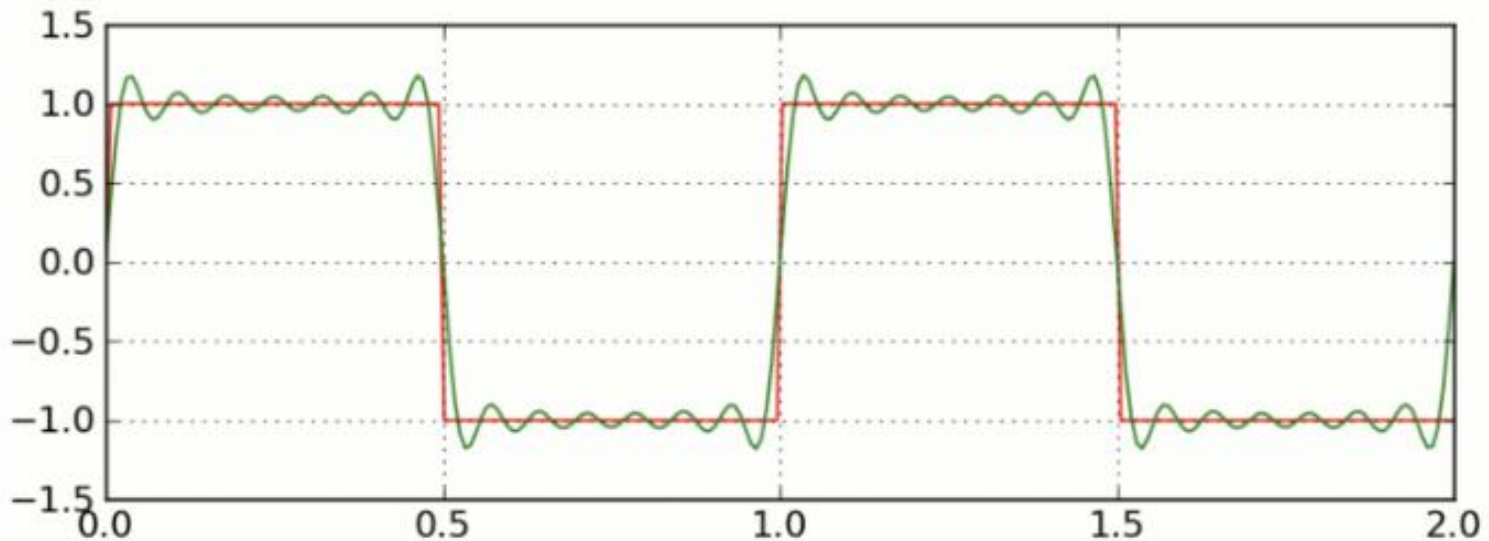
n	ω_n	a_n	b_n
1	ω_0	0	$\frac{4}{\pi} \frac{A}{1}$
2	$2 \omega_0$	0	0
3	$3 \omega_0$	0	$\frac{4}{\pi} \frac{A}{3}$
4	$4 \omega_0$	0	0
5	$5 \omega_0$	0	$\frac{4}{\pi} \frac{A}{5}$
6	$6 \omega_0$	0	0
7	$7 \omega_0$	0	$\frac{4}{\pi} \frac{A}{7}$



Transformada de Fourier

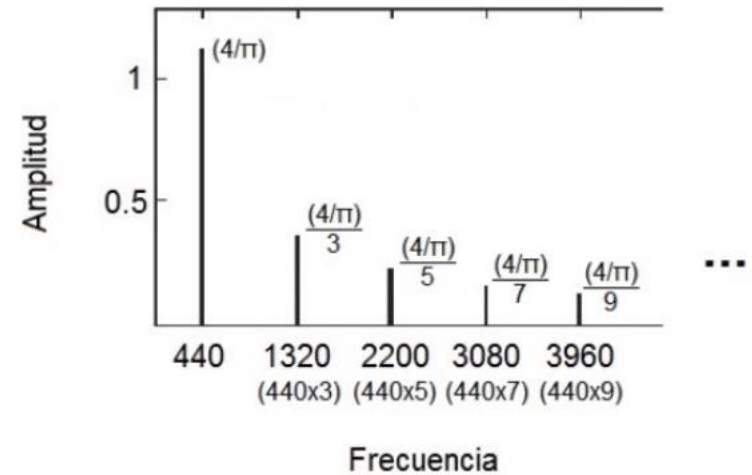
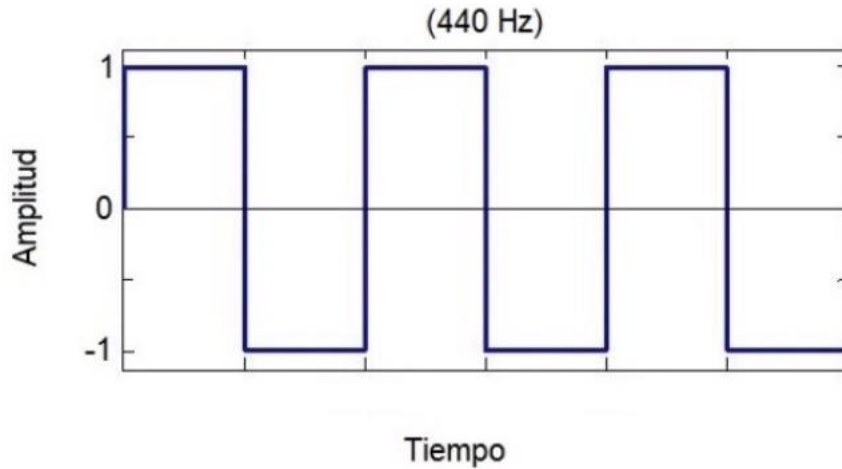
$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)ft)}{2k-1}$$
$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)$$

Donde $\omega = 2\pi f$



ESPECTRO DE FRECUENCIAS

Transformada de Fourier



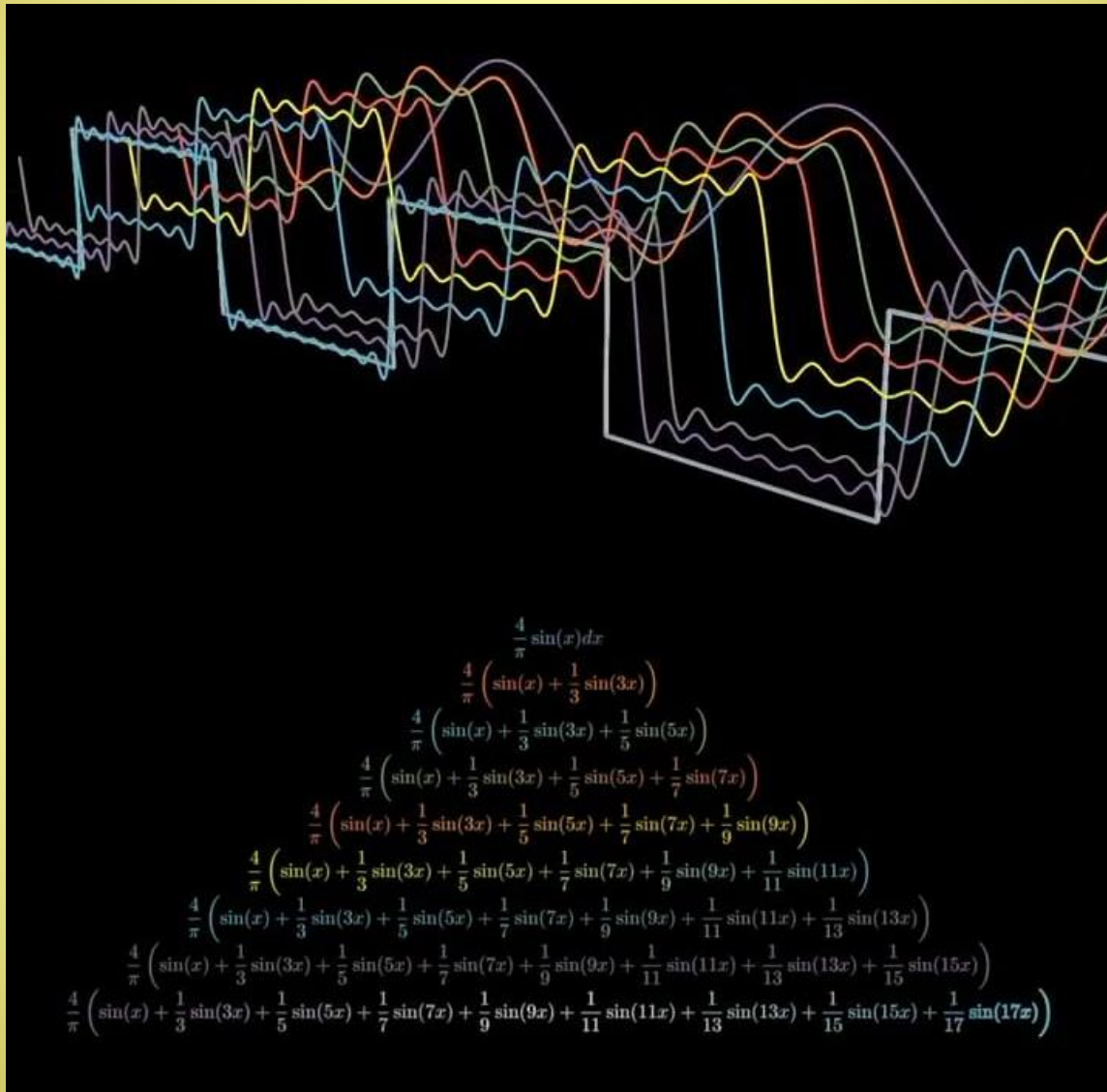
$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi(2k-1)ft)}{2k-1}$$

