CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

Javier Pérez González

junio 2004

Índice general

Capítulo 1

Números complejos. Funciones complejas elementales

1.1. Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que *"ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación"* y acuñó el calificativo *"imaginarias"* para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución de un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz *"el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser."*

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la *"naturaleza"* de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron *"a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos"*. Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el resultado conocido como *Teorema Fundamental del Álgebra* que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que *también son números complejos*. En este curso veremos varias demostraciones de este teorema pero ya puedes entender lo que significa. Fíjate en cada una de las ecuaciones:

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=-3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=-1\pm i$$

tienen sentido cuando x es es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que *también* son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de *"números complejos"* se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Recordemos, finalmente, la afirmación de Hadamard *"El camino más corto entre dos verdades del análisis real pasa con frecuencia por el análisis complejo"*.

1.2. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos

Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por

$$(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v)$$
$$(x,y)(u,v)=(xu-yv,xv+yu)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa y conmutativa de las operaciones así definidas y la distributiva del producto respecto de la suma. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-x,-y)$ es el opuesto de (x,y), y todo $(x,y)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman *números complejos*.

Observaciones

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama unas veces *pares ordenados de números reales*, otras *vectores* o *puntos* y también *números complejos*. La razón de esto es que en $\mathbb{R}^2$ conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama *vectores* si se está considerando la estructura de espacio vectorial, *puntos* si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, *pares ordenados* cuando estamos pensando en $\mathbb{R}^2$ como conjunto sin ninguna estructura particular y *números complejos* cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo concepto matemático tiene sentido propio dentro de una determinada estructura matemática. Por ello, a un elemento de $\mathbb{R}^2$ se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de $\mathbb{R}^2$.

1.2.1. Forma binómica de un número complejo

El símbolo usual (x,y) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (x,y). Para convencerte calcula $(1,-1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:

$$(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$$
$$(x,0)(y,0)=(xy,0)$$

esto indica que los números complejos de la forma $(x,0)$ se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos más precisos, $\mathbb{R}\times\{0\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo $(x,0)$ por el número real x. Es decir, hacemos la identificación $(x,0)=x$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $x(u,v)$ tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real x por el vector (u,v) (estructura vectorial de $\mathbb{R}^2$) y producto del complejo $(x,0)$ por el complejo (u,v). Pero ambos coinciden y son iguales a (xu,xv).

El número complejo $(0,1)$ lo representaremos por i y lo llamaremos *unidad imaginaria*. Con ello tenemos que

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$$

Se dice que $x+iy$ es la *expresión binómica* del número complejo (x,y). Se dice que x es la *parte real* e y es la *parte imaginaria* del número complejo $x+iy$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(x+iy)(u+iv)=xu+i^2yv+i(xv+yu)=xu-yv+i(xv+yu)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z y w y reservar las letras x, y, u, v para representar números reales. Una expresión de la forma $z=x+iy$ se interpreta como que z es el número complejo cuya parte real es x y cuya parte imaginaria es y. Se escribe $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ para representar las partes real e imaginaria de z. Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.

Observaciones

Acabamos de ver que $i^2=-1$ pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que $i=\sqrt{-1}$. Fíjate lo que ocurre si ponemos $i=\sqrt{-1}$ y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:

$$i^2=-1=i\,i=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$$

Luego $1=-1$. Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.

Naturalmente, el error procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ no puedes interpretar que -1 es el número real -1 (porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar -1 como el número complejo -1 (espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos *sin haberlas definido y dando por* *supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos.*

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ hay que definir qué significa $\sqrt{z}$ para $z \in \mathbb{C}$. Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que la igualdad $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, válida cuando $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es *definir* $i = \sqrt{-1}$ sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones) $i = \sqrt{-1}$ y a continuación se dice que los números de la forma $a + ib$ son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que $1 = -1$.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ compatible con la estructura algebraica

Al ampliar $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ ganamos mucho (te convencerás de eso en este curso) pero también perdemos algo. Te recuerdo que $\mathbb{R}$ tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en $\mathbb{C}$ no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en $\mathbb{C}$, pero no hay ninguna de ellas que sea *compatible con la estructura algebraica.* En efecto, si suponemos que $\leqslant$ es una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, como $i \neq 0$ habría de ser $0 < i^2 = -1$ (esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación $\leqslant$ no respetara el orden de $\mathbb{R}$). Pero también $0 < 1^2 = 1$, luego $0 < 1 + (-1) = 0$ y eso sí que es contradictorio.

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ ningún orden. Así que ya sabes: *¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos!* Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.

1.2.2. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*.

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el *conjugado* de z se define como:

$$\overline{z} = x - iy$$

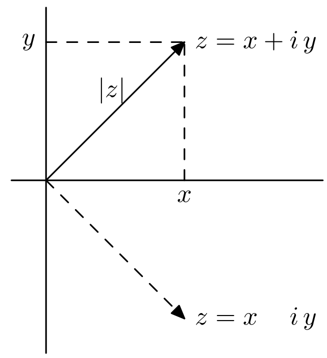


Figura 1.1: Representación de un número complejo

y el *módulo* o *valor absoluto* de z, se define como:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2+y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo x^2+y^2.

Geométricamente $\overline{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x,y) a $(0,0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x,y) (ver figura 1.1). La *distancia* entre dos números complejos z y w se define como $|z-w|$.

La representación gráfica de la suma puede verse en la figura 1.2. Dos números complejos $z=x+iy$ y $w=u+iv$ determinan un paralelogramo cuya diagonal es $z+w$.

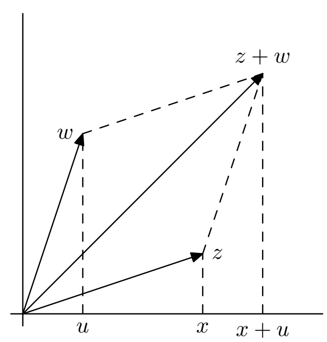


Figura 1.2: Suma de números complejos

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$ y $\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w}$.

Observa que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, se tiene que $z\bar{z} = x^2 + y^2$, y si $z \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}$$

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \tag{1.1}$$

Cuyo significado geométrico es evidente.

La igualdad $|z|^2 = z\bar{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para todos $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$\textbf{a)}\ \ |zw| = |z|\,|w| \quad \text{y} \quad \textbf{b)}\ \ |z + w| \leqslant |z| + |w|$$

a) Basta observar que $|zw|$ y $|z|\,|w|$ son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\bar{z}\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2\,|w|^2 = (|z|\,|w|)^2$$

b) Es suficiente probar que $|z + w|^2 \leqslant (|z| + |w|)^2$. En efecto:

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2\,|\operatorname{Re}(z\bar{w})| \leqslant \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad $|z + w| = |z| + |w|$ si, y sólo si, $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, esto es, si $z\bar{w} \in \mathbb{R}_o^+$, o lo que es lo mismo $z\bar{w} = \rho$ donde $\rho \in \mathbb{R}_o^+$. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente, multiplicando por w, como $z|w|^2 = \rho w$, esto es, $z = \lambda w$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}_o^+$ lo que quiere decir que z y w están en una misma semirrecta a partir del origen.

La desigualdad

$$\boxed{|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad (z, w \in \mathbb{C})} \tag{1.2}$$

se llama *desigualdad triangular* y se generaliza fácilmente por inducción a n sumandos.

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Hemos probado también que para $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se verifica que:

$$|z + w| = |z| + |w| \Longleftrightarrow z = \lambda w \ \text{ con } \lambda > 0 \tag{1.3}$$

$$|z + w| < |z| + |w| \Longleftrightarrow \frac{z}{w} \notin \mathbb{R}^+ \tag{1.4}$$

1.2.3. Forma polar de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z| (\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de *forma polar* o *forma módulo-argumento* cuya interpretación gráfica vemos en la figura 1.3.

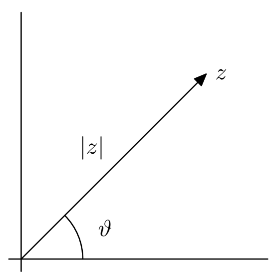


Figura 1.3: Forma polar de un número complejo

Es claro que, dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números reales $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z| (\cos t + i \operatorname{sen} t)$; cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo, z, se representa por $\operatorname{Arg}(z)$.

$$\boxed{\operatorname{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z| (\cos t + i \operatorname{sen} t)\}}$$

Observa que

$$s, t \in \operatorname{Arg}(z) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in \operatorname{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_o + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\operatorname{Arg}(z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$.

Es claro que dos números complejos no nulos, z, w, son iguales si, y sólo si, tienen el mismo módulo y $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y viene dado por

$$\boxed{\begin{aligned} &\arg(z) = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \quad \text{si } z \notin \mathbb{R}^- \\ &\arg(z) = \pi \quad \text{si } z \in \mathbb{R}^- \end{aligned}}$$

A dicho argumento se le llama *argumento principal* de z.

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} t < \pi/2$, se sigue que $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$. Si $z = t \in \mathbb{R}^-$ es evidente que $z = |t|(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$. Y para $z \notin \mathbb{R}^-$ se tiene:

$$\cos(\arg(z)) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2\operatorname{Re} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$

$$\operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{2\operatorname{tg}(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{2\operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2\operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene también dado por:

$$\boxed{\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi & \text{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}}$$

Esta última forma es la que se usa con más frecuencia para los cálculos.

Observaciones sobre la definición del argumento principal

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos desde $-\pi$ a π. En el semiplano superior de 0 a π y en el semiplano inferior de $-\pi$ a 0.

Fíjate que si tomas un número complejo $z = x + iy$ que esté situado en el tercer cuadrante $(x < 0, y < 0)$ y supones que y es próximo a 0, su argumento principal está próximo a $-\pi$, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante, $w = x + iv$ con $x < 0, v > 0$, y supones que v es próximo a 0, su argumento principal está próximo a π. Además, la distancia $|w - z| = |v - y| = v - y$ es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de $-\pi$ a π cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π, digamos $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, entonces dichos argumentos saltan de α a $\alpha + 2\pi$ cuando atravesamos la semirrecta de ecuación $(x, y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo $[0, 2\pi[$ (cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en *el eje real positivo*. Bien, sucede que *la extensión a* $\mathbb{C}$ de algunas funciones definidas en $\mathbb{R}^+$ (el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en $\mathbb{R}^+$ y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en $\mathbb{R}^-$ a perder la continuidad en $\mathbb{R}^+$.

Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$
$$w = |w|\,(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z|\,|w|\,(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = \\ &= |zw|\,[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\ &= |zw|\,(\cos(\vartheta + \varphi) + i\operatorname{sen}(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.* Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\arg(1+i) = \pi/4$, se sigue que $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Acabamos de ver que si $\vartheta \in \operatorname{Arg}(z)$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de *De Moivre*. Observa también que si $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$ entonces $-\varphi \in \operatorname{Arg}(1/z)$.

1.1 Fórmula de De Moivre. *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \operatorname{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$\boxed{z^n = |z|^n (\cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta) \qquad \left(z \in \mathbb{C}^*, \vartheta \in \operatorname{Arg}(z), n \in \mathbb{Z}\right)}$$

1.2.4. Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w| (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = |z| (\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k de la forma $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm$$

Es decir, k y q dan el mismo resto al dividirlos por n. Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

De entre todas las raíces n–ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la *raíz n-ésima principal*, que está definida por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

Hemos obtenido que las raíces n–ésimas de z vienen dadas por

$$\boxed{z_k = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0,1,2,\dots,n-1}$$

Observa que definiendo $u = \cos(2\pi/n) + i\operatorname{sen}(2\pi/n)$, los números $u^0 = 1$, u, $u^2,\dots,u^{n-1}$ son las raíces n–ésimas de la unidad. Podemos escribir las raíces n–ésimas de z en la forma $z_k = z_0 u^k$. Como multiplicar por u es un giro de amplitud $2\pi/n$, deducimos que las n raíces de z se obtienen girando la raíz n–ésima principal, z_0, con giros sucesivos de amplitud $2\pi/n$. Es decir, si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados (ver figura 1.4).

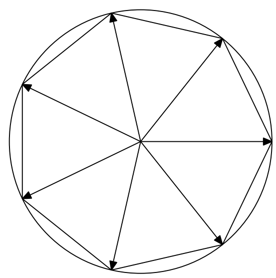


Figura 1.4: Raíces séptimas de la unidad

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas *principales* de z y de w sea igual a la raíz n-ésima *principal* de zw. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es *una* raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal $\sqrt[n]{zw}$. Veamos cuándo se verifica la igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

Como los números $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$ y $\sqrt[n]{zw}$ tienen igual módulo, $\sqrt[n]{|zw|}$, la igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ equivale a que para algún entero k se verifique que

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. Como $n \geqslant 2$ y $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant 2\pi$, deducimos que ha de ser $k = 0$ (pues, en otro caso, $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$ y no puede darse la igualdad). Luego, debe ocurrir que $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ lo que equivale a que $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$. Hemos probado que

$$\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \Longleftrightarrow -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$$

Por ejemplo, si los números z y w están en el semiplano de la derecha, es decir, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; por tanto $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw)$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

En el caso en que $n=2$, $z=w=-1$, tenemos que

$$\arg(-1)+\arg(-1)=2\pi\neq 0=\arg(1)=\arg\big((-1)(-1)\big)$$

y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1\neq 1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-1$ es una raíz cuadrada de $1=(-1)(-1)$ pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

1.2.5. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{1}$ Calcula la parte real e imaginaria de $\dfrac{\overline{z}}{1+z^2}$ donde $z\in\mathbb{C}$.

Solución.
Todo lo que hay que hacer es realizar las operaciones indicadas. Pongamos para ello $z=x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Tenemos que

$$\frac{\overline{z}}{1+z^2}=\frac{x-iy}{1+(x+iy)^2}=\frac{x-iy}{1+x^2-y^2+2xyi}=\frac{(x-iy)(1+x^2-y^2-2xyi)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=$$
$$=\frac{x+x^3-3xy^2+i(-y-3x^2y+y^3)}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}=\frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}+i\frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

Luego

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{z}}{1+z^2}\right)=\frac{x+x^3-3xy^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2},\qquad \operatorname{Im}\left(\frac{\overline{z}}{1+z^2}\right)=\frac{-y-3x^2y+y^3}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{2}$ Calcula $\left|\dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$.

Solución.
Como lo que nos piden es el módulo no es preciso realizar las operaciones indicadas. Basta tener en cuenta que el módulo de un producto es el producto de los módulos y, por tanto, el módulo de un cociente es el cociente de los módulos. En consecuencia:

$$\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|=\frac{\left|2+i\sqrt{5}\right|\left|1+i\sqrt{3}\right|^3}{\left|\sqrt{5}+i\sqrt{3}\right|}=6\sqrt{2}$$

☺

Ejercicio resuelto 3 Calcula los números complejos z tales que $w=\dfrac{2z-i}{2+iz}$ es

a) Un número real;

b) Un número imaginario puro.

Solución.
Pongamos $z=x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Tenemos que

$$w=\frac{2z-i}{2+iz}=\frac{2x+i(2y-1)}{2-y+ix}=\frac{(2x+i(2y-1))(2-y-ix)}{(2-y)^2+x^2}=\frac{3x+i(-2x^2-2y^2+5y-2)}{(2-y)^2+x^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si

$$-2x^2-2y^2+5y-2=0 \iff x^2+(y-5/4)^2=9/16$$

Es decir, z está en la circunferencia de centro $(0,5/4)$ y radio $3/4$.

Análogamente, w es imaginario puro si, y sólo si, $x=0$, es decir, z está en el eje imaginario. ☺

Ejercicio resuelto 4 Calcula los números complejos z tales que $w=\dfrac{z-1-i}{z+1+i}$

a) Es un número real;

b) Tiene módulo 1.

Solución.
Pongamos $z=x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Tenemos que

$$w=\frac{z-1-i}{z+1+i}=\frac{x-1+i(y-1)}{x+1+i(y+1)}=\frac{\big(x-1+i(y-1)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2-2+i(2y-2x)}{(x+1)^2+(y+1)^2}$$

Por tanto, w es real si, y sólo si, $y=x$, es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes primero y tercero.

