Matemática para ingeniería electromecánica

Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Reconquista

Guía práctica N°1. Unidad N°2: Transformada de Laplace

Docente: Martín A. Alarcón

1. Ejercicio 1

Obtener la transformada de una combinación lineal de funciones.

a) $f(t) = at + b$

b) $f(t) = 8t^3 - 3$

c) $f(t) = 4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin(4t) + 2\cos(2t)$

d) $f(t) = a\sin(wt + c)$

e) $f(t) = \sin^2(t)$

2. Ejercicio 2

Resolver aplicando el primer teorema del desplazamiento.

a) $f(t) = e^{-2t}\sin(4t)$

b) $f(t) = \sinh(at)\cos(at)$

c) $f(t) = e^{-t}\sin^2(t)$

d) $f(t) = e^{at+b}$

3. Ejercicio 3

Aplicar el producto por potencia de exponente natural de t.

a) $f(t) = t\sin(t)$

b) $f(t) = t^2\sin(t)$

c) $f(t) = t\sinh(2t)$

d) $f(t) = ue^{-2u}\sin(u)$

e) $f(t) = (t^2 - 3t + 2)\sin(3t)$

f) $f(t) = t^3 e^{-3t}$

4. Ejercicio 4

Aplicar división por t.

a) $f(t) = \dfrac{\sinh(t)}{t}$

b) $f(t) = \dfrac{e^{-2t} - e^{-3t}}{t}$

c) $f(t) = \dfrac{\cos(2t) - \cos(3t)}{t}$

5. Ejercicio 5

Resolver aplicando el segundo teorema del desplazamiento.

a) $f(t) = (t-2)H(t-2)$

b) $f(t) = (1-t)H(t-1)$

c) $f(t) = \cos(t)H(t-\pi)$

d) $f(t) = t^2 H(t-1)$

e) $f(t) = e^{-2t} H(t-1)$

6. Ejercicio 6

Hallar las transformadas inversas.

a) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+9}$

b) $F(s) = \dfrac{4}{s-2}$

c) $F(s) = \dfrac{1}{s^4}$

d) $F(s) = \dfrac{s}{s^2-16}$

e) $F(s) = \dfrac{5s+4}{s^3} - \dfrac{2s-18}{s^2+9} + \dfrac{24-30\sqrt{s}}{s^4}$

7. Ejercicio 7

Aplicar el primer teorema del desplazamiento.

a) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

b) $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$

c) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+s+1}$

8. Ejercicio 8

Resolver aplicando la descomposición en fracciones parciales simples.

8.1. Raíces reales simples

a) $F(s) = \dfrac{s+1}{s^3+s^2-6s}$

b) $F(s) = \dfrac{s+12}{s^2+4s}$

c) $F(s) = \dfrac{6s}{s^2+6s-8}$

d) $F(s) = \dfrac{3s+16}{s^2-s-6}$

8.2. Raíces reales múltiples

a) $F(s) = \dfrac{s+2}{s^5-2s^4+s^3}$

b) $F(s) = \dfrac{10-4s}{(s-2)^2}$

c) $F(s) = \dfrac{2-s-s^2}{(s+1)^3}$

8.3. Raíces complejas simples

a) $F(s) = \dfrac{s^2+1}{s^3+4s}$

b) $F(s) = \dfrac{4s^2-3s}{(s-2)(s^2+1)}$

c) $F(s) = \dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$

d) $F(s) = \dfrac{6s-2}{s^2+9}$

8.4. Raíces complejas múltiples

a) $F(s) = \dfrac{4s+32}{s(s^2+4)}$

b) $F(s) = \dfrac{s+25}{(s^2-4s+5)^2}$

c) $F(s) = \dfrac{s^2-6s+7}{(s^2-4s+5)^2}$

9. Ejercicio 9

Aplicación en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes. En todos los casos $x = x(t) = f(t)$.

a) $\dfrac{\partial x}{\partial t} + 2x = t, \qquad x(0) = -1$

b) $\dfrac{\partial x}{\partial t} - x = \sin t, \qquad x(0) = 0$

c) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 2a\dfrac{\partial x}{\partial t} + (a^2 + b^2)x = 0, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1$

d) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 3\dfrac{\partial x}{\partial t} + 2x = 4e^{2t}, \qquad x(0) = -3,\ \dot{x}(0) = 5$

e) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4x = \sin t, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$

f) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4\dfrac{\partial x}{\partial t} + 4x = 4e^{-2t}, \qquad x(0) = 4,\ \dot{x}(0) = -1$

g) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + x = t, \qquad x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 2$

h) $\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial x}{\partial t} + x = te^{-t}, \qquad x(0) = -1,\ \dot{x}(0) = -2$

i) $\dfrac{\partial^4 x}{\partial t^4} - 16x = 30\sin t, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 2,\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}(\pi) = 0,\ \dfrac{\partial^3 x}{\partial t^3}(\pi) = -18$

10. Ejercicio 10

Aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

1.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} + 2x + y = e^{-3t} \\ &\frac{\partial y}{\partial t} + 5x + 3y = 5e^{-2t} \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = -1$ y $y(0) = 4$

2.

$$\begin{aligned} &3\frac{\partial x}{\partial t} + 3\frac{\partial y}{\partial t} - 2x = e^{t} \\ &\frac{\partial x}{\partial t} + 2\frac{\partial y}{\partial t} - y = 1 \end{aligned}$$

sujetas a las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = 1$