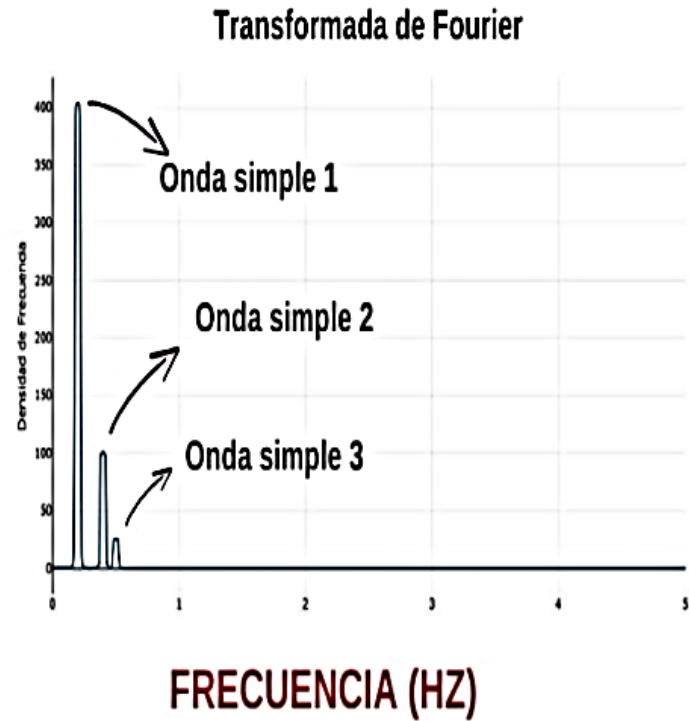
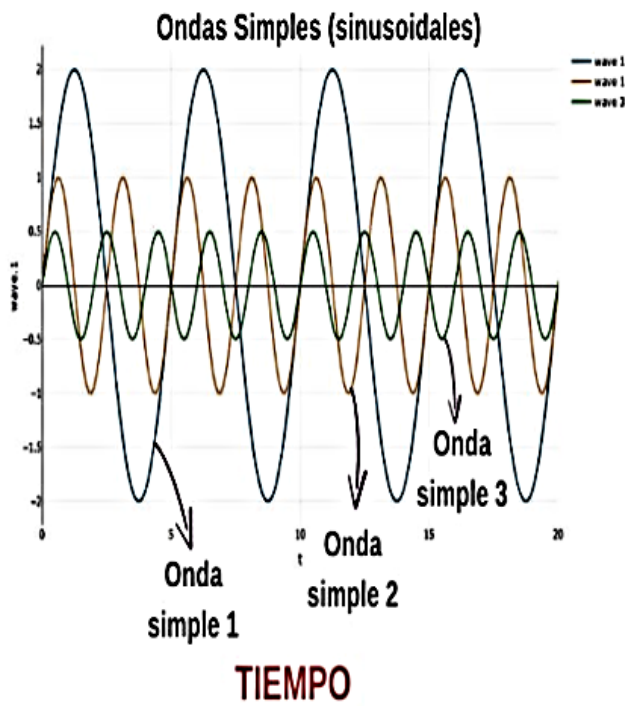
$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)$$