Es claro que $|w|=1$ si, y sólo si

$$|z-1-i|=|z+1+i| \iff (x-1)^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \iff x+y=0$$

Es decir, z está en la bisectriz de los cuadrantes segundo y cuarto. ☺

Ejercicio resuelto 5 Comprueba que el argumento principal de $z=x+iy\neq 0$ viene dado por

$$\vartheta=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}(y/x)-\pi & \text{si } y<0,\ x<0\\ -\pi/2 & \text{si } y\leqslant 0,\ x=0\\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) & \text{si } x>0\\ \pi/2 & \text{si } y>0,\ x=0\\ \operatorname{arc\,tg}(y/x)+\pi & \text{si } y\geqslant 0,\ x<0\end{cases}$$

Solución.

Teniendo en cuenta que para $t<0$ es $-\pi/2<\operatorname{arc\,tg} t<0$ y para $0\leqslant t$ es $0\leqslant \operatorname{arc\,tg} t<\pi/2$, se sigue que el número ϑ definido por las igualdades anteriores verifica que $-\pi<\vartheta\leqslant\pi$. Por tanto, para probar que $\vartheta=\arg(z)$ bastará que comprobemos la igualdad $z=|z|(\cos\vartheta+i\operatorname{sen}\vartheta)$, es decir, las igualdades $x=|z|\cos\vartheta$, $y=|z|\operatorname{sen}\vartheta$.

Para $\vartheta=\pi$, $\vartheta=\pi/2$ y $\vartheta=-\pi/2$ dichas igualdades son evidentes.

Consideremos $x>0$ en cuyo caso $\vartheta=\operatorname{arc\,tg}(y/x)$. En este caso, como $-\pi/2<\vartheta<\pi/2$, tenemos que $\operatorname{tg}\vartheta=y/x$ y deducimos

$$\frac{1}{\cos^2\vartheta}=1+\operatorname{tg}^2\vartheta=1+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2}\Longrightarrow x^2=(x^2+y^2)\cos^2\vartheta\Longrightarrow x=|z|\cos\vartheta$$

donde, en la última implicación, hemos tenido en cuenta que $x>0$ y $\cos\vartheta>0$. Deducimos también que

$$y=x\operatorname{tg}\vartheta=\frac{x}{\cos\vartheta}\operatorname{sen}\vartheta=|z|\operatorname{sen}\vartheta$$

Consideremos $x<0$ e $y>0$. Tenemos que $\pi/2<\vartheta=\operatorname{arc\,tg}(y/x)+\pi<\pi$, por lo que $-\pi/2<\vartheta-\pi<0$, y deducimos $\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}(\vartheta-\pi)=y/x$. Razonando como antes obtenemos que $x^2=(x^2+y^2)\cos^2\vartheta$. Como $x<0$ y $\cos\vartheta<0$, se sigue que $x=|z|\cos\vartheta$. De esta igualdad deducimos, al igual que antes, que $y=|z|\operatorname{sen}\vartheta$.

Consideremos $x<0$ e $y<0$. Tenemos que $-\pi<\vartheta=\operatorname{arc\,tg}(y/x)-\pi<-\pi/2$, por lo que $0<\vartheta+\pi<\pi/2$, y deducimos $\operatorname{tg}\vartheta=\operatorname{tg}(\vartheta+\pi)=y/x$. Razonando como en el caso anterior volvemos a obtener las igualdades $x=|z|\cos\vartheta$, $y=|z|\operatorname{sen}\vartheta$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{6}$ Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)}\ -1+i\quad \text{b)}\ \frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\quad \text{c)}\ \frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$$

Solución.

a) Tenemos que $\arg(-1+i)=\operatorname{arc\,tg}(-1)+\pi=3\pi/4$, por lo que

$$-1+i=\sqrt{2}\big(\cos(3\pi/4)+i\operatorname{sen}(3\pi/4)\big)$$

b) Tenemos que

$$\arg(-\sqrt{3}+i)=\operatorname{arc\,tg}(-1/\sqrt{3})+\pi=-\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{3})+\pi=-\pi/6+\pi=5\pi/6$$
$$\arg(1+i)=\operatorname{arc\,tg}(1)=\pi/4\Longrightarrow\arg\left(\frac{1}{1+i}\right)=-\pi/4$$

deducimos que $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}\in\operatorname{Arg}\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)$. Por tanto

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}=\sqrt{2}\big(\cos(7\pi/12)+i\operatorname{sen}(7\pi/12)\big)$$

c) Tenemos que $\arg(-1+i\sqrt{3}) = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})+\pi = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3})+\pi = -\pi/3+\pi = 2\pi/3$, por lo que $\arg\left(\dfrac{1}{-1+i\sqrt{3}}\right) = -2\pi/3$. Por tanto

$$\frac{1}{-1+i\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\big(\cos(-2\pi/3)+i\operatorname{sen}(-2\pi/3)\big)$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{7}$ Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$.

Solución.
Sabemos que $\arg z+\arg w \in \operatorname{Arg}(zw)$; además $-2\pi < \arg z+\arg w \leqslant 2\pi$. Tenemos las siguientes posibilidades:

$$-2\pi < \arg z+\arg w \leqslant -\pi \implies 0 < \arg z+\arg w+2\pi \leqslant \pi \implies \arg(zw) = \arg z+\arg w+2\pi$$

$$-\pi < \arg z+\arg w \leqslant \pi \implies \arg(zw) = \arg z+\arg w$$

$$\pi < \arg z+\arg w \leqslant 2\pi \implies -\pi < \arg z+\arg w-2\pi \leqslant 0 \implies \arg(zw) = \arg z+\arg w-2\pi$$

Para calcular $\arg\left(\dfrac{z}{w}\right)$ se procede de forma análoga teniendo en cuenta ahora que $\arg z-\arg w \in \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z}{w}\right)$ y que $-2\pi < \arg z-\arg w < 2\pi$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{8}$ Calcula los números complejos z tales que $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$

a) Tiene argumento principal igual a $\pi/2$;

b) Tiene argumento principal igual a $-\pi/2$.

Solución.
Pongamos $z = x+iy$ con $x,y\in\mathbb{R}$. Como

$$\frac{2z-1}{z-2} = \frac{2x-1+2yi}{x-2+iy} = \frac{(2x-1+2yi)(x-2-iy)}{(x-2)^2+y^2} = \frac{2x^2+2y^2-5x+2-3yi}{(x-2)^2+y^2}$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ si, y sólo si, $2x^2+2y^2-5x+2 = 0$ e $y < 0$. Como

$$2x^2+2y^2-5x+2 = 0 \iff (x-5/4)^2+y^2 = 9/16$$

deducimos que $\arg w = \pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4,0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano superior. También deducimos que $\arg w = -\pi/2$ cuando z está en la semicircunferencia de centro $(5/4,0)$ y radio $3/4$ que está contenida en el semiplano inferior. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{9}$ Resuelve la ecuación cuadrática $az^2+bz+c = 0$ donde a,b,c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

Solución.
Tenemos que

$$\begin{aligned}
az^2+bz+c=0 \iff z^2+\frac{b}{a}z+\frac{c}{a}=0 \iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0 \\
\iff \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \\
\iff \left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right]=0 \\
\iff \begin{cases} z=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ z=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}
\end{aligned}$$

Las dos soluciones obtenidas suelen abreviarse en la forma

$$az^2+bz+c=0 \iff z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Observa que hemos seguido el mismo procedimiento que en el caso real. En general, para resolver ecuaciones con números complejos no es buena estrategia separar la ecuación en su parte real y su parte imaginaria y resolver éstas por separado, sino que debes trabajar con la variable compleja z. No olvides que con los números complejos puedes hacer las mismas operaciones que con los números reales y algunas más que no siempre puedes hacer con los números reales, como extraer raíces y otras que pronto estudiaremos.

Ejercicio resuelto $\boxed{10}$ Calcula las soluciones de la ecuación $z^4+(1+i)z^2+5i=0$.

Ejercicio resuelto $\boxed{11}$ Prueba las desigualdades:

a) $\big||z|-|w|\big| \leqslant |z-w|$

b) $|z+w| \geqslant \dfrac{1}{2}(|z|+|w|)\left|\dfrac{z}{|z|}+\dfrac{w}{|w|}\right|$

donde z,w son números complejos no nulos. Estudia también cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.

Solución. Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

Ejercicio resuelto $\boxed{12}$ Expresa en forma binómica los números

$$(1+i)^{25}, \quad (\sqrt{3}+i)^{37}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i}\right)^{24}$$

Ejercicio resuelto 13 Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, y $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$. Dado un número entero, $m \in \mathbb{Z}$, calcula el valor de las expresiones:

a) $1 + w^m + w^{2m} + \cdots + w^{(n-1)m}$;

b) $1 - w^m + w^{2m} - \cdots + (-1)^{n-1} w^{(n-1)m}$.

Ejercicio resuelto 14 Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π. Prueba las igualdades

$$\text{a)} \quad 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{b)} \quad \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Solución. Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, podemos calcular $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

Ejercicio resuelto 15 Dados dos números complejos distintos $a, b \in \mathbb{C}$, justifica que $\frac{z-a}{z-b}$ es real si, y sólo si, z está en la recta que pasa por a y por b; y es real negativo si, y sólo si, z está en el segmento que une a con b.

Ejercicio resuelto 16 Dados dos números complejos a, b y un número positivo $\rho \neq 1$, justifica que el conjunto

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z-a}{z-b} \right| = \rho \right\}$$

representa una circunferencia en el plano cuyo centro y radio debes calcular.

Ejercicio resuelto 17 a) Sea $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Prueba que z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

b) Deduce de lo anterior que si el baricentro y el circuncentro de un triángulo coinciden, dicho triángulo debe ser equilátero.

Ejercicio resuelto 18 Indica condiciones que deben cumplir los números complejos a, b y c para que las raíces de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ formen con el origen un triángulo equilátero.

1.2.6. Ejercicios propuestos

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en forma binómica.

i) $(7-2i)(5+3i)$ ii) $(i-1)^3$ iii) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ iv) $\dfrac{3+i}{\overline{2+i}}$

v) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$ vi) $(1+i)^{-2}$ vii) $\dfrac{1+2i}{2-i}$ viii) $i^2(1+i)^3$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

a) $f_1(z)=\overline{z}^2$ b) $f_2(z)=z^3$ c) $f_3(z)=\dfrac{1}{z}$ d) $f_4(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ e) $f_5(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

3. Calcula las siguientes cantidades.

a) $|(1+i)(2-i)|$ b) $\left|\dfrac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right|$ c) $\left|(1+i)^{20}\right|$ d) $\left|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)\right|$

4. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

a) $-\sqrt{3}-i$ b) $-\sqrt{3}+i$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$ d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

6. Expresa los siguientes números complejos en forma binómica:

a) $(-1+i\sqrt{3})^{11}$ b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$ d) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

7. Supuesto que $|z|=1$ y $z\neq\pm1$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=\begin{cases}\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z>0\\ -\pi/2 & \text{si } \operatorname{Im} z<0\end{cases}$$

8. Sea $z=x+iy$. Supuesto que $|z|=1$, $z\neq1$, $z\neq-i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right)=\begin{cases}\pi/4 & \text{si } 1-x+y>0\\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y<0\end{cases}$$

9. Representa gráficamente el conjunto de números complejos que verifican la igualdad $|z| = \pi + \arg z$.

10. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1+i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1+i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}\,i\,z - 6i = 0$$

11. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

12. Dados dos números complejos a y b, calcula el mínimo valor para $z \in \mathbb{C}$ de la cantidad $|z-a|^2 + |z-b|^2$.

Sugerencia: La igualdad del paralelogramo puede ser útil.

13. Prueba que $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1$ si, y sólo si, $|z| < 1$ y $|a| < 1$ o bien $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

14. Justifica que si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son números complejos de módulo 1 y tales que

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = n$$

entonces se verifica que todos son iguales $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$.

15. Estudia para cada una de las igualdades siguientes si hay algún número complejo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ que la verifica:

$$\text{(a) } |z^3 + z^2 + 1| = 3 \quad \text{(b) } |z^4 - 2z - i| = 4 \quad \text{(c) } |z^6 + z^3 + 2| = 4 + |4 + 4z^2|$$

16. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $\operatorname{sen} 3\varphi = 3\operatorname{sen}\varphi - 4\operatorname{sen}^3\varphi$;

b) $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$;

c) $\operatorname{sen} 5\varphi = 5\operatorname{sen}\varphi - 20\operatorname{sen}^3\varphi + 16\operatorname{sen}^5\varphi$.

17. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$|z-3| \leqslant 3; \quad 2 < |z-i| \leqslant 3; \quad |\arg z| < \pi/6; \quad |z-i| + |z+i| = 4$$
$$|z-1| = |z-2i|; \quad \left|\frac{z-i}{z+2i}\right| = 2; \quad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \quad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1$$

18. Prueba que

$$|z| + |w| = \left|\frac{z+w}{2} - \sqrt{zw}\right| + \left|\frac{z+w}{2} + \sqrt{zw}\right|$$

Sugerencia: la identidad del paralelogramo puede ser útil.

19. a) Prueba por inducción que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k+1}^{n} \operatorname{Re}(z_k\overline{z_j})$$

b) Deduce, a partir de esta igualdad, la identidad de Lagrange

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right) - \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} |z_k\overline{w_j} - z_j\overline{w_k}|^2$$

c) Deduce, a partir de esta igualdad, la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^2\right)$$

20. Encuentra los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

21. Resuelve la ecuación $(z-1)^n = (z+1)^n$, donde $z\in\mathbb{C}$ y $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

22. Prueba que tres números complejos a, b, c son los vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, verifican la igualdad $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

23. Indica condiciones que deben cumplir los números complejos a y b para que las raíces de la ecuación $z^3+az^2+bz+c=0$ formen un triángulo equilátero.

24. Sean A, B, C, D números reales tales que $A^2+B^2+C^2>D^2$. Prueba que la ecuación:

$$A(z+\overline{z}) + iB(\overline{z}-z) + C(z\overline{z}-1) + D(z\overline{z}+1) = 0$$

en el caso de que sea $C+D=0$, representa una recta en el plano; mientras que si $C+D\neq 0$, representa una circunferencia cuyo centro y radio se calcularán.

1.3. Topología del plano complejo

Como conjunto, $\mathbb{C}$, no es otra cosa que $\mathbb{R}^2$, por tanto, dar una topología en $\mathbb{C}$ es lo mismo que dar una topología en $\mathbb{R}^2$. Pues bien, consideraremos en $\mathbb{C}$ la topología usual en $\mathbb{R}^2$, es decir, la asociada a la norma euclídea. Escribiendo la norma en términos de $\mathbb{C}$, ésta viene dada por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Mientras que la distancia euclídea en $\mathbb{C}$ viene dada por $(z,w) \mapsto |z-w|\ \ z,w \in \mathbb{C}$.

En $\mathbb{C}$ suele usarse la siguiente terminología. Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$$

se llama *disco abierto* de centro a y radio r. Observa que un disco abierto no puede ser vacío. Por convenio pondremos $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r \geqslant 0$, el conjunto

$$\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leqslant r\}$$

se llama *disco cerrado* de centro a y radio r. Observa que $\overline{D}(a,0) = \{a\}$.

Representaremos por $C(a,r)^* = \{z \in C : |z-a| = r\}$ la circunferencia de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Se dice que un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ está *acotado* si está contenido en algún disco centrado en el origen, es decir, si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|z| \leqslant M$ para todo $z \in A$.

Un conjunto abierto no vacío con la propiedad de que dos puntos cualesquiera del mismo pueden unirse por una curva sin salirse del conjunto se llama un *dominio*. Una definición equivalente aunque menos intuitiva de dominio es la siguiente. Un dominio es un conjunto abierto no vacío, Ω, cuya única descomposición en la forma $\Omega = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos, es la trivial, es decir, $\{A,B\} = \{\emptyset,\Omega\}$. Como ya debes saber, en $\mathbb{C}$ todo conjunto abierto no vacío es unión numerable de dominios disjuntos (sus componentes conexas).

Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ se llama *compacto* si de todo recubrimiento de K por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito. Ésta es la definición topológica de compacidad aunque para nosotros serán más útiles las siguientes caracterizaciones equivalentes.

1.2 Teorema. *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$. Equivalen:*

(a) *K es compacto (definición topológica).*

(b) *Todo subconjunto infinito de puntos de K tiene algún punto de acumulación en K.*

(c) *Toda sucesión de puntos de K tiene alguna sucesión parcial que converge a un punto de K.*

(d) *K es cerrado y acotado.*

1.3.1. Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. Como de costumbre, representaremos por $\{z_n\}$ la sucesión dada por $n \mapsto z_n$ donde $z_n \in \mathbb{C}$. La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales.

1.3 Definición. Se dice que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es *convergente* si hay un número complejo z con la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|z_n - z| < \varepsilon$. En tal caso dicho número z es único y escribimos $\operatorname{lím}\{z_n\} = z$ o $\{z_n\} \to z$ y se dice que z es el límite de la sucesión $\{z_n\}$.

Observa que $\{z_n\} \to z$ si, y sólo si, $|z_n - z| \to 0$. Teniendo en cuenta la desigualdad (1.1) tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array}\right\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \to 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \to 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \to 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

1.4 Proposición. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además en dicho caso*

$$\operatorname{lím}\{z_n\} = z \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z = \operatorname{lím}\{\operatorname{Re} z_n\} \quad y \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{lím}\{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión tal que para todo $K > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant n_0$ entonces $|z_n| \geqslant K$. En dicho caso diremos que la sucesión $\{z_n\}$ es divergente o que *diverge* y escribiremos $\{z_n\} \to \infty$. Observa que $\{z_n\} \to \infty$ es lo mismo que $\{|z_n|\} \to +\infty$.

Los resultados que conoces para sucesiones de números reales en los que no interviene el orden son también válidos para sucesiones de números complejos. Destacamos entre ellos los más importantes.

1.5 Álgebra de límites.

- *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$ *y* $\{z_n w_n\} \to zw$. *Además, si* $z_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $z \neq 0$, *entonces* $\{1/z_n\} \to 1/z$.
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está acotada entonces* $\{z_n + w_n\}$ *diverge.*
- *Si* $\{z_n\}$ *diverge y* $\{w_n\}$ *está separada de* 0*, esto es, existe* $\rho > 0$ *y* $n_0 \in \mathbb{N}$ *de forma que para* $n \geqslant n_0$ *se cumple* $|w_n| \geqslant \rho$*, entonces* $\{z_n w_n\}$ *diverge.*

1.6 Definición. Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ se dice que es de Cauchy si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant n_0$ entonces $|z_p - z_q| < \varepsilon$

Repitiendo el mismo argumento anterior, deducimos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy. Puesto que $\mathbb{R}$ es completo, ser de Cauchy equivale a ser convergente, luego si $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son de Cauchy convergen y, por tanto, $\{z_n\}$ es convergente.

1.7 Teorema de complitud de $\mathbb{C}$. *Toda sucesión de Cauchy de números complejos es convergente.*

Recuerda que una *sucesión parcial* de una sucesión $\{z_n\}$ es cualquier sucesión de la forma $\{z_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una aplicación estrictamente creciente. Si $\{z_n\} \to z$, entonces cualquier sucesión parcial de $\{z_n\}$ también converge a z.

Teniendo en cuenta que $\{z_n\}$ es una sucesión acotada si, y sólo si, $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son acotadas y que toda sucesión acotada de números reales tiene una sucesión parcial convergente, se deduce fácilmente el siguiente resultado.

1.8 Teorema de Bolzano–Weierstrass. *Toda sucesión acotada de números complejos tiene alguna sucesión parcial convergente.*

1.3.2. Series de números complejos

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1,\ S_2 = z_1 + z_2,\ S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots,\ S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n, \dots$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series.* En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente". Si una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el límite de la serie que suele llamarse suma de la serie. Naturalmente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k$$

Como caso particular de la proposición 1.4, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series

$$\operatorname{Re}\Bigl(\sum_{n\geqslant 1} z_n\Bigr) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\Bigl(\sum_{n\geqslant 1} z_n\Bigr) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes.

Conviene que recuerdes la condición básica *necesaria* para la convergencia de una serie. Si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum\limits_{j=1}^{n} z_j - \sum\limits_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

1.9 Proposición. *Condición necesaria para que la serie* $\sum z_n$ *converja es que* $\{z_n\} \to 0$.

Para las series es posible definir otro tipo de convergencia, la *convergencia absoluta.*

1.10 Definición. Se dice que una serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ *converge absolutamente* si la serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} |z_n|$ es convergente.

1.11 Proposición. *Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

Demostración. Pongamos $S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j$, $A_n = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ y supongamos que la sucesión $\{A_n\}$ es convergente, es decir, $\sum z_n$ es absolutamente convergente. Dado $\varepsilon > 0$, la condición de Cauchy para $\{A_n\}$ nos dice que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|A_q - A_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon \quad \text{para todos } p,q \in \mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_0$$

Deducimos que para todos $p,q \in \mathbb{N}$ tales que $q > p \geqslant n_o$ se verifica que

$$\left|S_q - S_p\right| = \left|z_{p+1} + z_{p+2} + \cdots + z_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |z_k| < \varepsilon$$

Lo que prueba que la sucesión $\{S_n\}$, es decir, la serie $\sum z_n$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. $\boxed{\checkmark}$

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia como se pone de manifiesto en el siguiente resultado que no demostraremos.

1.12 Teorema de Riemann. *La serie $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ converge absolutamente si, y sólo si, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} z_{\pi(n)}$ es convergente. Además, en tal caso se verifica que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$$

Naturalmente, puedes usar los criterios de convergencia para series de números reales positivos, que ya debes conocer, para estudiar la convergencia absoluta de una serie de números complejos. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es difícil. Pues bien, los criterios que vamos a estudiar a continuación proporcionan información sobre la convergencia no absoluta. Probaremos, en primer lugar, una igualdad de la que se deducen con facilidad dichos criterios.

1.13 Proposición. (Suma por partes) *Dadas dos sucesiones de números complejos* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*, pongamos* $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$*. Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica entonces que:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1} \tag{1.5}$$

Demostración. Pongamos $A_0 = 0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ es $a_k = A_k - A_{k-1}$, por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}\end{aligned}$$

$\boxed{\checkmark}$

1.14 Criterio general de Dirichlet. *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones de números complejos y supongamos que:*

i) La serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ *tiene sumas parciales acotadas, es decir, existe un número* $M > 0$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *es* $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant M$.

ii) La serie $\sum_{n \geqslant 1} |b_n - b_{n+1}|$ *es convergente.*

iii) $\{b_n\} \to 0$.

Se verifica entonces que la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n b_n$ *es convergente.*

Demostración. Sea $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Puesto que

$$|A_n| |b_n - b_{n+1}| \leqslant M |b_n - b_{n+1}|$$

deducimos, por el criterio de comparación que la serie $\sum_{n\geqslant 1} A_n(b_n - b_{n+1})$ converge absolutamente y, por tanto, es convergente, es decir, la sucesión $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente. Como, además, la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ converge a cero por ser producto de una sucesión acotada por otra convergente a cero, deducimos, en virtud de la igualdad (1.5), que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente. $\boxed{\checkmark}$

1.15 Criterio general de Abel. *Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números complejos y supongamos que:*

i) La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) La serie $\sum_{n\geqslant 1} |b_n - b_{n+1}|$ es convergente.

Se verifica entonces que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente.

Demostración. La hipótesis *i)* nos dice que la sucesión $\{A_n\} = \sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente; en particular está acotada, por lo que, al igual que antes, deducimos que $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es una sucesión convergente. Además, *ii)* implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1}(b_n - b_{n+1})$ es convergente y, como dicha serie es la sucesión $\left\{\sum_{j=1}^{n}(b_j - b_{j+1})\right\} = \{b_1 - b_{n+1}\}$, obtenemos que $\{b_n\}$ es convergente. Resulta así que la sucesión $\{A_n b_{n+1}\}$ converge por ser producto de sucesiones convergentes y, en virtud de la igualdad (1.5), deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente. $\boxed{\checkmark}$

1.16 Proposición. *Si $\{b_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y acotada, se verifica que la serie* $\sum_{n\geqslant 1}|b_n - b_{n+1}|$ *es convergente.*

Demostración. En efecto, basta tener en cuenta que $\{b_n\}$ es convergente y que

$$\sum_{j=1}^{n}|b_j - b_{j+1}| = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(b_j - b_{j+1}) = b_1 - b_{n+1}, & \text{si } \{b_n\} \text{ es decreciente;} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(b_{j+1} - b_j) = b_{n+1} - b_1, & \text{si } \{b_n\} \text{ es creciente.} \end{cases}$$

$\boxed{\checkmark}$

La proposition anterior permite particularizar los criterios de Dirichlet y de Abel de la forma que sigue.

1.17 Criterio particular de Dirichlet. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos, $\{b_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que:*

i) La serie $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ *tiene sumas parciales acotadas, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ es* $\left|a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right| \leqslant M$.

ii) $\{b_n\}$ *es monótona y* $\{b_n\} \to 0$.

Se verifica entonces que la serie $\sum_{n\geqslant 1}a_n b_n$ *es convergente.*

1.18 Criterio particular de Abel. *Sean $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos, $\{b_n\}$ una sucesión de números reales y supongamos que:*

i) La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

ii) $\{b_n\}$ es monótona y acotada.

Se verifica entonces que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n b_n$ es convergente.

1.3.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{19}$ Sea $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos y para $n\in\mathbb{N}$ sea $\varphi_n\in\operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\}\to\varphi$ y $\{|z_n|\}\to\rho$. Justifica que $\{z_n\}\to\rho(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$.

Ejercicio resuelto $\boxed{20}$ Calcula el límite de la sucesión $z_n=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}+i\frac{\pi}{3}}{n}\right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n=|z_n|(\cos\varphi_n+i\operatorname{sen}\varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

Ejercicio resuelto $\boxed{21}$ Prueba que la sucesión $\{z_n\}$ dada, para todo $n\in\mathbb{N}$, por:

$$z_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{i}{k}\right),$$

tiene como valores de adherencia todos los puntos de una cierta circunferencia.

Recuerda que, dada una sucesión de números complejos, $\{z_n\}$, se dice que un número complejo, w, es un *valor de adherencia* de dicha sucesión, si hay alguna sucesión parcial, $\{z_{\sigma(n)}\}$, que converge a w.

Ejercicio resuelto $\boxed{22}$ La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} z_n$ tiene la propiedad de que las cuatro partes suyas formadas por los términos pertenecientes a un mismo cuadrante cerrado del plano convergen. Demuéstrese que dicha serie es absolutamente convergente.

Ejercicio resuelto $\boxed{23}$ **Serie geométrica.** Dado $z\in\mathbb{C}$, estudia la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$.

Ejercicio resuelto $\boxed{24}$ Estudia la convergencia de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}+i\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n}\frac{1}{n}$.

1.3.4. Ejercicios propuestos

25. Estudia la convergencia de las sucesiones:

i) $z_n=\sqrt[n]{n}+i\,n\,a^n \quad (a\in\mathbb{R},|a|<1)$ ii) $z_n=\dfrac{2^n}{n}+\dfrac{i\,n}{2^n}$

iii) $z_n=\sqrt[n]{a}+i\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} \quad (a>0)$ iv) $z_n=n\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}+5\,i\cos\dfrac{1}{n}$

v) $z_n=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$ vi) $z_n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

26. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos que converge a un número complejo no nulo z, y sea $\varphi\in\operatorname{Arg}(z)$. Prueba que hay una sucesión $\{\varphi_n\}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ es $\varphi_n\in\operatorname{Arg}(z_n)$ y $\{\varphi_n\}\to\varphi$.

Sugerencia: Considera en primer lugar el caso en que $z=1$.

27. Calcula el límite de la sucesión $z_n=n\left(\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2n}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}\right)-1\right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$ es bien conocido.

28. Sea $z\in\mathbb{C}$, con $|z|=1$, $z\neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π, las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

29. Prueba que $\{z_n\}\to\infty$ si, y sólo si, $\{z_n\}$ no tiene ningún valor de adherencia en $\mathbb{C}$.

30. Estudia la convergencia de las series:

i) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(1+i)^n}$ ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\operatorname{sen} n}{n}$

iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos n+i\operatorname{sen} n}{n^2}$ iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$

v) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\cos\frac{\pi}{n^2}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{n^2}\right)$ vi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(in)^n}$

vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n+7}$ viii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

31. Sea $\rho\in\mathbb{R}$ con $|\rho|<1$ y $\vartheta\in\mathbb{R}$. Calcula los límites $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos(n\vartheta)$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\operatorname{sen}(n\vartheta)$.

32. Prueba que si la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n$ converge y hay un número $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|\arg(z_n)|<\alpha$, entonces dicha serie converge absolutamente.

33. Supón que las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}z_n^2$ son convergentes y que $\operatorname{Re}(z_n)\geqslant 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Prueba que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}|z_n|^2$ es convergente.

1.4. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ con valores en $\mathbb{R}^2$ cuando en $\mathbb{R}^2$ consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A\subset\mathbb{C}$, a toda función compleja $f:A\to\mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u=\operatorname{Re} f$ "*parte real de* f" y la función $v=\operatorname{Im} f$ "*parte imaginaria* de f" definidas para todo $(x,y)=x+iy\in A$ por:

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy),\qquad v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$$

Naturalmente, $f(z)=\operatorname{Re} f(z)+i\operatorname{Im} f(z)$.

La *función conjugada* de f es la función $\overline{f}$ dada por $\overline{f}(z)=\operatorname{Re} f(z)-i\operatorname{Im} f(z)$. La *función módulo* de f es la función $|f|$ dada por $|f|(z)=|f(z)|$.

1.4.1. Continuidad y límite funcional

1.19 Definición. Se dice que la función $f : A \to \mathbb{C}$ es *continua* en un punto $a \in A$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Usando una vez más las desigualdades

$$\text{máx}\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

se prueba fácilmente que una función compleja f es continua en a si, y sólo si, las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en a.

1.20 Definición. Dado un punto a de acumulación de A, se dice $f : A \to \mathbb{C}$ tiene *límite* en a si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = L$.

Usando las desigualdades anteriores y llamando $a = \alpha + i\beta$, $L = \lambda + i\mu$ tenemos

$$\lim_{z \to a} f(z) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (\alpha,\beta)} \operatorname{Re} f(x,y) = \lambda \\ \lim\limits_{(x,y) \to (\alpha,\beta)} \operatorname{Im} f(x,y) = \mu \end{cases}$$

Se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en un punto a de acumulación de A si para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} z \in A \\ 0 < |z-a| < delta \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(z)| > M$$

Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

Si A no está acotado, se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite en infinito si hay un número complejo $L \in \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z) - L| < \varepsilon$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = L$.

Si A no está acotado, se dice que $f : A \to \mathbb{C}$ tiene límite infinito en infinito si para todo $M > 0$ existe $K > 0$ tal que si $z \in A$ y $|z| > K$ entonces $|f(z)| > M$. Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$.

Observa que hay una completa analogía formal entre las definiciones anteriores y las correspondientes para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de cálculo de límites conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

El siguiente resultado, aunque elemental, es importante.

1.21 Continuidad del argumento principal. *La función argumento principal es continua en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y es discontinua en $\mathbb{R}^-$.*

Demostración. Como el conjunto $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ es abierto y la restricción del argumento principal a dicho conjunto viene dado por

$$\arg z = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z+|z|}$$

deducimos, teniendo en cuenta el carácter local de la continuidad, que la función arcotangente es continua y que $\operatorname{Re} z+|z|>0$ para $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, que el argumento principal es continuo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$.