Donde $\omega = 2\pi f$

ESPECTRO DE FRECUENCIAS

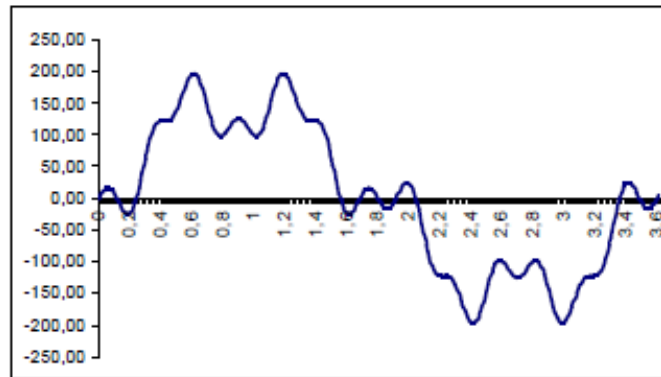
Transformada de Fourier



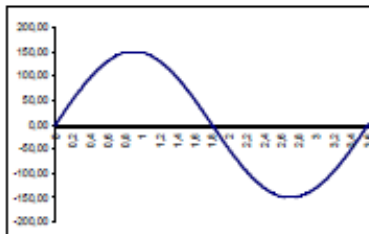


Transformada de Fourier

Descomposición Armónica

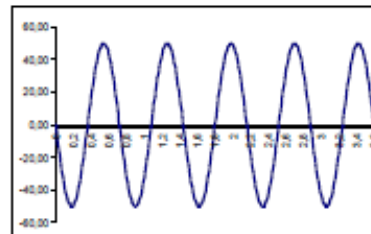


=

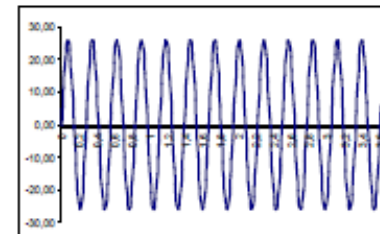


Fundamental

+

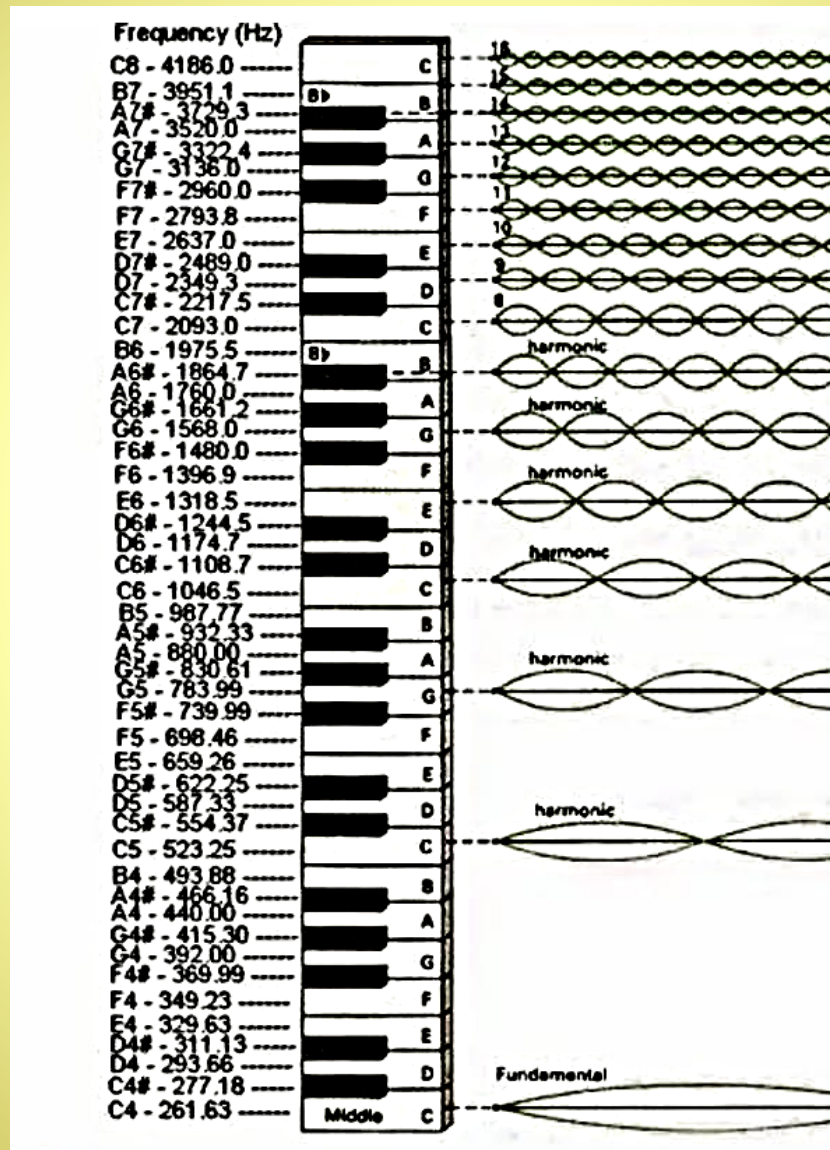


+



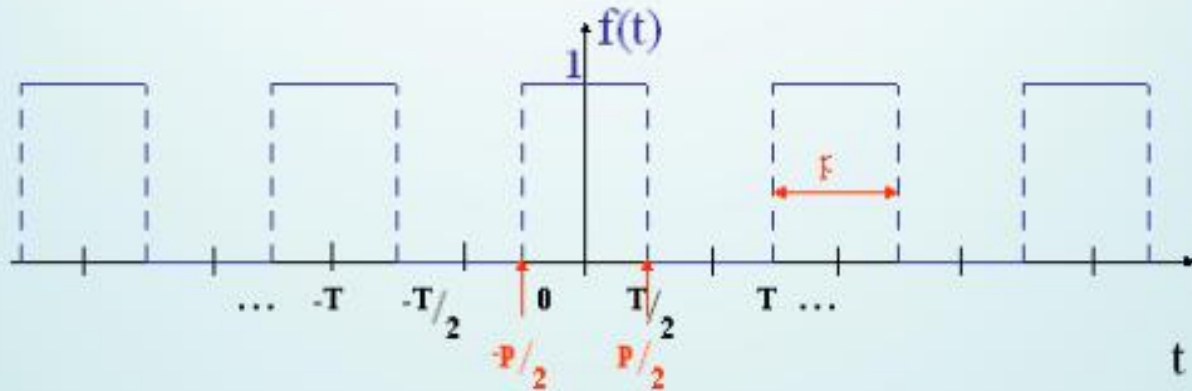
Armónicos

Transformada de Fourier



Transformada de Fourier

Tren de pulsos de amplitud 1, ancho p y periodo T :



$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} < t < -\frac{p}{2} \\ 1 & -\frac{p}{2} < t < \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

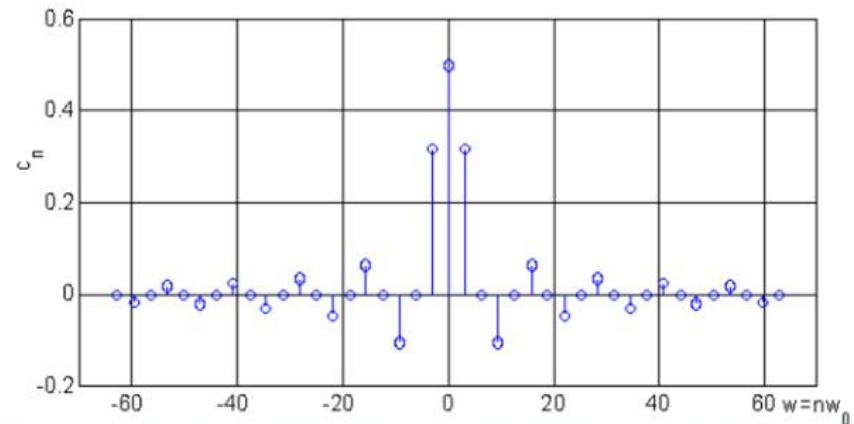
Transformada de Fourier

Los coeficientes de la serie compleja de Fourier en este caso resultan puramente reales:

$$c_n = \left(\frac{p}{T} \right) \frac{\text{sen}(n\omega_0 \frac{p}{2})}{(n\omega_0 \frac{p}{2})}$$

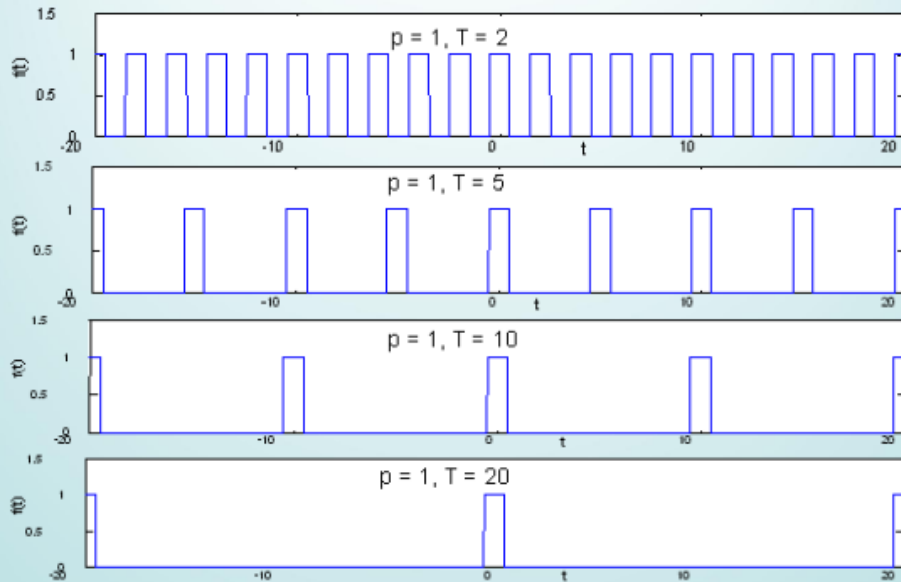
El espectro de frecuencia correspondiente lo obtenemos (en este caso) graficando c_n contra $\omega = n\omega_0$.