Sea $a\in\mathbb{R}^-$ y pongamos $z_n=a+i\dfrac{(-1)^n}{n}$. Claramente $\{z_n\}\to a$. Como

$$\arg(z_{2n})=\operatorname{arc\,tg}(1/na)+\pi\longrightarrow\pi$$
$$\arg(z_{2n-1})=\operatorname{arc\,tg}(-1/na)-\pi\longrightarrow-\pi$$

Concluimos que la sucesión $\{\arg(z_n)\}$ no converge y por tanto el argumento principal es discontinuo en a.

De hecho, puedes probar fácilmente que si $a\in\mathbb{R}^-$ se tiene

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\arg(a+it)=\pi \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}}\arg(a+it)=-\pi$$

$\boxed{\checkmark}$

1.4.2. Derivada de una función compleja

1.22 Definición. Sea $f:A\subseteq\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ y $a\in A\cap A'$. Se dice que f es derivable en a cuando existe el límite

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\in\mathbb{C}$$

el valor de dicho límite se llama *derivada de f en el punto a*, y se representa por $f'(a)$.

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más restrictiva que la derivabilidad para funciones reales.

Casos Particulares

- Cuando $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, la definición dada coincide con la conocida para una función real de variable real

- Para funciones complejas de una variable real se tiene el siguiente resultado.

  Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{C}$. Entonces la función f es de la forma

  $$f(t) = u(t) + iv(t)$$

  donde u y v son funciones reales de variable real. En este caso tenemos:

  $$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{u(t) - u(a)}{t - a} + i\frac{v(t) - v(a)}{t - a}$$

  y deducimos que f es derivable en a si, y sólo si, las funciones u y v son derivables en a, en cuyo caso

  $$f'(a) = u'(a) + iv'(a)$$

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

1.23 Reglas de derivación. *Sean dos funciones $f, g : A \to \mathbb{C}$ con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Supongamos que f y g son derivables en a. Entonces:*

- *$f + g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
- *fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.*
- *Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in A$, entonces f/g es derivable en a*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

- ***Regla de la cadena.** Sean $f : A \to \mathbb{C}$ y $g : B \to \mathbb{C}$ tales que $f(A) \subseteq B$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : A \to \mathbb{C}$. Supongamos que f es derivable en $a \in A \cap A'$ y g es derivable en $f(a) \in B \cap B'$. entonces h es derivable en a y*

$$h'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$$

Probemos la regla de la cadena. Para ello pongamos $b = f(a)$ y consideremos la aplicación $\varphi : B \to \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} \varphi(w) &= \frac{g(w) - g(b)}{w - b} \qquad w \in B \setminus \{b\} \\ \varphi(b) &= g'(b) \end{aligned}$$

Puesto que g es derivable en b, φ es continua en b. Ahora bien, nótese que para todo $z \in A \setminus \{a\}$ se tiene que

$$\frac{h(z) - h(a)}{z - a} = \frac{g\big(f(z)\big) - g\big(f(a)\big)}{z - a} = \varphi\big(f(z)\big)\,\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

de donde se deduce el resultado sin más que tomar límite para $z \to a$.

1.4.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

1.24 Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función de Ω en $\mathbb{C}$. Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

i) f es derivable (en sentido complejo) en a.

ii) Las funciones $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$ son diferenciables en (α,β) y además se verifican las condiciones de Cauchy–Riemann:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta) \end{aligned}}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$\boxed{f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)}$$

Demostración. Por definición, f es derivable si, y sólo si existe un número complejo, la derivada de f en a, $f'(a) = \lambda + i\mu$ que verifica

$$\lim_{z\to a} \frac{|f(z) - f(a) - (\lambda + i\mu)(z-a)|}{|z-a|} = 0.$$

Pongamos $z = x + iy$. Si tenemos en cuenta la igualdad

$$(\lambda + i\mu)(z-a) = (\lambda + i\mu)(x + iy - \alpha - i\beta) = \lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta) + i[\mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)]$$

y el hecho de que el módulo de un complejo coincide con la norma euclídea (visto como vector en $\mathbb{R}^2$), el límite anterior se escribe como sigue:

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\|(u(x,y), v(x,y)) - (u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)) - (\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta))\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0$$

o bien, como $\big(\lambda(x-\alpha) - \mu(y-\beta), \mu(x-\alpha) + \lambda(y-\beta)\big) = \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^t$,

$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} \frac{\left\| \big(u(x,y), v(x,y)\big) - \big(u(\alpha,\beta), v(\alpha,\beta)\big) - \left[\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \end{pmatrix}\right]^t \right\|}{\|(x,y) - (\alpha,\beta)\|} = 0.$$

La condición anterior quiere decir que la aplicación $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ de $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es diferenciable en el punto (α,β) y su diferencial es la aplicación lineal dada por

$$(x,y)\mapsto\left[\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]^t$$

Por tanto $\begin{pmatrix}\lambda & -\mu\\ \mu & \lambda\end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la aplicación $(x,y)\mapsto(u(x,y),v(x,y))$ en (α,β), esto es

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta)=\lambda,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha,\beta)=-\mu,\quad \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)=\mu,\quad \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha,\beta)=\lambda$$

Finalmente

$$f'(a)=f'(\alpha+i\beta)=\lambda+i\mu=\frac{\partial u}{\partial x}(\alpha,\beta)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha,\beta)$$

$\boxed{\checkmark}$

Observaciones

Este resultado explica por qué si eliges dos funciones u, v y defines una función compleja por la igualdad $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v, la función f así definida no sea derivable pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son "auténticas funciones complejas" en el sentido de que si la función $u(x,y)+iv(x,y)$ es derivable entonces la expresión que se obtiene al sustituir en $u(x,y)+iv(x,y)$ la variable x por $(z+\bar z)/2$ e y por $(z-\bar z)/2i$ debe depender únicamente de la variable z. Para formalizar esta idea pongamos

$$f(z)=u\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{2i}\right)+iv\left(\frac{z+\bar z}{2},\frac{z-\bar z}{2i}\right)$$

Para que la función $f(z)$ definida por esta igualdad dependa solamente de z y no dependa de $\bar z$ es necesario que se verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{1}{2i}\frac{\partial v}{\partial y}=0\Longleftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

que son precisamente las ecuaciones de Cauchy – Riemann.

1.25 Ejemplos.

- $f(x+iy)=x$ no es derivable en ningún punto.
- $f(x+iy)=(x+iy)(x^2+y^2)$ sólo es derivable en cero.
- $f(x+iy)=2xy+i(y^2-x^2)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$.
- $f(x+iy)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$ es derivable en todo $\mathbb{C}$ y $f'(z)=f(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

1.4.4. Primeras propiedades de las funciones holomorfas

1.26 Definición. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$. Una función $f:\Omega\to\mathbb{C}$ se dice que es *holomorfa* en Ω si f es derivable en todo punto de Ω. En tal caso la función definida para $z\in\Omega$ por $z\mapsto f'(z)$ se llama *función derivada* de f. Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω. Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman *funciones enteras*.

Era costumbre hace años llamar "funciones enteras" a las funciones polinómicas. Precisamente, la palabra "holomorfa" significa "de forma entera", y veremos que efectivamente las funciones holomorfas se comportan en algunos aspectos de forma parecida a las funciones polinómicas.

1.27 Ejemplos.

- Las *funciones polinómicas*, es decir, las funciones de la forma
$$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$$
donde $c_k\in\mathbb{C}$ para $0\leqslant k\leqslant n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por
$$p'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\cdots+nc_nz^{n-1}\qquad(z\in\mathbb{C})$$
- Las *funciones racionales*, es decir, las funciones de la forma $R(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:q(z)\neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por
$$R'(z)=\frac{p'(z)q(z)-p(z)q'(z)}{q(z)^2}\qquad(z\in\Omega)$$

Como consecuencia de las reglas de derivación tenemos el siguiente resultado.

1.28 Proposición. *El conjunto $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en un abierto Ω con la suma y el producto usual de funciones es un álgebra.*

1.29 Proposición. *Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Fijado $z_0 \in \Omega$, definimos

$$A = \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$$

A es no vacío y, por ser f continua, es un cerrado relativo de Ω. Veamos que también es abierto. Sea $a \in A$ y como Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Tomamos $b \in D(a,r)$ y definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ por $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$. Como f es derivable, la regla de la cadena nos dice que φ es derivable y

$$\varphi'(t) = f'((1-t)a + tb)(b-a) = 0$$

Por ser φ una función compleja de variable real tenemos

$$\varphi'(t) = (\operatorname{Re}\varphi)'(t) + i(\operatorname{Im}\varphi)' = 0 \qquad (t \in [0,1])$$

Luego $(\operatorname{Re}\varphi)'(t) = 0$ y $(\operatorname{Im}\varphi)'(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$. Puesto que $\operatorname{Re}\varphi$ y $\operatorname{Im}\varphi$ son funciones reales de variable real definidas en $[0,1]$, se sigue que son constantes. Luego φ es constante y por tanto $\varphi(0) = f(a) = \varphi(1) = f(b)$ luego $b \in A$. Hemos probado que $D(a,r) \subset A$, luego A es abierto. El hecho de que Ω sea un dominio permite concluir que $A = \Omega$, es decir, f es constante en Ω. $\boxed{\checkmark}$

1.30 Corolario. *Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.*

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

1.31 Proposición. *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\operatorname{Re} f$ *es constante en* Ω

(b) $\operatorname{Im} f$ *es constante en* Ω

(c) La función compleja conjugada de f, $\overline{f}$, es holomorfa en Ω

(d) f *es constante en* Ω

(e) $|f|$ *es constante en* Ω

Demostración. Pongamos $f = u + iv$, con $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Es claro que la condición *(d)* implica todas las demás.

(a)⇒(d) Las ecuaciones de Cauchy–Riemann afirman que

$$f'(z) = f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad (z = x+iy \in \Omega)$$

Puesto que $\operatorname{Re} f$ es constante tenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ lo que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$ de donde deducimos *(d)* gracias a la proposición anterior.

(b)⇒(d) Puesto que $\operatorname{Im} f = -\operatorname{Re}(if)$ la implicación *(a)⇒(d)* ya probada nos dice que la función if es constante y, por lo tanto, f también lo es.

(c)⇒(d) Como f es holomorfa y $\overline{f}$ lo es por hipótesis tenemos que $f + \overline{f} = 2\operatorname{Re} f$ es holomorfa. Puesto que $\operatorname{Im}(\operatorname{Re} f) = 0$ es constante, deducimos, por *(b)⇒(d)*, que $\operatorname{Re} f$ es constante y por *(a)⇒(d)* concluimos que f es constante.

(e)⇒(d) Si $|f| = \alpha$ entonces $f(z)\overline{f}(z) = \alpha^2$. Si $\alpha = 0$ entonces f es idénticamente nula y hemos acabado. Si $\alpha \neq 0$ entonces f no se anula en ningún punto por lo que la función $\overline{f}(z) = \dfrac{\alpha^2}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, por *(c)⇒(d)*, concluimos que f es constante. ☑

Observemos que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo es constante.

Hasta ahora sólo conocemos como ejemplos de funciones holomorfas los polinomios y las funciones racionales. Si queremos construir más ejemplos ya no encontraremos más por métodos elementales. Veamos ahora cómo construir funciones holomorfas como límite uniforme de funciones polinómicas.

1.4.5. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{25}$ Dado $\alpha \in]-\pi, \pi]$ definamos para $z \in \mathbb{C}^*$ $\arg_\alpha(z) = \operatorname{Arg}(z) \cap [\alpha, \alpha + 2\pi[$, es decir, $\arg_\alpha(z)$ es el único argumento de z que está en el intervalo $[\alpha, \alpha + 2\pi[$. Prueba que la función $z \mapsto \arg_\alpha(z)$ es continua en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{\rho \cos\alpha + i\rho \operatorname{sen}\alpha : \rho \geqslant 0\}$.

Ejercicio resuelto $\boxed{26}$ Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función dada por

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} \quad \text{si } z = x + iy \neq 0, \quad f(0) = 0$$

Estudia la continuidad y la derivabilidad de f.

Ejercicio resuelto $\boxed{27}$ Sea Ω un abierto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sean $\Omega^* = \{z : \overline{z} \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ para todo $z \in \Omega^*$. Prueba que f^* es holomorfa en Ω^*.

Ejercicio resuelto $\boxed{28}$ Sea f una función compleja definida en un abierto Ω. Pongamos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ y supongamos que u y v son diferenciables en un punto $(a,b) \in \Omega$. Sea $z_0 = a + ib$. Prueba que si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right|$$

entonces f o $\overline{f}$ es derivable en z_0.

Ejercicio resuelto $\boxed{29}$ Calcula una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{Re} f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Si se exige que sea $f(0) = 0$, entonces dicha función es única.

1.4.6. Ejercicios propuestos

34. Demuestra que si $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es una función polinómica de grado $n \geqslant 1$, se verifica que $\lim_{z \to \infty} P(z) = \infty$.

35. Estudia la derivabilidad de la función $f(x+iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2y)$.

36. Consideremos la función dada para $z \neq 0$ por $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, y $f(0) = 0$. ¿En qué puntos verifica f las ecuaciones de Cauchy-Riemann? ¿Es f derivable en $z = 0$?.

37. Escribe las ecuaciones de Cauchy-Riemann para

$$f(z) = U(\rho, \vartheta) + iV(\rho, \vartheta) \quad \text{donde} \quad z = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

Expresa la derivada de f por medio de las derivadas parciales de U y V.

38. Sea Ω un dominio y f una función holomorfa en Ω. Supongamos que hay números $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que $a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) = c$ para todo $z \in \Omega$. Prueba que f es constante en Ω.

39. Encuentra una condición necesaria y suficiente que deben cumplir los números reales a, b, c para que exista una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, verificando que

$$\operatorname{Re} f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determina, cuando dicha condición se cumpla, todas las funciones enteras f cuya parte real es de la forma indicada.

40. Sea $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función holomorfa con derivada no nula. Prueba que las curvas de nivel $u(x,y) = c$, $v(x,y) = k$ son dos familias de trayectorias ortogonales.

1.5. Sucesiones y series de funciones

Sucesiones de funciones

Una sucesión de funciones, como su nombre indica, es una sucesión cuyos elementos son funciones. Formalmente, es una aplicación que a cada número natural le asigna una función, en nuestro caso una función compleja.

Consideremos una sucesión de funciones $\{f_n\}$ con $f_n : A \to \mathbb{C}$ donde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Convergencia puntual Decimos que $\{f_n\}$ *converge puntualmente* en un punto $a \in A$ si la sucesión de números complejos $\{f_n(a)\}$ converge.

Llamamos campo de convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$ al conjunto

$$C = \{z \in A : \{f_n(z)\} \text{ converge}\}$$

y llamamos *límite puntual* a la función $f : C \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \lim\{f_n(z)\}$$

Convergencia uniforme Se dice que $\{f_n\}$ *converge uniformemente* a una función f en un conjunto $B \subseteq A$ si

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\} = 0$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| \leqslant \varepsilon$ *para todo* $z \in B$.

1.32 Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. *Una sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* B *si, y sólo si,k verifica uniformemente en* B *la condición de Cauchy:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; p,q \geqslant n_0 \Rightarrow \sup\{\left|f_p(z) - f_q(z)\right| : z \in B\} \leqslant \varepsilon$$

Series de funciones

Dada una sucesión de funciones, $\{f_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los de la primera, esto es:

$$F_1 = f_1,\; F_2 = f_1 + f_2,\; F_3 = f_1 + f_2 + f_3,\; \ldots, F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n, \cdots$$

Dicha sucesión de funciones, $\{F_n\}$, así obtenida se llama *serie de término general* f_n y la representamos por $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ o, más sencillamente, $\sum f_n$.

Puesto que las series de funciones son sucesiones de funciones, los conceptos de convergencia puntual, campo de convergencia puntual y convergencia uniforme para series de funciones no precisan de nueva definición. El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

1.33 Proposición. *Condición necesaria para que la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converja puntualmente (resp. uniformemente) en un conjunto* A *es que la sucesión* $\{f_n\}$ *converja puntualmente (resp. uniformemente) a cero en* A.