Espectro del tren de pulsos para $p = 1$, $T = 2$

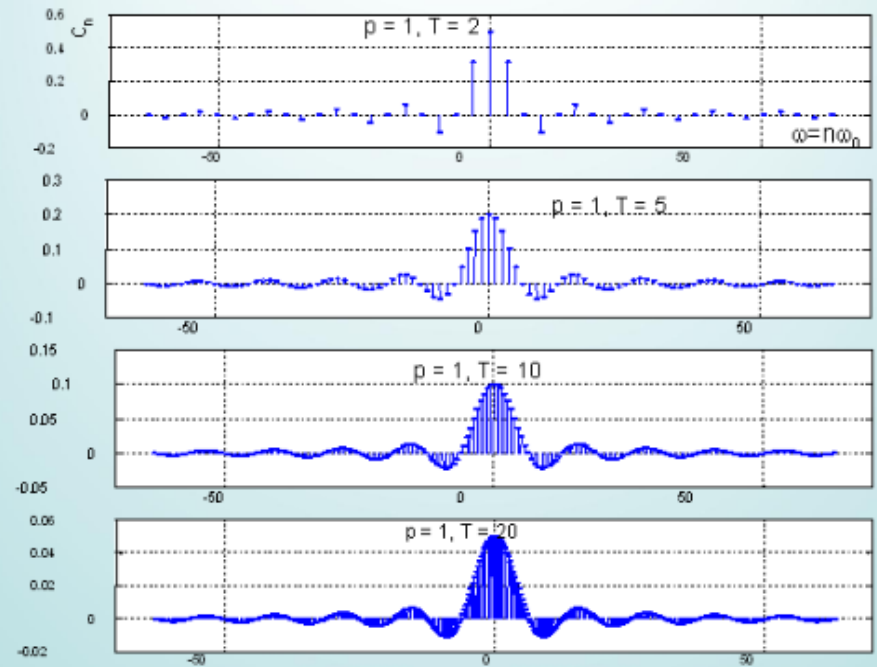


Transformada de Fourier

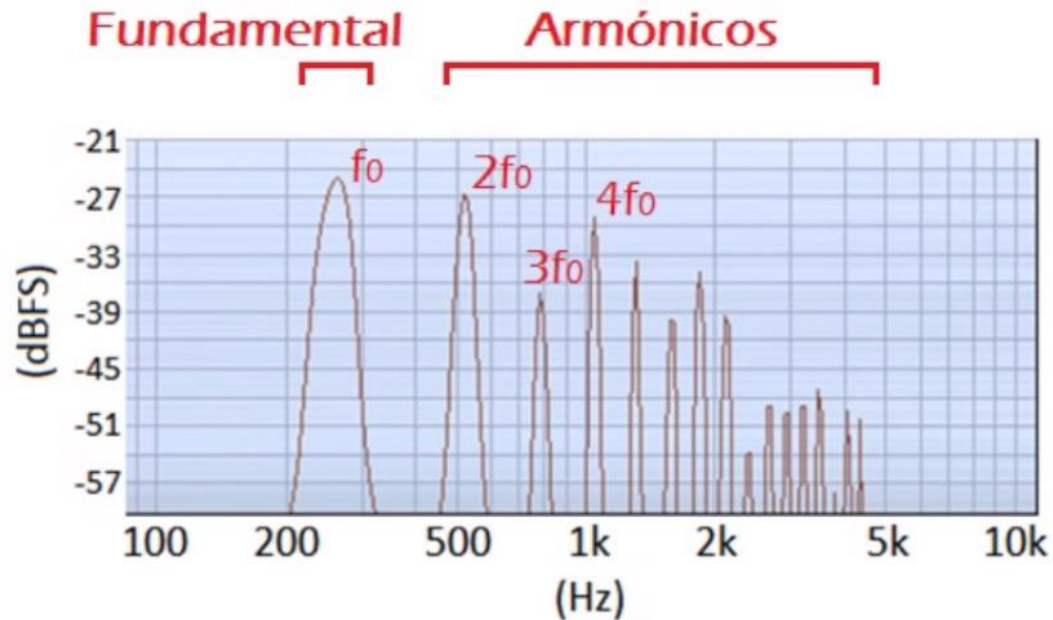
Si el periodo del tren de pulsos aumenta...



...el espectro se "densifica".



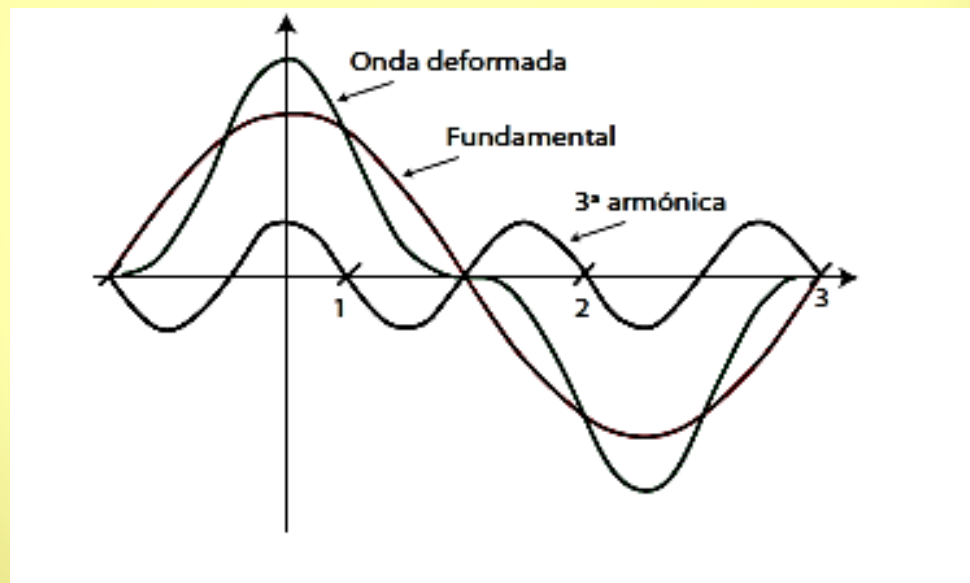
Transformada de Fourier



ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

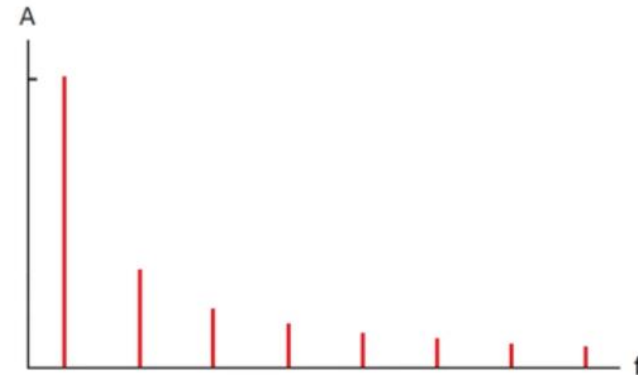
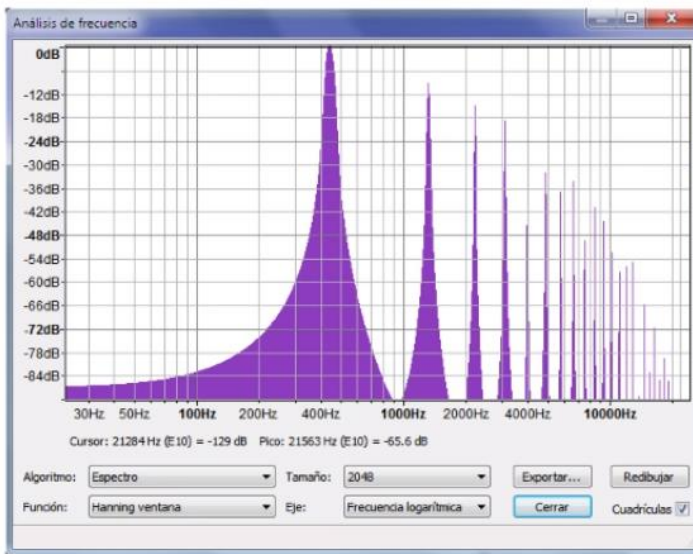
Transformada de Fourier

Se denomina **armónica** a una función senoidal cuya frecuencia es un múltiplo de la frecuencia fundamental .



ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

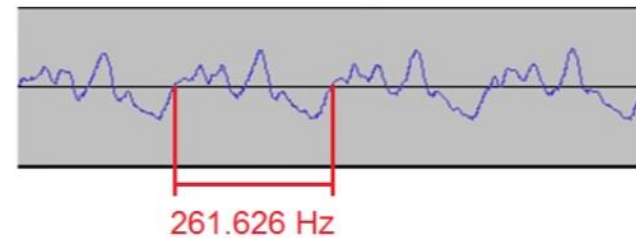
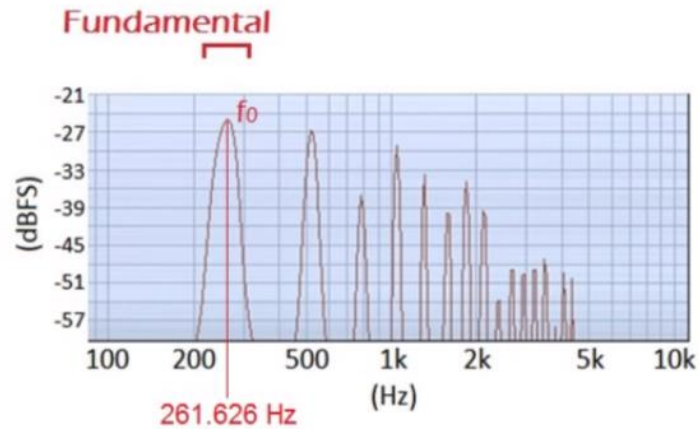
Transformada de Fourier



ESPECTRO DE FRECUENCIAS

Matemática para Ingeniería Electromecánica - UTN - Frrq

Transformada de Fourier

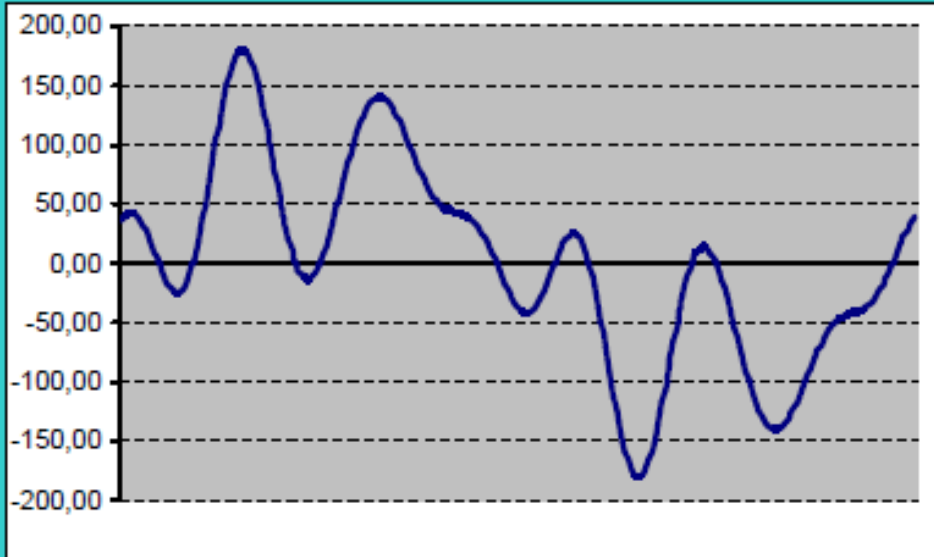


$$f_0 = 261.626 \text{ Hz (Do4)}$$



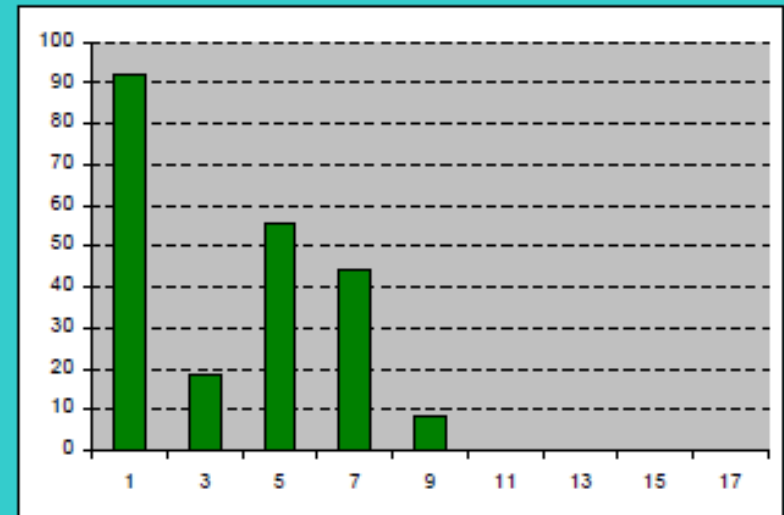
ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