La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ se dice que *converge absolutamente* en un punto $a \in A$ cuando la serie de los módulos, $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(a)|$, converge. Se define el *campo de convergencia absoluta* como el conjunto

$$\left\{z \in A : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(z)| \text{ converge}\right\}$$

Al igual que para series de números complejos la convergencia absoluta de una serie de funciones implica convergencia pero no al contrario.

El siguiente criterio que proporciona condiciones suficientes para la convergencia uniforme y absoluta de una serie de funciones será usado con frecuencia en lo que sigue.

1.34 Criterio de Weierstrass. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *una serie de funciones definidas en un conjunto* $A \subseteq \mathbb{C}$. *Supongamos que hay una sucesión* $\{\alpha_n\}$ *de números reales positivos tal que:*

(a) $|f_n(z)| \leqslant \alpha_n$ *para todo* $z \in A$.

(b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ *es convergente.*

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge absolutamente y uniformemente en* A.

Demostración. Por el criterio de comparación para series de términos positivos *(a)* y *(b)* implican que la serie $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(z)|$ converge para $z \in A$.

Para probar la convergencia uniforme en A veamos que se cumple la condición uniforme de Cauchy en A.

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ converge cumple la condición de Cauchy. Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $p > q \geqslant n_0$ se verifica

$$\alpha_p + \alpha_{p-1} + \cdots + \alpha_{q+1} \leqslant \varepsilon$$

Deducimos que para $p > q \geqslant n_0$ y para todo $z \in A$ se verifica

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{p} f_j(z) - \sum_{j=1}^{q} f_j(z)\right| &= \left|f_p(z) + f_{p-1}(z) + \cdots + f_{q+1}(z)\right| \leqslant \\ &\leqslant |f_p(z)| + |f_{p-1}(z)| + \cdots + \left|f_{q+1}(z)\right| \leqslant \\ &\leqslant \alpha_p + \alpha_{p-1} + \cdots + \alpha_{q+1} \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Como queríamos probar. ☑

Observa que los conceptos de convergencia absoluta y de convergencia uniforme son independientes: una serie puede ser uniformemente convergente en un conjunto A y no ser absolutamente convergente en A. En tales casos se aplican los siguientes criterios de convergencia no absoluta para series de funciones (ver ejercicios 47 y 48).

1.35 Proposición. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión numérica y $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones definidas en un conjunto A.*

Criterio de Dirichlet. *Supongamos que:*
a) $\{a_n\}$ es una sucesión de números reales monótona y convergente a cero.
b) La serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ tiene sumas parciales uniformemente acotadas en A.
Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

Criterio de Abel. *Supongamos que:*
a) La serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
b) Para cada $z \in A$ $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de números reales monótona y la sucesión de funciones $\{f_n\}$ está uniformemente acotada en A.
Entonces la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 1} a_n f_n$ converge uniformemente en A.

1.5.1. Series de potencias complejas

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a \in \mathbb{C}$ consideremos la sucesión de funciones

$$f_0(z) = c_0$$
$$f_n(z) = c_n(z-a)^n \qquad n \geqslant 1$$

La serie definida por esta sucesión de funciones, es decir, la sucesión

$$\left\{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n\right\}$$

se representa por $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ y se llama *serie de potencias centrada en* a. La sucesión $\{c_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

1.36 Lema de Abel. *Sea* $\rho > 0$ *un número positivo tal que la sucesión* $\{c_n\rho^n\}$ *está acotada. Entonces se verifica que la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *converge absolutamente en el disco* $D(a,\rho)$ *y converge uniformemente en compactos* $K \subseteq D(a,\rho)$.

Demostración. Tomemos un compacto $K \subset D(a,\rho)$. Llamemos $r = \max\{|z-a| : z \in K\} < \rho$. Puesto que $\{c_n\rho^n\}$ está acotada existe una constante $M > 0$ tal que $|c_n\rho^n| \leqslant M$ para todo número natural n. Tenemos que

$$|c_n(z-a)^n| = \left|c_n\rho^n \frac{(z-a)^n}{\rho^n}\right| = |c_n\rho^n| \, \frac{|z-a|^n}{\rho^n} \leqslant M\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n \leqslant (z \in K) \leqslant M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Consideramos ahora la sucesión $\{\alpha_n\} = \{M(r/\rho)^n\}$ y aplicamos el criterio de Weierstrass para dicha sucesión. Ya que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n$ converge por ser una serie geométrica de razón menor que 1, dicho criterio nos dice que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge absolutamente y uniformemente en K.

Como la serie converge absolutamente en cualquier compacto contenido en $D(a,\rho)$ se sigue que converge absolutamente en todo el disco. $\boxed{\checkmark}$

El lema anterior conduce de manera natural a considerar el más grande $\rho > 0$ tal que la sucesión $\{a_n\rho^n\}$ está acotada. Introducimos para ello el conjunto

$$A = \{\rho \geqslant 0 : \{c_n\rho^n\} \text{ está acotada}\}$$

y definimos $R = \sup(A) \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. Pueden presentarse los casos:

- $R = 0$. Entonces $A = \{0\}$, luego si $z \neq a$ la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, en particular, no converge a cero. Por tanto la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ no converge. En este caso se dice que *la serie de potencias es trivial* pues solamente converge para $z = a$.

- $0 < R < +\infty$. Sea $K \subseteq D(a,R)$ compacto y $r = \text{máx}\{|z-a| : z \in K\} < R$. Por definición de supremo existe $\rho \in A$ tal que $r < \rho \leqslant R$. Aplicando el lema de Abel para dicho ρ deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge uniformemente y absolutamente en K. Como K es un compacto arbitrario contenido en $D(a,R)$, concluimos que la serie converge absolutamente en $D(a,R)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho disco.

  Si $|z-a| > R$ entonces la sucesión $\{c_n(z-a)^n\}$ no está acotada y, por tanto, la serie no converge.

  Nada puede afirmarse en general del comportamiento de la serie en la frontera del disco $D(a,R)$.

- Si $R = +\infty$ el argumento anterior es válido para cualquier compacto K con lo cual la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en compactos.

Al número R se le llama *radio de convergencia* de la serie. Nótese que R sólo depende de la sucesión $\{c_n\}$ de coeficientes de la serie y no del centro de la serie. Dada una serie de potencias no trivial, $\sum c_n(z-a)^n$, llamaremos *dominio de convergencia de la serie* al conjunto $D(a,R)$ donde R es el radio de convergencia de la serie (recuerda que si $R = +\infty$ entonces $D(a,+\infty) = \mathbb{C}$).

Los siguientes criterios permiten en muchos casos calcular el radio de convergencia.

1.37 Criterio del cociente o de D'Alembert. *Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ supuesto que*

- $c_n \neq 0$ *para todo n a partir de un índice en adelante, y que*
- $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \longrightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$

entonces $R = 1/L$ con los convenios: $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$.

Demostración. Para obtener este resultado basta aplicar el criterio del cociente a la serie

$\sum_{n \geqslant 0} |c_n(z-a)^n|$. Tenemos

$$\frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n(z-a)^n|} = \frac{c_{n+1}}{c_n}|z-a| \longrightarrow L\,|z-a|$$

Deducimos que:

- Si $L\,|z-a| < 1$ la serie converge.
- Si $L\,|z-a| > 1$ la serie no converge.

y concluimos que $R = 1/L$ con los convenios anteriores. ☑

De forma análoga se obtiene el siguiente resultado.

1.38 Criterio de la raíz o de Cauchy. *Si* $\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \to L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ *entonces* $R = 1/L$ *con los mismos convenios anteriores.*

Los criterios anteriores son en realidad bastante restrictivos. Por ejemplo ninguno de ellos puede aplicarse para estudiar la convergencia de una serie de potencias cuyos coeficientes vienen dados por $c_{2n-1} = 1/2^n$, $c_{2n} = 1/3^n$. El siguiente resultado proporciona un método general para calcular el radio de convergencia. Recuerda que si $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos mayorada se define el *límite superior* de dicha sucesión, $\limsup\{x_n\}$, como el límite de la sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = \sup\{x_k : k \geqslant n\}$. Si $\{x_n\}$ no está mayorada se define su límite superior igual a $+\infty$.

1.39 Fórmula de Cauchy–Hadamard. *El radio de convergencia R de una serie de potencias* $\sum_{n \geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *viene dado por*

$$\boxed{R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

con los convenios usuales.

Demostración. Llamemos $L = \limsup\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \in R_0^+ \cup \{+\infty\}$.

Supongamos que $L = +\infty$ lo que equivale a que $\sqrt[n]{|c_n|}$ no está acotada. En tal caso veamos que $\{c_n\rho^n\}$ no está acotada para ningún $\rho > 0$. En caso contrario existirían $M > 1$ y $\rho > 0$ tales que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo natural n. Luego

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M}}{\rho} \leqslant \frac{M}{\rho} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

y $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ estaría acotada en contra de la hipótesis. Deducimos que $R = 0$.

Supongamos que $L \in \mathbb{R}_0^+$. Vamos a probar las implicaciones

$$\rho L < 1 \Rightarrow \rho \in A \Rightarrow \rho L \leqslant 1$$

Supuesto probadas, si $L = 0$ cualquier $\rho > 0$ cumple lo anterior luego $\mathbb{R}_0^+ \subset A$ y $R = +\infty$. Si $0 < L < +\infty$ entonces $[0, 1/L[\subset A \subset [0, 1/L]$ de donde $R = 1/L$.

Probemos la primera implicación. Pongamos $b_n = \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k \geqslant n\}$. Por definición de límite superior es $L = \lim\{b_n\}$. Supongamos que $\rho L < 1$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho b_{n_0} < 1$ de donde $\rho\sqrt[n]{|c_n|} < 1$ para todo $n \geqslant n_0$, elevando a n tenemos $\rho^n|c_n| < 1$ para cada $n \geqslant n_0$. De lo anterior concluimos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está acotada y, por tanto, que $\rho \in A$.

Veamos la segunda implicación. Supongamos que $\rho \in A$ luego $\{|c_n|\rho^n\}$ está acotada, esto es, existe una constante positiva $M > 1$ de forma que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Extrayendo raíces de orden n se tiene

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{\sqrt[n]{M}}{\rho}$$

Fijemos $q \in \mathbb{N}$ arbitrario, la desigualdad anterior es cierta para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular lo es para cada $n \geqslant q$. Con lo cual

$$b_q = \sup\{\sqrt[n]{|c_n|} : n \geqslant q\} \leqslant \frac{\sqrt[q]{M}}{\rho}$$

donde hemos usado que para $M > 1$ la sucesión $\{\sqrt[n]{M}\}$ es decreciente. Acabamos de probar que $\rho b_q \leqslant \sqrt[q]{M}$ para cualquier q. Tomando límite en q deducimos que $\rho L \leqslant 1$ ✓

El siguiente lema nos dice que derivando término a término una serie de potencias obtenemos otra serie de potencias con el mismo radio de convergencia que la serie de partida.

1.40 Lema. *Las series de potencias*

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n \qquad \sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1}$$

tienen igual radio de convergencia.

Demostración. La serie $\sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1}$ y

$$(z-a)\sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 1} nc_n(z-a)^n$$

convergen para los mismos valores de z y, por tanto, tienen igual radio de convergencia. La fórmula de Cauchy–Hadamard nos dice que el radio de convergencia de dicha serie viene dado por

$$\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{n\,|c_n|}\}$$

Para probar el resultado basta justificar la igualdad

$$\operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{n\,|c_n|}\} = \operatorname{lím\,sup}\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$$

Llamemos

$$b_n = \sup\{\sqrt[k]{|c_k|} : k\geqslant n\} \quad \beta_n = \sup\{\sqrt[k]{k\,|c_k|} : k\geqslant n\}$$

Teniendo en cuenta que la sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es decreciente, resulta que

$$b_n \leqslant \beta_n \leqslant \sqrt[n]{n}\, b_n$$

y como $\operatorname{lím}\{\sqrt[n]{n}\} = 1$, concluimos que $\operatorname{lím}\beta_n = \operatorname{lím} b_n$. ☑

1.41 Teorema de derivación de una serie de potencias. *Sea* $a \in \mathbb{C}$, $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ *una serie de potencias no trivial y* Ω *su dominio de convergencia. Sea* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *la función suma de la serie, esto es,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad z \in \Omega$$

Entonces f *es indefinidamente derivable en* Ω *y, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *su derivada* k*-ésima se obtiene derivando* k *veces la serie término a término, esto es:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad z\in\Omega$$

En particular $f^{(k)}(a) = k!\,c_k$ *o, lo que es lo mismo*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{para todo } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Demostración. En primer lugar, no es restrictivo suponer que $a = 0$, puesto que en caso contrario podemos considerar la función

$$g(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \qquad z \in \Omega$$

con lo que $f(z) = g(z-a)$. Luego si g es derivable también f es derivable y las derivadas de f en a son las derivadas de g en 0.

Sea, pues, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ para $z \in \Omega$. Tomemos un punto $b \in \Omega$ y para $z \in \Omega$, $z \neq b$ sea

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - b^n}{z-b} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z)$$

donde $p_n(z) = c_n \sum_{j=1}^{n} z^{n-j} b^{j-1}$. Lo que queremos probar es que dicho cociente tiene límite en b, esto es, que f es derivable en b.

Puesto que Ω es un abierto podemos tomar $\overline{D}(b,\delta) \subseteq \Omega$ para algún $\delta > 0$. Para $z \in \overline{D}(b,\delta)$ se cumple que $|z| \leqslant |b| + \delta$ y, evidentemente, $|b| \leqslant |b| + \delta$, con lo cual

$$|p_n(z)| \leqslant |c_n|\, n(|b|+\delta)^{n-1} \qquad \text{para todo } z \in \overline{D}(b,\delta) \tag{1.6}$$

Vamos a aplicar el criterio de la mayorante de Weierstrass a la serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} p_n$. Para ello veamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} n\,|c_n|\,(|b|+\delta)^{n-1}$ es convergente.

Pero esto último es claro ya que sabemos, por el lema anterior, que $\sum_{n\geqslant 1} nc_n w^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n\geqslant 0} c_n w^n$, y esta última converge en Ω. Como el disco $\overline{D}(b,\delta)$ está contenido en Ω y en dicho disco hay puntos de módulo igual a $|b|+\delta$ (por ejemplo $w_0 = b+\delta\dfrac{b}{|b|}$) y las series de potencias convergen absolutamente en su dominio de convergencia, concluimos que la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} n\,|c_n|\,(|b|+\delta)^{n-1}$$

es convergente. Ahora, por las desigualdad 1.6, el criterio de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 0} p_n$ converge uniformemente en el disco $\overline{D}(b,\delta)$ y, por tanto, la función suma de dicha serie es continua en dicho disco. En particular tenemos que

$$\operatorname*{lím}_{z\to b}\frac{f(z)-f(b)}{z-b} = \operatorname*{lím}_{z\to b}\varphi(z) = \operatorname*{lím}_{z\to b}\sum_{n=0}^{\infty} p_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(b) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n b^{n-1}$$

es decir, hemos probado que f es derivable en b y

$$f'(b) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n b^{n-1}$$

Puesto que b es un punto arbitrario de Ω obtenemos que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1} \qquad \text{para todo } z\in\Omega$$

Una sencilla inducción prueba que f tiene derivadas de todos los órdenes en Ω y

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(z-a)^{n-k} \qquad \text{para todo } z\in\Omega$$

En dicha igualdad haciendo $z=a$ obtenemos

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{para todo } k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

$\boxed{\checkmark}$

1.42 Definición. Sea f una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$. La serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

se llama *serie de Taylor* de f en el punto a.

1.43 Corolario. *Las únicas series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).*

El resultado anterior nos lleva a definir el concepto de *función analítica*.