Transformada de Fourier



**FORMA
DE
ONDA**

ESPECTRO



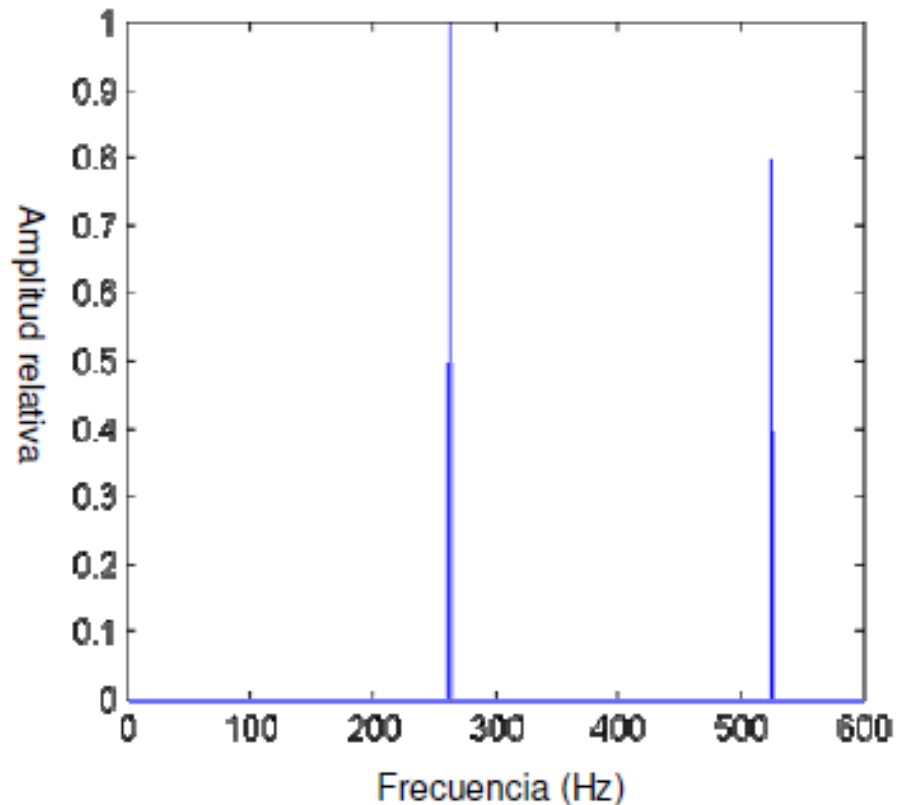
ARMÓNICOS DE UNA ONDA

FUNDAMENTAL

Transformada de Fourier

Ejemplo: Análisis de Fourier

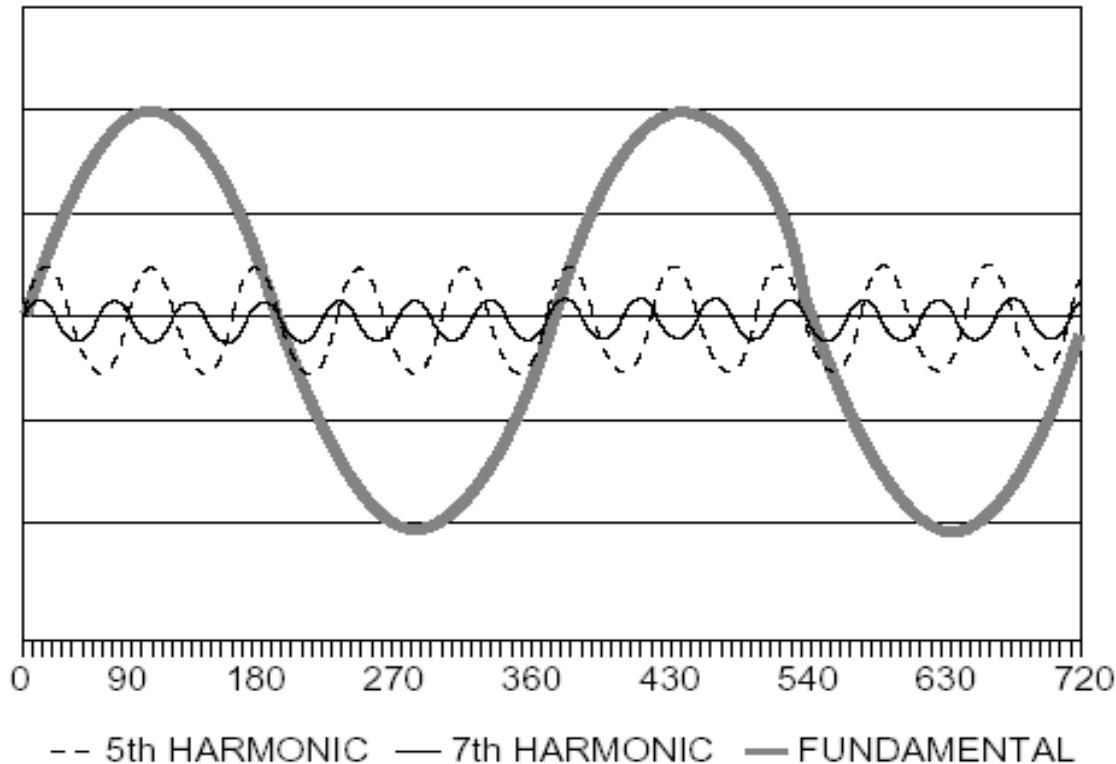
Representación de los armónicos en dominio de la frecuencia



**ARMÓNICOS DE UNA ONDA
FUNDAMENTAL**

Transformada de Fourier

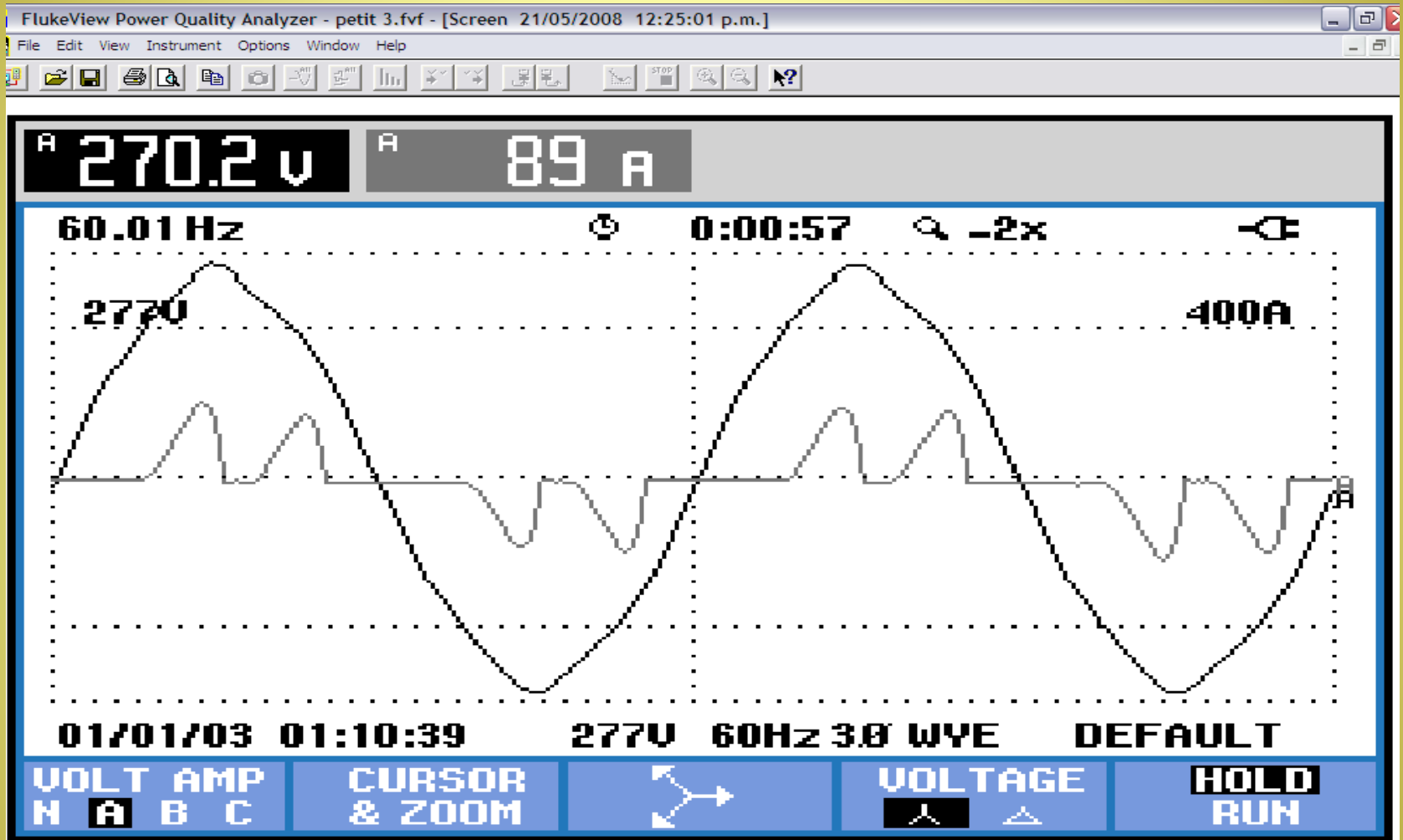
Harmonics



HARMONIC	FREQUENCY
1st	60
2nd	120
3rd	180
4th	240
5th	300
7th	420
9th	540
49th	2940

ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

Transformada de Fourier



ARMÓNICOS DE UNA ONDA

FUNDAMENTAL

Matemática para Ingeniería Electromecánica - UTN - Frq

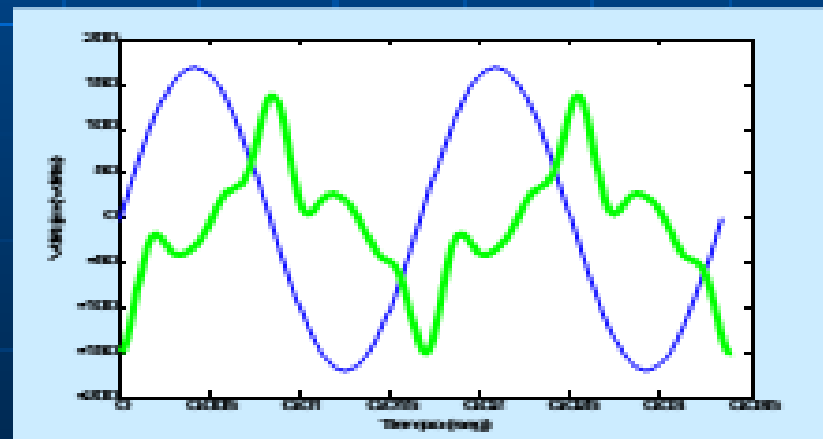
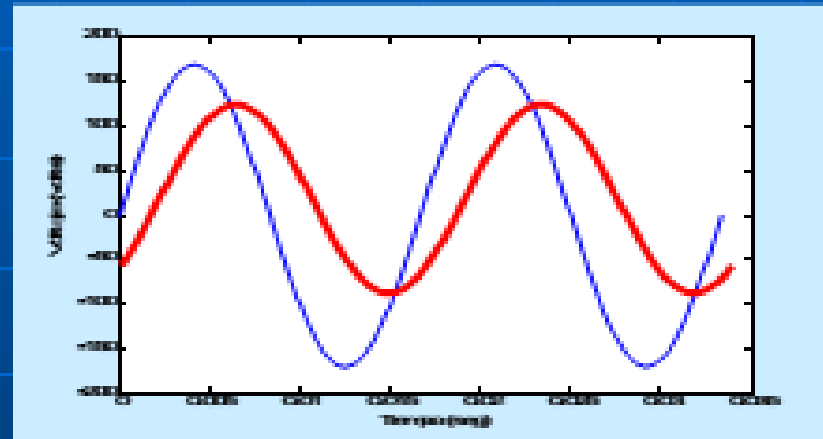
Armónicas en sistemas eléctricos