1.44 Definición. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, se dice que una función compleja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ es analítica en Ω cuando *localmente* puede representarse como la función suma de una serie de potencias. Es decir, para cada punto $b \in \Omega$ hay un disco abierto $D(b, \rho_b) \subseteq \Omega$ y una serie de potencias

$$\sum_{n \geqslant 0} c_n^{(b)}(z-b)^n$$

cuyo dominio de convergencia contiene a $D(b, \rho_b)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(b)}(z-b)^n \qquad \text{para todo } z \in D(b, \rho_b)$$

En virtud del teorema anterior, deducimos que una función analítica f en Ω es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son también analíticas. Además se tiene que

$$c_n^{(b)} = \frac{f^{(n}(b)}{n!}$$

Equivalentemente, una función f es analítica en un abierto Ω si es indefinidamente derivable en dicho abierto y para cada punto $b \in \Omega$ la serie de Taylor de f en b converge y su suma es igual a f en algún disco abierto centrado en b y contenido en Ω.

El siguiente resultado es muy útil para calcular la suma de una serie de potencias en puntos de la frontera de su disco de convergencia.

1.45 Continuidad radial. *Sea $\sum c_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $0 < R < +\infty$. Sea $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ la función suma de la serie y supongamos que la serie es convergente en un punto z_0 de la frontera del disco $D(0,R)$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} f(rz_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

Demostración. Para $r \in [0,1]$ la sucesión $\{r^n\}$ es monótona decreciente y está uniformemente acotada en $[0,1]$ y la serie $\sum c_n z_0^n$ es convergente por hipótesis. Por tanto el criterio de Abel (proposición 1.35) nos dice que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n (r z_0)^n = \sum_{n\geqslant 0} c_n r^n z_0^n$$

converge uniformemente para $r \in [0,1]$ y por tanto su suma es una función continua en dicho intervalo y, en particular, es continua en $r = 1$, es decir

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ 0<r<1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (r z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

como queríamos demostrar. $\boxed{\checkmark}$

1.5.2. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{30}$ Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones

$$f_n(z) = n\left(\sqrt[n]{z} - 1\right)$$

donde $\sqrt[n]{z}$ indica la raíz n-ésima principal de z.

Ejercicio resuelto $\boxed{31}$ Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{2z-i}{2+iz}\right)^n \qquad (z \neq 2i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio resuelto 32 Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$ converge absoluta y uniformemente en compactos contenidos en $D(0,1)$ y en compactos contenidos en $\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,1)$. Calcula la suma de dicha serie.

Ejercicio resuelto 33 Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{z+n}$ converge puntualmente en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$. Indica conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

Ejercicio resuelto 34 Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 0}(n+a^n)z^n \qquad \text{c)}\ \sum_{n\geqslant 1}n^{\log n}z^n$$

Ejercicio resuelto 35 Los radios de convergencia de las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}b_nz^n$ son respectivamente R_1, R_2 con $0<R_1, R_2<+\infty$. ¿Qué se puede decir de los radios de convergencia de las series $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(a_n+b_n)z^n$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nb_nz^n$?

Ejercicio resuelto 36 Sabiendo que el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}c_nz^n$ es R, $0<R<+\infty$, calcular el radio de convergencia de las series:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 0}n^kc_nz^n\ \ (k\in\mathbb{N}) \quad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{n!}z^n \quad \text{c)}\ \sum_{n\geqslant 0}c_n^kz^n\ \ (k\in\mathbb{N}) \quad \text{d)}\ \sum_{n\geqslant 0}(1+a^n)c_nz^n\ \ (a\in\mathbb{C})$$

Ejercicio resuelto 37 Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series de potencias:

$$\text{a)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{z^n}{\sqrt{n}} \quad \text{b)}\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{z^n}{n}$$

Ejercicio resuelto 38 Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n$ donde $a_{3^n}=\dfrac{1}{n}$, $a_{2\cdot 3^n}=\dfrac{-1}{n}$, y $a_n=0$ en otro caso, converge en todo punto del conjunto $A=\left\{\exp\left(\dfrac{2k\pi i}{3^m}\right):m\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ y no converge en ningún punto de $B=\left\{\exp\left(\dfrac{(2k+1)\pi i}{3^m}\right):m\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Justifica que A y B son densos en la circunferencia unidad.

Sugerencia: Calcula en cada caso $\displaystyle\sum_{k=1}^{2\cdot 3^n}a_kz^k$.

Ejercicio resuelto 39 Expresa $\dfrac{1}{(1-z)^3}$ como suma de una serie de potencias.

Ejercicio resuelto 40 Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ una función inyectiva en $D(0,1)$. Prueba que, para $0<r<1$, el área del conjunto $A(r)=f(D(0,r))$ es igual a $\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2r^{2n}$.

1.5.3. Ejercicios propuestos

41. Calcula la función límite puntual de la sucesión de funciones $f_n(z)=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$.

Sugerencia: escribe $f_n(z)=\rho_n\big(\cos\varphi_n+i\operatorname{sen}\varphi_n\big)$.

42. Estudia la convergencia puntual de las sucesiones de funciones $\{f_n\}$ donde:

a) $f_n(z)=\dfrac{1}{1+z^n}$ b) $f_n(z)=\dfrac{z^n}{1+z^n}$ c)

43. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n \qquad (z\neq i)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

44. Estudia la convergencia puntual de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N})$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

45. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right)$$

46. Justifica que la serie $\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ converge uniformemente y absolutamente en todo compacto contenido en $D(0,1)$ y en todo compacto contenido en $\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$.

47. **Criterio general de Dirichlet.** Sea Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

i) La sucesión $\{F_n\}$ de las sumas parciales de la serie $\sum f_n$ está uniformemente acotada en A.

ii) La serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ converge uniformemente en A.

iii) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en A.

Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A.

Indicación:

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} F_{n+k}(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F_{n+p}g_{n+p+1} - F_n g_{n+1}$$

Casos particulares. a) Si para cada $x \in \Omega$ $\{g_n(x)\}$ es *una sucesión de números reales monótona* entonces la condición ii) es consecuencia de iii).

b) Si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones constantes en Ω, es decir, $\{g_n\} = \{a_n\}$ donde $\{a_n\}$ es una *sucesión monótona convergente a cero de números reales*, entonces las condiciones ii) y iii) se verifican trivialmente en todo subconjunto de $\mathbb{C}$.

48. **Criterio general de Abel.** Sea Ω un conjunto no vacío, $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Sea A un subconjunto no vacío de Ω y supongamos que:

i) La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

ii) La sucesión de sumas parciales de la serie $|g_1| + \sum\limits_{n\geqslant 1} |g_n - g_{n+1}|$ está uniformemente acotada en A.

Probar que la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A.

Indicación: sea $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$, entonces

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}g_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} (F_{n+k} - F)(g_{n+k} - g_{n+k+1}) + (F_{n+p} - F)g_{n+p+1} - (F_n - F)g_{n+1}$$

Casos particulares. a) Si para cada $x \in \Omega$ $\{g_n(x)\}$ es una *sucesión de números reales monótona y la sucesión* $\{g_n\}$ *está uniformemente acotada en* A entonces se verifica la condición ii).

b) Si $\sum f_n$ es una serie de funciones constantes en Ω, es decir, $\sum f_n = \sum a_n$ donde $\sum a_n$ es una *serie convergente de números complejos*, entonces la condición i) se verifica trivialmente en todo subconjunto de $\mathbb{C}$.

49. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales decreciente a cero. Para cada número $\delta \in]0,1[$, sea $A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1,\ |z-1| \geqslant \delta\}$. Justifica que la serie $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en A_δ. Deduce que dicha serie converge en todo punto de la circunferencia unidad salvo, eventualmente, en el punto 1.

50. Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{i)} \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2n+3}{5n+6}\right)^n z^n \qquad \text{ii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}z^n \qquad \text{iii)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{2n}}{(1+2i)^n}$$

$$\text{iv)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{n^2}}{(n-1)!} \qquad \text{v)} \sum_{n\geqslant 0}[3+(-1)^n]^n z^n \qquad \text{vi)} \sum_{n\geqslant 0}a^{n^2}z^n$$

$$\text{vii)} \sum_{n\geqslant 0}2^n z^{n!} \qquad \text{viii)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n \qquad \text{ix)} \sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}z^n$$

51. Estudia el comportamiento en la frontera del disco de convergencia de las series:

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}z^n \quad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n} \quad \text{c)} \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^n}{n^2} \quad \text{d)} \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\log n}z^{3n-1} \quad \text{e)} \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^p z^n \ (p\in\mathbb{R})$$

52. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{n!}$ $(|z|<1)$. Dado $z_0=\exp(\frac{p}{q}2\pi i)$ $(p,q\in\mathbb{Z})$, prueba que $\lim\limits_{\substack{\rho\to 1\\ \rho<1}}|f(\rho z_0)|=+\infty$.

53. Calcula la suma de las series

$$\text{a)} \sum_{n\geqslant 1}nz^n \qquad \text{b)} \sum_{n\geqslant 1}n^2 z^n$$

54. Expresa $\dfrac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en un punto $a\neq 0$ e indica en dónde es válida dicha igualdad.

55. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f' es analítica en Ω. Justifica que también f es analítica en Ω.

56. Justifica que toda función analítica tiene *localmente* primitivas.

57. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ para $z\in D(0,\rho)$ y supongamos que $|a_1|\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\rho^{n-1}$. Prueba que f es inyectiva en el disco $D(0,\rho)$.

Deduce que una función análitica en un abierto Ω, cuya derivada no se anula en ningún punto de Ω, es *localmente* inyectiva en Ω. ¿Puede asegurarse que una tal función es inyectiva en Ω?.

58. Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 0}c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R\in\mathbb{R}^+$. Justifica que la serie $\sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{n!}z^n$ tiene radio de convergencia $+\infty$. Sea $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}z^n$. Prueba que para cada $\rho\in]0,1[$ hay una constante $M(\rho)$ tal que

$$|f(z)|\leqslant M(\rho)\exp(|z|/\rho R) \qquad (z\in\mathbb{C})$$

1.6. Funciones complejas elementales

1.6.1. Exponencial compleja

Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^n}{n!}$. Aplicando el criterio del cociente obtenemos $\displaystyle\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\to 0$, luego la serie converge para todo $z\in\mathbb{C}$. Llamamos *exponencial compleja* a la función

$$\boxed{\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n \qquad (z\in\mathbb{C})}$$

Propiedades

(1) $\exp'(z)=\exp(z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

(2) $\exp(0)=1$

(3) $\exp(x)$ para $x\in\mathbb{R}$ coincide con la exponencial real, esto es, la exponencial compleja extiende a la exponencial real. Esto justifica el uso de la notación $\exp(z)=\mathrm{e}^z$.

(4) Las propiedades (1) y (2) caracterizan a la función exponencial, esto es, si $\varphi\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\varphi'(z)=\varphi(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}$ y $\varphi(0)=1$ entonces $\varphi(z)=\exp(z)$.

(5) **Teorema de adición**: $\exp(z+w)=\exp(z)\exp(w)$

(6) **Fórmula de Euler**: Dado $t\in\mathbb{R}$ se cumple $\exp(it)=\cos t+i\operatorname{sen} t$. En particular tenemos la igualdad

$$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$$

(7) Dado $z=\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z)\in\mathbb{C}$ entonces

$$\boxed{\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)}$$

Por tanto $\boxed{|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z},\ \operatorname{Im} z\in\operatorname{Arg}(\mathrm{e}^z)}$.

(8) La exponencial compleja no se anula nunca.

(9) La exponencial compleja es una función periódica de periodo $2\pi i$. Concretamente $\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^w$ si, y sólo si, $z-w\in 2\pi i\mathbb{Z}$.

(10) La exponencial compleja es una función analítica.

Demostración.

(1) Puesto que la exponencial está definida en términos de una serie de potencias convergente basta derivar término a término la serie para obtener la derivada de la exponencial. Así

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n} = \exp(z)$$

(2) Evidentemente al hacer $z = 0$ en la serie que define a la exponencial se anulan todos los términos menos el primero que es 1.

(3) Para $x \in \mathbb{R}$ sabemos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

(4) Tomemos $a \in \mathbb{C}$ y llamemos $h(z) = \varphi(a-z)\exp(z)$, luego

$$h'(z) = -\varphi'(a-z)\exp(z) + \varphi(a-z)\exp(z) = 0$$

luego h es constante, en particular, $h(0) = h(a)$, es decir, $\varphi(a) = \exp(a)$. Puesto que a es un número complejo arbitrario la igualdad es válida para todo $a \in \mathbb{C}$

(5) Sea $a \in \mathbb{C}$ y consideremos la función $H(z) = \exp(a-z)\exp(z)$. Si derivamos resulta $H'(z) = 0$ luego H es constante y $H(0) = H(z)$, esto es, $\exp(a) = \exp(a-z)\exp(z)$ para todo $a \in \mathbb{C}$. Sustituyendo $a = z + w$ obtenemos que

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$$

(6) De la definición de la exponencial compleja se sigue que

$$\begin{aligned}
\exp(it) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(it)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(it)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!}(it)^k = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + i \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \right) = \\
&= \cos t + i \operatorname{sen} t
\end{aligned}$$

(7) Sea $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ un número complejo cualquiera. Tenemos

$$\exp z = \exp(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) = e^{\operatorname{Re}(z)} \exp(i\operatorname{Im}(z)) = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}(z)} \big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big)$$

(8) Consecuencia de que $|\exp z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} > 0$.

(9) Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo cualquiera

$$\begin{aligned}\exp(z+2\pi i) &= e^{\operatorname{Re}(z+2\pi i)}\big(\cos \operatorname{Im}(z+2\pi i) + i \operatorname{sen} \operatorname{Im}(z+2\pi i)\big) = \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z + 2\pi) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z + 2\pi)\big) = \\ &= e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) = \\ &= \exp(z)\end{aligned}$$

(10) Tomemos $a \in \mathbb{C}$, por el teorema de adición $\exp(z) = \exp(a)\exp(z-a)$, esto es,

$$\exp(z) = \exp(a)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^a}{n!}(z-a)^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ $\boxed{\checkmark}$

1.6.2. Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir, como vamos a ver enseguida, en que la ecuación $e^w = z$, donde z es un número complejo no cero, va a tener infinitas soluciones $w \in \mathbb{C}$. Como

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ es necesario y suficiente que:

1. $|e^w| = |z|$, esto es, $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, es decir, $\operatorname{Re} w = \log|z|$ (logaritmo natural del número real positivo $|z|$).

2. $\operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$, esto es, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg} z$ y esto se cumple si, y sólo si $\operatorname{Im} w = \arg(z) + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama *un logaritmo* de z. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$.

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \{\log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\} = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \qquad (z \in \mathbb{C}^*)}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado *logaritmo principal*, definido por

$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z) \qquad (z\in\mathbb{C}^*)}$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log z + i2k\pi$ para algún entero k. Además, para $z\in\mathbb{R}^+$ el logaritmo principal, $\log z$, coincide con el logaritmo natural de z.

También es importante que observes que la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(-1+i\sqrt{3}) = \log 2 + i\frac{2\pi}{3}, \quad \log(-\sqrt{3}+i) = \log 2 + i\frac{5\pi}{6}$$
$$\log((-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i)) = \log(-4i) = \log 4 - i\frac{\pi}{2}$$
$$\log 4 - i\frac{\pi}{2} \neq \log 2 + i\frac{2\pi}{3} + \log 2 + i\frac{5\pi}{6} = \log 4 + i\frac{3\pi}{2}$$

Lo que está claro es que $\boxed{\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)}$, es decir, $\log z + \log w$ es *un* logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo *principal* de zw.

1.46 Definición. Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$.

- Cualquier función $g : A \to \mathbb{C}$ tal que $g(z)\in\operatorname{Log} f(z)$ para todo $z\in A$ se llama *un logaritmo de f en A*. Cuando f es la identidad se dice simplemente que g es un logaritmo en A.

- Cualquier función $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z)\in\operatorname{Arg} f(z)$ para todo $z\in A$ se llama *un argumento de f en A*. Cuando f es la identidad se dice simplemente que ϑ es un argumento en A.

En este curso estaremos interesados en el siguiente problema: Dada una función holomorfa que no se anula en un abierto Ω, ¿existen logaritmos holomorfos de f en Ω? Respuestas cada vez más precisas de este problema se irán obteniendo a lo largo del curso.

El siguiente resultado nos dice que un logaritmo continuo de una función holomorfa es automáticamente un logaritmo holomorfo.

1.47 Proposición. *Sea $f : A \to \mathbb{C}^*$, con $A \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Sea $g : A \to \mathbb{C}$ un logaritmo de f en A. Supongamos además que f es derivable en a y que g es continua en a. Entonces g es derivable en a y*

$$g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

En consecuencia, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $0 \notin f(\Omega)$ y $g : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua en Ω y tal que $\mathrm{e}^{g(z)} = f(z)$ para cada $z \in \Omega$ entonces $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Llamemos $b = g(a)$ y consideremos la aplicación

$$\varphi(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^b}{z - b} \qquad z \neq b$$
$$\varphi(b) = \mathrm{e}^b$$

Claramente φ es continua en b. Además

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{\mathrm{e}^{g(z)} - \mathrm{e}^{g(a)}}{z - a} = \varphi(g(z))\frac{g(z) - g(a)}{z - a}$$

Puesto que por hipótesis g es continua en a, y φ es continua en $g(a) = b$ tenemos que $\varphi(g(z))$ es continua en $z = a$ y $\varphi(g(a)) = e^b \neq 0$. Por continuidad existe $\delta > 0$ de forma que si $z \in D(a,\delta) \cap A$, $z \neq a$ entonces $\varphi(g(z)) \neq 0$. Despejando de la expresión anterior tenemos

$$\frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{1}{\varphi(g(z))}\frac{f(z) - f(a)}{z - a} \qquad \text{para } z \in D(a,\delta) \cap A,\ z \neq a$$

Como $\lim\limits_{z \to a} \varphi(g(z)) = \mathrm{e}^b = f(a)$ deducimos que

$$\lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

$\boxed{\checkmark}$

1.48 Corolario. *El logaritmo principal es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ y su derivada viene dada por $\log'(z) = \dfrac{1}{z}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.*

Demostración. Basta aplicar el resultado anterior para las funciones $f(z) = z$, $g(z) = \log z$. Puesto que el logaritmo principal es continuo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$ y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ obtenemos que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y su derivada viene dada para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ por $\log'(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{1}{z}$. ✓

1.49 Teorema. *Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Equivalen las siguientes afirmaciones:*

(a) f tiene argumentos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $\vartheta:\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $\vartheta(z)\in\operatorname{Arg}(f(z))$ para $z\in\Omega$.

(b) f tiene logaritmos continuos en Ω, es decir, existe una función continua $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)\in\operatorname{Log} f(z)$ para $z\in\Omega$.

(c) f tiene logaritmos holomorfos en Ω, es decir, existe una función holomorfa $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g(z)\in\operatorname{Log} f(z)$ para $z\in\Omega$.

(d) La función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ tiene primitivas en Ω, es decir, existe $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi'(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z\in\Omega$.

Demostración.

$(a)\Rightarrow(b)$ Si ϑ es un argumento continuo entonces la aplicación $g(z)=\log|f(z)|+i\vartheta(z)$ es un logaritmo continuo de f.

$(b)\Rightarrow(a)$ Si g es un logaritmo continuo de f entonces $\operatorname{Im} g(z)$ es un argumento continuo de f.

$(b)\Rightarrow(c)$ Es consecuencia de la proposición anterior

$(c)\Rightarrow(d)$ Es consecuencia de la proposición anterior

$(d)\Rightarrow(b)$ Consideremos $h(z)=\exp(-\varphi(z))f(z)$. Tenemos que

$$h'(z)=\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\left[-\frac{f'(z)}{f(z)}f(z)+f'(z)\right]=0$$

y, en consecuencia, h es constante en cada componente conexa de Ω. Sea $\lambda(z)$ una función constante en cada componente conexa – y por tanto continua en Ω – que verifique $\mathrm{e}^{\lambda(z)}=h(z)$ para todo $z\in\Omega$. Resulta así que

$$\mathrm{e}^{\varphi(z)+\lambda(z)}=f(z)\qquad(z\in\Omega)$$

Hemos probado entonces que $\varphi(z)+\lambda(z)$ es un logaritmo continuo de $f(z)$ en Ω. ✓

1.50 Proposición. *En cualquier disco que no contenga al origen hay logaritmos holomorfos. Concretamente, si $a \in \mathbb{C}^*$, entonces en el disco $D(a,|a|)$ hay logaritmos holomorfos.*

Demostración. El apartado *(d)* de la proposición anterior (con $f(z) = z$) nos dice que debemos buscar una primitiva de $\dfrac{1}{z}$ en $D(a,|a|)$. Para ello vamos a expresar la función $\dfrac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en a.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{a+z-a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\dfrac{z-a}{a}} = \left(\text{cuando } \frac{|z-a|}{|a|} < 1\right)\\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n\end{aligned}$$

La anterior igualdad es válida cuando $\dfrac{|z-a|}{|a|} < 1$, esto es, $z \in D(a,|a|)$. Definimos la función

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(z-a)^{n+1} \qquad z \in D(a,|a|)$$

El teorema de derivación afirma que la función φ es derivable y su derivada se obtiene derivando la serie término a término, esto es, $\varphi'(z) = \dfrac{1}{z}$. Por la demostración de la proposición anterior sabemos que, para un valor conveniente de λ, $\varphi(z)+\lambda$ es un logaritmo holomorfo en $D(a,|a|)$, es decir,

$$e^{\varphi(z)+\lambda} = z \qquad z \in D(a,|a|)$$

Haciendo $z = a$ y teniendo en cuenta que $\varphi(a) = 0$ resulta $e^{\lambda} = a$, luego λ ha de ser un logaritmo de a. Por comodidad podemos tomar el logaritmo principal, $\lambda = \log(a)$. En conclusión, la función

$$\Phi(z) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(z-a)^{n+1} \qquad z \in D(a,|a|)$$

es un logaritmo holomorfo en $D(a,|a|)$ $\boxed{\checkmark}$

Inevitablemente surge la pregunta de si la función Φ coincide con el logaritmo principal en $D(a,|a|)$. Sabemos que

$$\Phi'(z) = \frac{1}{z} = \log'(z) \quad \text{y} \quad \Phi(a) = \log(a)$$

La igualdad $\Phi'(z) = \dfrac{1}{z} = \log'(z)$ es cierta siempre que ambas funciones, Φ y $\log$, sean derivables. Como sabemos $\log$ es holomorfo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$, lo que nos lleva a distinguir los casos:

- Si $\operatorname{Re}(a) \geqslant 0$, esto es, a se encuentra en el semiplano de la derecha, entonces tenemos que $D(a,|a|) \cap \mathbb{R}_o^- = \emptyset$ y, por tanto, $\log z$ es holomorfo en todo el disco $D(a,|a|)$. Puesto que ambas funciones tienen la misma derivada y coinciden en un punto son la misma función (ya que el disco es un dominio)
- Si $\operatorname{Re} a < 0$ y $a \notin \mathbb{R}^-$ entonces $D(a,|a|) \cap \mathbb{R}_o^- \neq \emptyset$ luego $\log z$ no es continua en todo el disco $D(a,|a|)$ y, evidentemente, las funciones Φ y $\log$ no pueden coincidir puesto que una es continua pero la otra no. Aunque en el disco completo es imposible que coincidan no así en el disco $D(a,|\operatorname{Im} a|)$, puesto que dicho disco no corta a $\mathbb{R}_o^-$ y el logaritmo principal sí es holomorfo ahí. Es más, las dos funciones coinciden en una región mayor que dicho disco, a saber, en la componente conexa en que queda dividido el disco $D(a,|a|)$ por el semieje $\mathbb{R}_o^-$ donde se encuentra el punto a (ver figura 1.5).

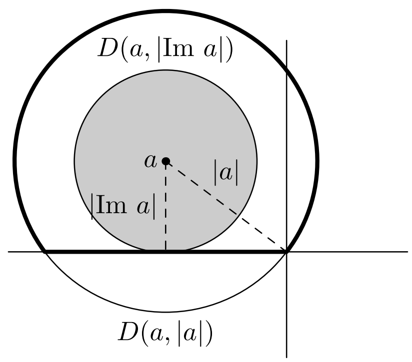


Figura 1.5: Analiticidad del logaritmo

Hemos justificado la siguiente igualdad

$$\log z = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (z-a)^{n+1} \tag{1.7}$$

para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ y $z \in D(a, \rho_a)$ con

$$\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$$

lo que prueba que el logaritmo es una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_o^-$.

1.51 Proposición. *Sea A un subconjunto* conexo *de $\mathbb{C}^*$, y supongamos que hay un argumento continuo, φ, en A. Entonces cualquier otro argumento continuo en A es de la forma $\varphi + 2k\pi$ para algún entero k.*

Demostración. Sea $\vartheta : A \to \mathbb{R}$ otro argumento continuo en A. La función $z \mapsto \dfrac{\varphi(z) - \vartheta(z)}{2\pi}$ es continua en A y toma valores enteros. Como A es conexo concluimos que dicha función es constante. $\boxed{\checkmark}$

1.52 Proposición. *Sea C un subconjunto de $\mathbb{C}^*$ que contiene a una circunferencia centrada en cero entonces en C no hay ningún argumento continuo. En particular, en $\mathbb{C}^*$ no hay argumentos continuos.*

Demostración. Supongamos que φ es un argumento continuo en C. Sea $C(0,\rho)^*$ una circunferencia contenida en C. La restricción de φ a $C(0,\rho)^* \setminus \{-\rho\}$ es un argumento continuo. Como el argumento principal también es un argumento continuo en dicho conjunto que es conexo deducimos, por la proposición anterior, que hay un entero k tal que $\arg(z) = \varphi(z) + 2k\pi$ para todo $z \in C(0,\rho)^* \setminus \{-\rho\}$. Como φ es continua en $C(0,\rho)^*$, la igualdad anterior implica que existe el límite $\displaystyle\lim_{\substack{z\to-\rho \\ |z|=\rho}} \arg(z)$ lo que, a su vez, implica que

$$\lim_{\substack{t\to\pi \\ 0<t<\pi}} \arg(\rho\,\mathrm{e}^{it}) = \lim_{\substack{t\to\pi \\ 0<t<\pi}} t = \pi = \lim_{\substack{t\to-\pi \\ -\pi<t<0}} \arg(\rho\,\mathrm{e}^{it}) = \lim_{\substack{t\to-\pi \\ -\pi<t<0}} t = -\pi$$

lo que es contradictorio. $\boxed{\checkmark}$

1.53 Definición. Dados una función compleja, f, definida en un subconjunto A de $\mathbb{C}$ y un número natural $n \geqslant 2$, cualquier función, $h : A \to \mathbb{C}$, tal que $(h(z))^n = f(z)$ para todo $z \in A$, se llama una (función) raíz de orden n de f en A. Una raíz de orden n de la función identidad en A se llama, simplemente, una raíz de orden n en A. Como de costumbre las (funciones) raíces de orden 2 se llaman raíces cuadradas. Las expresiones “raíz de orden n continua” o “raíz de orden n holomorfa” se entienden por sí mismas.

1.54 Proposición. *Sea f una función holomorfa y que no se anula en un abierto Ω. Si f tiene un logaritmo holomorfo en Ω entonces, para todo $n\in\mathbb{N}$, f también tiene raíces n-ésimas holomorfas en Ω.*

Demostración. Si $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ es tal que $\exp(g(z))=f(z)$ para todo $z\in\Omega$, entonces la función $h(z)=\exp(g(z)/n)$ es holomorfa en Ω y $(h(z))^n=f(z)$ para todo $z\in\Omega$. ✓

1.6.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a>0$ y $b\in\mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b=e^{b\log a}$. Ahora, dados $a,b\in\mathbb{C}$, con $a\neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a, todos ellos son de la forma $\log a+i2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $\mathrm{e}^{b(\log a+i2k\pi)}$ donde $k\in\mathbb{Z}$, es *una* potencia de base a y exponente b. Representaremos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$\boxed{[a^b]=\exp(b\operatorname{Log}(a))=\{\exp(bw): w\in\operatorname{Log}(a)\}}$$

De entre las potencias de base a y exponente b se destaca una:

$$\boxed{a^b=\mathrm{e}^{b\log a}}$$

y dicho número se llama *valor principal* de la potencia de base a y exponente b. Observa que si $b=1/n$ donde $n\in\mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}[a^{1/n}]&=\left\{\exp\left(\frac{1}{n}\Big(\log|a|+i\arg(a)+2k\pi i\Big)\right):k\in\mathbb{Z}\right\}=\\&=\left\{\exp\left(\frac{1}{n}\log|a|\right)\exp\left(\frac{i}{n}\Big(\arg(a)+2k\pi\Big)\right):k\in\mathbb{Z}\right\}=\\&=\left\{\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}\right):k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Es decir, $[a^{1/n}]$ es el conjunto de las raíces n-ésimas de a. Además

$$a^{1/n}=\exp\left(\frac{1}{n}\log a\right)=\exp\left(\frac{\log a}{n}+i\frac{\arg a}{n}\right)=|a|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg a}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n-ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

La definición anterior da lugar a las funciones exponenciales complejas de base a, $z \longmapsto a^z$, definidas por $a^z = \exp(z\log a)$ que son holomorfas en todo el plano.

Por otro lado la función potencia compleja de exponente b, es la función $z \mapsto z^b$, dada por $z^b = \exp(b\log z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$.

Las funciones exponenciales cumplen evidentemente la igualdad $a^{z+w} = a^z + a^w$ pero las funciones potencias no cumplen, en general como vimos al estudiar las raíces, la propiedad $(zw)^b = z^b w^b$. Esta igualdad se da en el caso de que

$$\exp(b\log(zw)) = \exp(b\log z + b\log w)$$

equivalentemente, puesto que la función exp es periódica de periodo $2\pi i$, cuando verifique que

$$b\log(zw) = b\log z + b\log w + 2k\pi i, \qquad \text{para algún } k\in\mathbb{Z}$$

Como caso particular, cuando z y w pertenecen al primer cuadrante sabemos que la igualdad $\log(zw) = \log z + \log w$ es cierta con lo cual lo anterior se cumple para $k = 0$. Por los mismos motivos la igualdad $(z^b)^c = z^{bc}$ no es cierta en general.

1.6.4. Funciones trigonométricas complejas

Seno y coseno complejos

Sustituyendo en la fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t$, t por $-t$ tenemos

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\operatorname{sen}(-t) = \cos t - i\operatorname{sen} t$$

y despejando obtenemos las llamadas "ecuaciones de Euler":

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}, \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}$$

Estas igualdades, válidas para todo $t\in\mathbb{R}$, también tienen sentido para números complejos. Por ello, para todo $z\in\mathbb{C}$ definimos el coseno y el seno complejos por:

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}$$

Es inmediato que el seno y coseno complejos extienden a las funciones seno y coseno reales.

Puesto que el coseno y el seno complejos está definidos como combinación de exponenciales sus propiedades se deducen fácilmente a partir de las propiedades de la exponencial.

(1) Identidad fundamental $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$

(2) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$

(3) Fórmulas de adición

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z+w) &= \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w\end{aligned}$$

(4) Las funciones seno y coseno son enteras y analíticas en $\mathbb{C}$ y

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(5) Relación con las funciones hiperbólicas

$$\cosh x = \cos(ix) \qquad \operatorname{senh}(x) = i \operatorname{sen}(ix)$$

(6) Para todo $z = x + iy$ se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y\end{aligned}$$

(7) Las funciones seno y coseno complejos no están acotadas en $\mathbb{C}$ aunque sí lo están en bandas horizontales de anchura acotada.

(8) Las funciones seno y coseno complejas no tienen más ceros que los reales, esto es, $\operatorname{sen} z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $2k\pi$ y $\cos z = 0$ si, y sólo si, z es real de la forma $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Demostración. Las propiedades (1) a (4) son inmediatas a partir de la definición.