- Operación de equipos eléctricos

- Motores
- Lámparas incandescentes
- Capacitores
- Entre otros

- Operación de equipos electrónicos

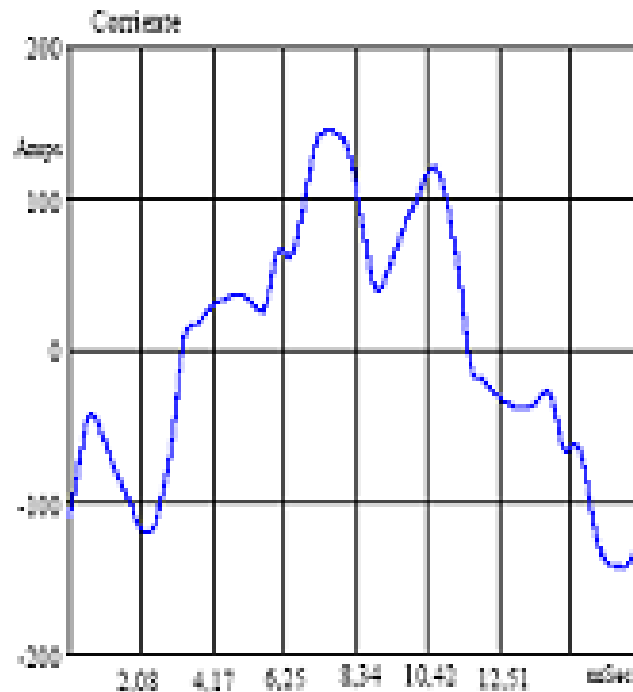
- Rectificadores
- Computadoras
- Lámparas ahorradoras
- Entre otros



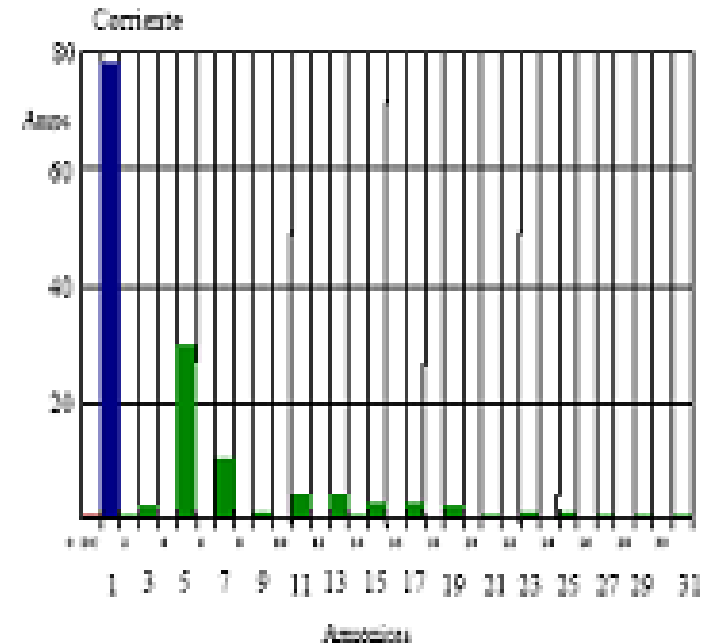
ARMÓNICOS DE UNA ONDA

Matemática para Ingeniería
FUNDAMENTAL
Electromecánica - UTN - Frío

▪ Horno de inducción



a) Forma de onda

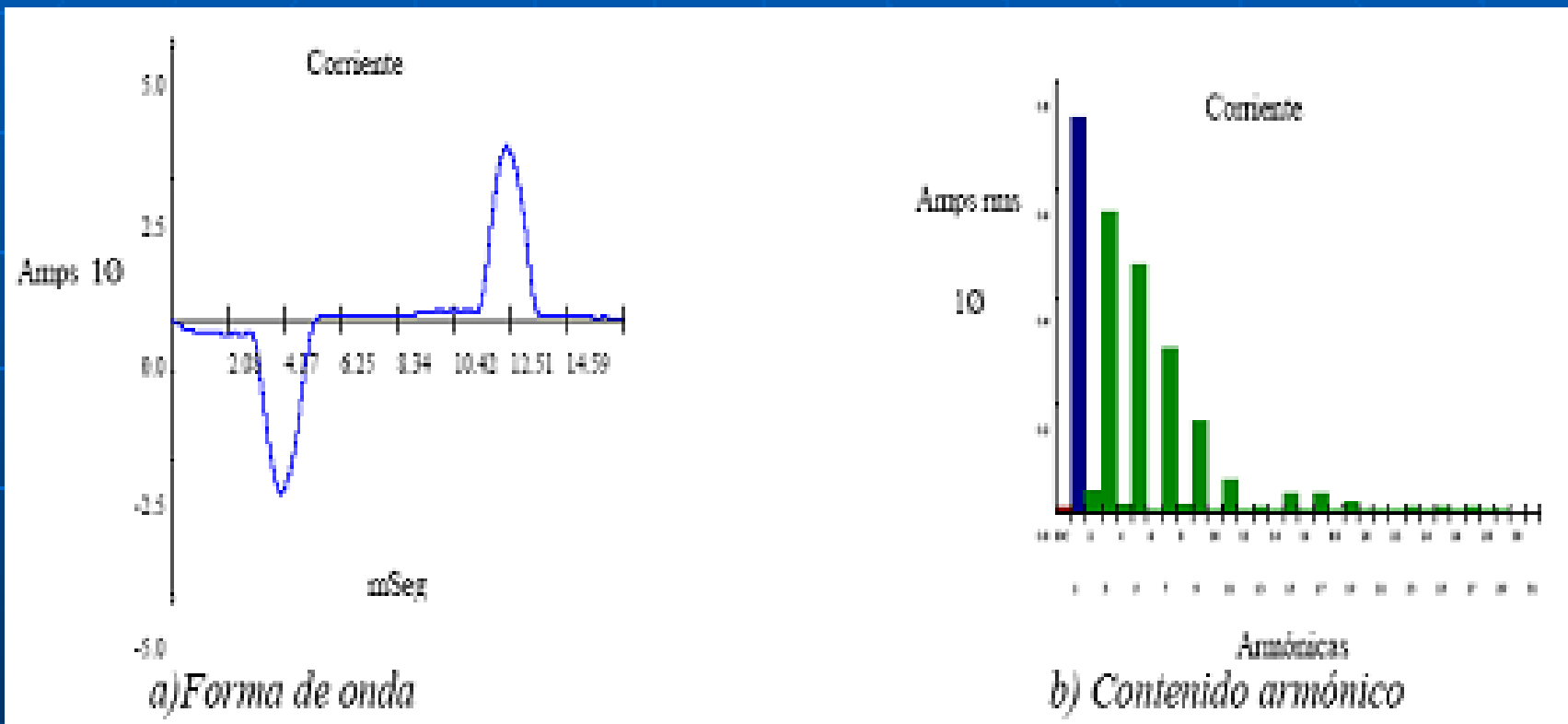


b) Contenido armónico

ARMÓNICOS DE UNA ONDA FUNDAMENTAL

Transformada de Fourier

▪ Equipo de computo

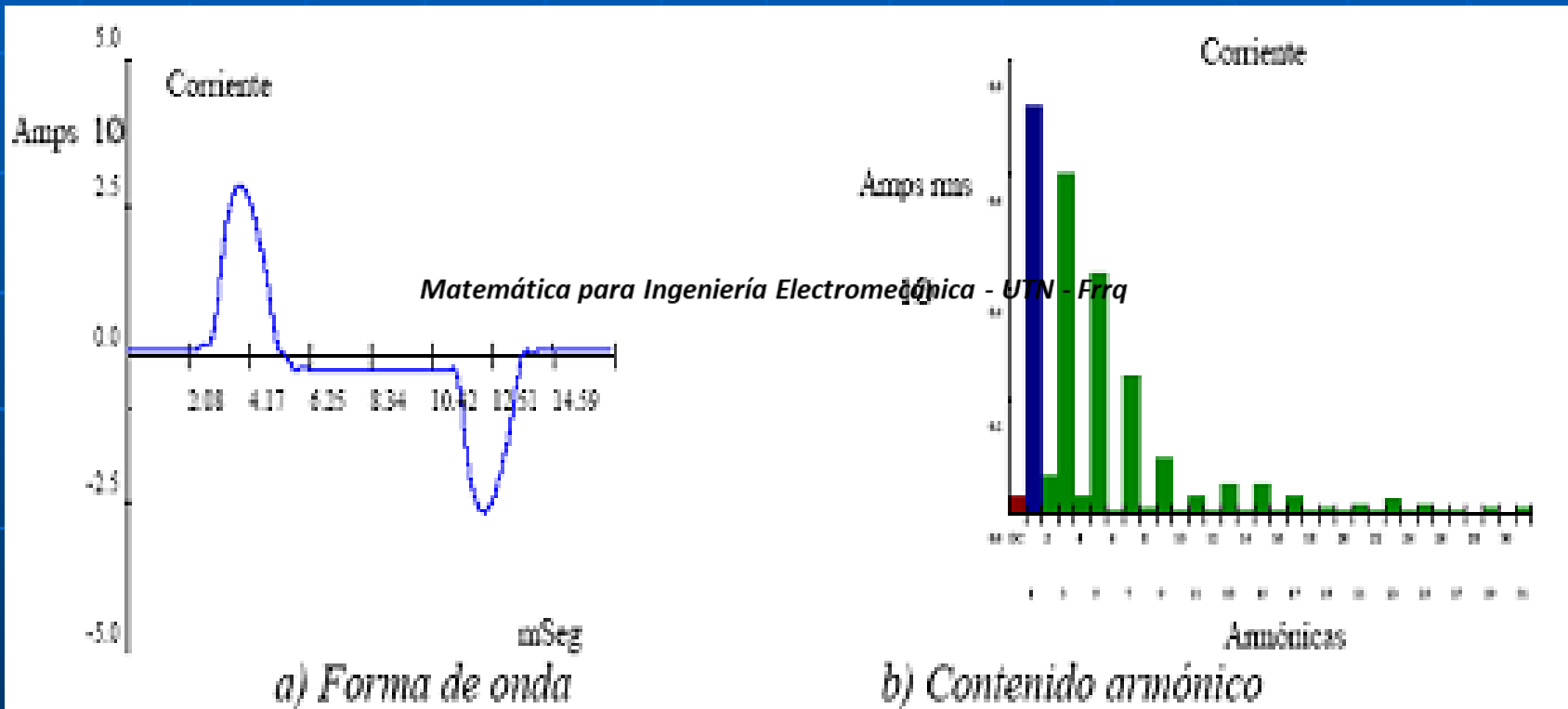


ARMÓNICOS DE UNA ONDA

FUNDAMENTAL

Transformada de Fourier

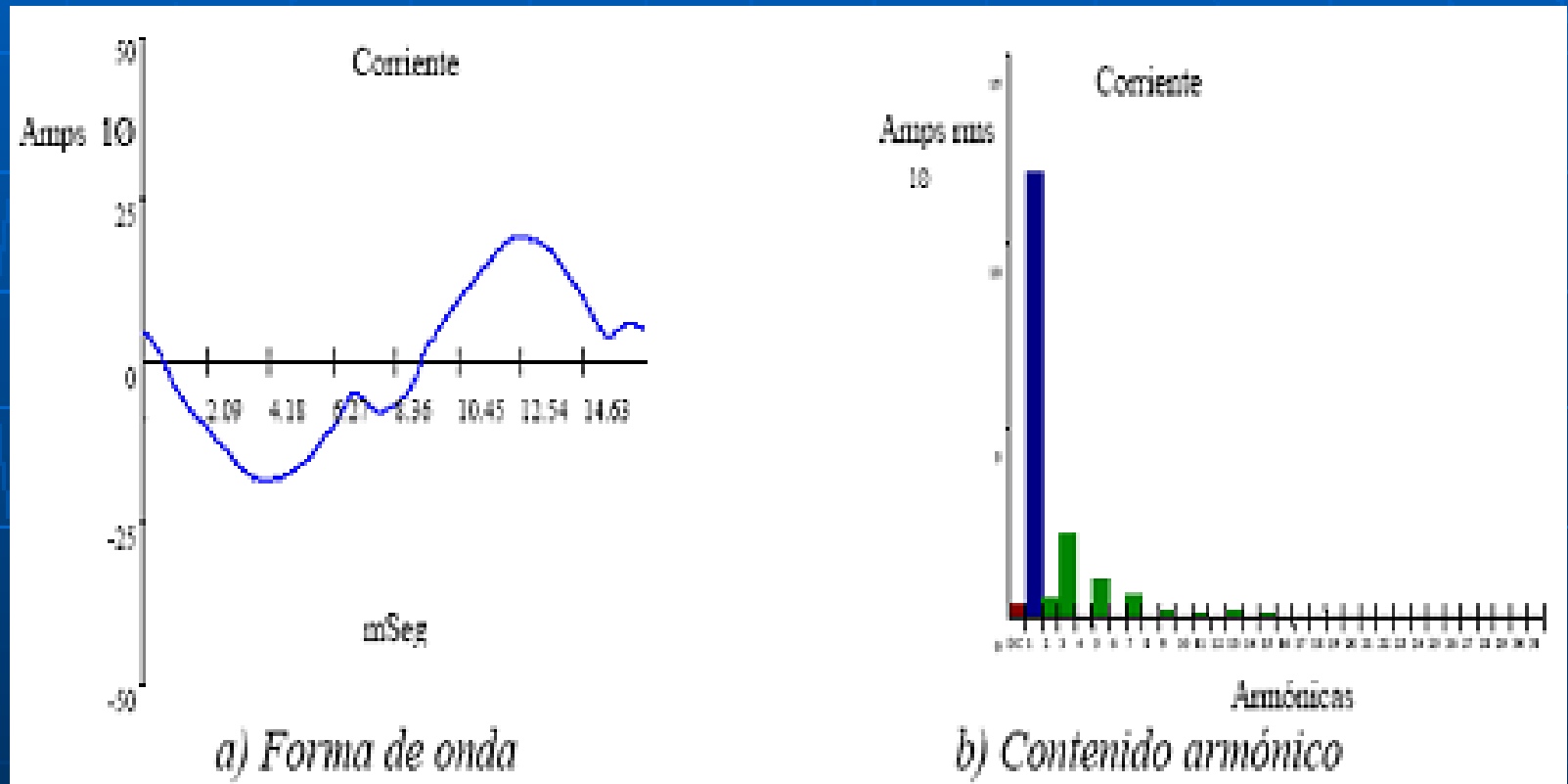
■ Televisor



**ARMÓNICOS DE UNA ONDA
FUNDAMENTAL**

Transformada de Fourier

▪ Horno de microondas



ARMÓNICOS DE UNA ONDA

FUNDAMENTAL