(5) Recordemos que el seno y coseno hiperbólico están definidos para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}\cos(ix) &= \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x \\ \operatorname{sen}(ix) &= \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}}{2i} = i\frac{e^x - e^{-x}}{2} = i \operatorname{senh} x\end{aligned}$$

(6) Sea $z = x + iy$ un número complejo cualquiera. Usando la fórmula de adición (3) tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy) = \text{(usando las igualdades (5))}\\
&= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y\\
\cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy) = \text{(de nuevo usando (5))}\\
&= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

(7) Usando la propiedad anterior resulta

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 \operatorname{senh}^2 y =\\
&= \operatorname{sen}^2 x(1 + \operatorname{senh}^2 y) + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y =\\
&= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y\\
|\cos z|^2 &= \text{(de forma análoga)} = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y
\end{aligned}$$

y puesto que senh no está acotado se sigue que el coseno y el seno tampoco lo están. Ahora bien si acotamos la variable y entonces $\operatorname{senh} y$ está acotado y, por tanto, las funciones seno y coseno están acotadas en bandas horizontales de anchura acotada.

(8) De las igualdades

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \qquad |\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y$$

se deduce que $|\cos z| = 0$ (equivalentemente $\cos z = 0$) si, y sólo si, $\cos x = 0$ y $\operatorname{senh} y = 0$. Pero $\operatorname{senh} y = 0$ sólo en el caso en que $y = 0$. Con lo cual el coseno complejo se anula en los puntos $z = x + iy$ con $y = 0$, $x = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. El razonamiento para el seno es análogo.

Tangente compleja

Por analogía con la tangente real definimos la función tangente compleja como

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \big(z \in \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}\big)}$$

Puesto que el seno y el coseno son funciones enteras la tangente compleja es una función holomorfa en su dominio de definición $\mathbb{C} \setminus \{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Las propiedades de la tangente se deducen con facilidad de las propiedades del seno y el coseno. Por ejemplo, puedes comprobar que

$$\operatorname{tg}(z+w) = \frac{\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} z \operatorname{tg} w}$$

1.6.5. Funciones trigonométricas inversas

Arcocoseno complejo

Dado un número complejo $z\in\mathbb{C}$ se trata de calcular los complejos w tales que $\cos w = z$.

$$\frac{\mathrm{e}^{iw}+\mathrm{e}^{-iw}}{2}=z \iff \mathrm{e}^{iw}+\mathrm{e}^{-iw}-2z=0$$

puesto que $\exp(w)\neq 0$ para cualquier w, podemos multiplicar por e^{iw} la expresión anterior

$$\mathrm{e}^{2iw}-2z\mathrm{e}^{iw}+1=0$$

Poniendo $u=\mathrm{e}^{iw}$, la ecuación anterior podemos escribirla $u^2-2zu+1=0$, cuyas raíces son

$$u=z\pm\sqrt{z^2-1}=z\pm i\sqrt{1-z^2}$$

Observa que dichas raíces son distintas de 0, de hecho una es inversa de la otra pues su producto es igual a 1. Hemos obtenido que:

$$\exp(iw)=z\pm i\sqrt{1-z^2} \iff iw\in \operatorname{Log}(z\pm i\sqrt{1-z^2}\,) \iff \cos w = z$$

Naturalmente, hay infinitos valores de w que verifican la igualdad anterior. El conjunto de todos ellos se representa por $\operatorname{Arccos} z$.

$$\boxed{\operatorname{Arccos} z=\frac{1}{i}\operatorname{Log}(z\pm i\sqrt{1-z^2}\,)}$$

De todos ellos elegimos el que corresponde al logaritmo principal y le llamamos valor principal de $\operatorname{Arccos} z$ que está definido por:

$$\boxed{\arccos z=\frac{1}{i}\log(z+ i\sqrt{1-z^2}\,)}$$

Veamos que el $\arccos z$ extiende al arcocoseno real. En efecto, para $z=x\in[-1,1]$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}\log(x+i\sqrt{1-x^2}) &= \frac{1}{i}\Big(\log\Big|x+i\sqrt{1-x^2}\,\Big|+i\arg(x+i\sqrt{1-x^2}\,)\Big)=\\ &=\frac{1}{i}\Big(\log 1+i\arg(x+i\sqrt{1-x^2}\,)\Big)=\arg(x+i\sqrt{1-x^2}\,)\end{aligned}$$

Observemos que $(x,\sqrt{1-x^2}\,)$ es un punto de la mitad superior de la circunferencia unidad y una medida del ángulo que forma el número complejo $x+i\sqrt{1-x^2}$ con el eje real positivo es precisamente el arco cuyo coseno es x. Además, para $x\in[-1,1]$ se tiene que $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. Deducimos que $\arg(x+i\sqrt{1-x^2}\,)=\arccos x$.

Teniendo en cuenta que $\sqrt{1-z^2} = \exp(\frac{1}{2}\log(1-z^2))$, y que el logaritmo principal es holomorfo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, deducimos, por la regla de la cadena, que la función $z\mapsto\sqrt{1-z^2}$ es holomorfa en el conjunto

$$\Omega=\left\{z\in\mathbb{C}:1-z^2\notin\mathbb{R}_o^-\right\}=\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$$

Análogamente $\log(z+i\sqrt{1-z^2})$ es derivable en el conjunto

$$\Omega_1=\left\{z\in\mathbb{C}:z+i\sqrt{1-z^2}\notin\mathbb{R}_o^-\right\}$$

Como $z+i\sqrt{1-z^2}$ y $z-i\sqrt{1-z^2}$ son inversos, tenemos que

$$z+i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^-\Rightarrow z-i\sqrt{1-z^2}\in\mathbb{R}_o^-\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}z\in\mathbb{R}^-\\ \sqrt{1-z^2}\in i\mathbb{R}\end{array}\right\}\Rightarrow z\in]-\infty,-1]$$

deducimos que $\Omega_1=\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1]\supset\Omega$. Luego el arcocoseno es holomorfo en Ω. La regla de la cadena nos permite calcular su derivada

$$\arccos{}'z=\frac{1}{i}\,\frac{1+i\dfrac{-z}{\sqrt{1-z^2}}}{z+i\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{iz-\sqrt{1-z^2}}=\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

Arcoseno complejo

Dado un número complejo z queremos calcular los complejos w tales que $\operatorname{sen}w=z$. El conjunto de tales números lo representaremos por $\operatorname{Arcsen}z$. Aunque podemos repetir el mismo proceso anterior, podemos aprovechar lo ya hecho y observar que

$$\operatorname{sen}w=\cos\left(\frac{\pi}{2}-w\right)$$

luego $\operatorname{sen}w=z$ si, y sólo si, $\dfrac{\pi}{2}-w\in\dfrac{1}{i}\operatorname{Log}\left(z\pm i\sqrt{1-z^2}\right)$. Es decir

$$\boxed{\operatorname{Arcsen}z=\frac{\pi}{2}+i\operatorname{Log}\left(z\pm i\sqrt{1-z^2}\right)}$$

El valor principal del arcoseno, que notaremos por $\operatorname{arc\,sen}z$, se define eligiendo el logaritmo principal:

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}z=\frac{\pi}{2}+i\log\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right)\qquad z\in\mathbb{C}}$$

y es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[)$.

Arcotangente compleja

Dado $z \in \mathbb{C}$ queremos calcular los complejos w tales que $z = \operatorname{tg} w$, esto es, $z = \dfrac{\operatorname{sen} w}{\cos w}$ o, lo que es lo mismo , $z \cos w = \operatorname{sen} w$. El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Arctg} z$. Escribiendo la definición de seno y coseno

$$\frac{\mathrm{e}^{iw} - \mathrm{e}^{-iw}}{2i} = z\frac{\mathrm{e}^{iw} + \mathrm{e}^{-iw}}{2}$$

Si $z = \pm i$ la ecuación anterior no tiene solución por lo que consideramos $z \neq \pm i$. Multiplicando por $e^{iw} = u$ la expresión anterior resulta

$$u^2 - 1 = iz(u^2 + 1) \Rightarrow u^2(1 - iz) = 1 + iz$$

puesto que $z \neq -i$ podemos escribir $u^2 = \dfrac{1+iz}{1-iz}$, esto es,

$$\mathrm{e}^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz} \Longleftrightarrow w \in \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)$$

Por tanto

$$\boxed{\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Definimos el valor principal de $\operatorname{Arctg} z$ por:

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad (z \neq \pm i)}$$

Puedes probar ahora que la función $\operatorname{arc\,tg} z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i\rho : \rho \in \mathbb{R}, |\rho| > 1\}$

Es fácil probar que la función arcotangente compleja, al igual que ocurre con las demás funciones trigonométricas complejas, extiende a la función arcotangente real.

1.6.6. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 41 Calcula el módulo y el argumento principal de los números

$$1 + \mathrm{e}^{i\vartheta},\ 1 - \mathrm{e}^{i\vartheta},\ -a\,\mathrm{e}^{i\vartheta}$$

donde $|\vartheta| \leqslant \pi$ y $a > 0$.

Ejercicio resuelto 42 Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i^i,\ \mathrm{e}^i,\ \mathrm{e}^{-1+i},\ -1+i$$

Ejercicio resuelto 43 Calcula $\log(-1-i)-\log i$ y $\log\left(\dfrac{-1-i}{i}\right)$.

Ejercicio resuelto 44 Calcula $[(-4)^i]$, 3^{1-i}, $((-i)^i)^i$, $(1+i)^{1+i}$.

Ejercicio resuelto 45 a) Estudia, para $z\in\mathbb{C}^*$ y $n\in\mathbb{N}$, las igualdades:

$$\text{a) } \log(\exp(z))=z\,;\quad \text{b) } \exp(\log(z))=z\,;\quad \text{c) } \log\left(\frac{1}{z}\right)=-\log(z)\,;$$

$$\text{d) } \log(\sqrt[n]{z})=\frac{\log(z)}{n}\,;\quad \text{e) } \log(z^n)=n\log(z).$$

b) Prueba que el logaritmo principal establece una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$ y $\Omega=\{z\in\mathbb{C}^* : -\pi<\operatorname{Im}(z)<\pi\}$.

Ejercicio resuelto 46 Con una interpretación adecuada de la suma justifica que:

$$\operatorname{Arg}(zw)=\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(w)\qquad \operatorname{Log}(zw)=\operatorname{Log}(z)+\operatorname{Log}(w)$$

Ejercicio resuelto 47 Estudia, interpretándolas convenientemente cuando sea necesario, las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \operatorname{Log}[a^b]=b\operatorname{Log}(a)\quad \text{b) } \log[a^b]=b\operatorname{Log}(a)\quad \text{c) } \log(a^b)=b\log a$$

Ejercicio resuelto 48 Sean $a\in\mathbb{C}$ y $\{z_n\}$ una sucesión de complejos no nulos verificando que $\{|z_n|\}\to+\infty$. Justifica que

$$\left\{\left(1+\frac{a}{z_n}\right)^{z_n}\right\}\to\exp(a)\,;\quad \left\{z_n\left(a^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\right\}\to\log(a)\quad (a\neq 0)$$

Ejercicio resuelto 49 Prueba que

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n\quad \forall z\in D(0,1)$$

a) Deduce que para todo $\theta\in]-\pi,\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos(n\theta)=\log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(n\theta)=\frac{\theta}{2}.$$

b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta\in]0,2\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}=-\log\left(2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}.$$

Ejercicio resuelto $\boxed{50}$ Justifica que la función $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por:

$$f(z)=2z-(1+z)\log(1+z)+(1-z)\log(1-z) \quad (z\neq\pm 1),$$

y $f(1)=2-2\log(2)=-f(-1)$, es holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{x\in\mathbb{R}:|x|\geqslant 1\}$ y, para todo $z\in\overline{D}(0,1)$, se verifica que $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$. Calcula, en particular, la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

Solución.
Teniendo en cuenta que la suma, producto y composición de funciones holomorfas también es una función holomorfa, y que la función *logaritmo principal* es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, se sigue que f es holomorfa en el conjunto

$$\mathcal{A}=\{z\in\mathbb{C}:1+z\notin\mathbb{R}_o^-,1-z\notin\mathbb{R}_o^-\}$$

Como, evidentemente, $1+z\in\mathbb{R}_o^-$ si, y sólo si, $z\in\mathbb{R}$ y $z\leqslant -1$, es decir, $z\in]-\infty,-1]$; y $1-z\in\mathbb{R}_o^-$ si, y sólo si, $z\in\mathbb{R}$ y $z\geqslant 1$, es decir, $z\in[1,+\infty[$; resulta que $\mathcal{A}=\Omega$.

Como

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \qquad (|z|<1)$$

Deducimos que la función

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1} \qquad (|z|<1)$$

es holomorfa en $D(0,1)$ y $\varphi'(z)=\dfrac{1}{1+z}$. Como la función $z\mapsto\log(1+z)$ también es holomorfa en $D(0,1)$, tiene la misma derivada que φ y $\varphi(0)=\log(1+0)=0$, se sigue que $\varphi(z)=\log(1+z)$ para todo $z\in D(0,1)$. Hemos probado que

$$\log(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n \qquad (|z|<1)$$

Se sigue que, para $|z|<1$, es:

$$\begin{aligned}
f(z) &= 2z-\log(1+z)+\log(1-z)-z(\log(1+z)+\log(1-z))=\\
&= 2z+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n}z^n-z\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n}z^n=\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{2n+1}z^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{2n+1}\right)z^{2n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n(2n+1)}$ es convergente, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$ converge uniformemente en $\overline{D}(0,1)$ y, por tanto, la función $h:\overline{D}(0,1)\to\mathbb{C}$ definida por $h(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{2n+1}}{n(2n+1)}$, es continua en $\overline{D}(0,1)$. Como para todo $z\in D(0,1)$ es $h(z)=f(z)$, si *justificamos que f es continua en $\overline{D}(0,1)$*, se deducirá que $h(z)=f(z)$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$. Ahora bien, puesto que $\overline{D}(0,1)\setminus\{\pm 1\}\subseteq\Omega$, bastará probar que f es continua en 1 y en -1. Teniendo en cuenta que

$$|1-z||\log(1-z)|\leqslant|1-z|\,|\log(|1-z|)|+|1-z|\pi$$

y que $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\log t=0$, se sigue que $\lim\limits_{z\to 1}f(z)=f(1)$. Igualmente $\lim\limits_{z\to -1}f(z)=f(-1)$.

Finalmente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)} &= \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^{2n+1}}{n(2n+1)}=\frac{2i-(1+i)\log(1+i)+(1-i)\log(1-i)}{i}=\\ &= \frac{2i-(1+i)(\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})+(1-i)(\log\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}{i}=\\ &= \frac{2i-2i\log\sqrt{2}-i\frac{\pi}{2}}{i}=2-\log 2-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

☺

Ejercicio resuelto 51 Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 0}c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R\in\mathbb{R}^+$. Sea f la función suma de la serie. Prueba que para cada $r\in]0,R[$ se verifica la igualdad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{it})\right|^2\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n}$$

1.6.7. Ejercicios propuestos

59. Expresa los ocho números $\pm 1\pm i$, $\pm\sqrt{3}\pm i$ en la forma $re^{i\vartheta}$.

60. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes

$$i,\ -i,\ e^{-3},\ e^{5i},\ 4,\ -5e,\ 1+i$$

61. Calcula $\log(3i)+\log(-1+i\sqrt{3})$ y $\log\big(3i(-1+i\sqrt{3})\big)$.

62. Calcula
$$[(-i)^i],\ i^{-3i},\ [i^{2/\pi}],\ [i^i],\ 1^{2i},\ (3^{-i})^{1/3},\ ((-i)^{1/2})^i,\ (1-i)^{1+i}$$

63. Indica el error en los razonamientos siguientes: $(-z)^2=z^2$; por tanto $2\operatorname{Log}(-z)=2\operatorname{Log}(z)$ y, por consiguiente, $\operatorname{Log}(-z)=\operatorname{Log}(z)$.

64. Explica con detalle dónde está el error en las igualdades siguientes:
$$i=(-1)^{1/2}=\big((-1)^3\big)^{1/2}=(-1)^{3/2}=i^3=-i$$

65. Sea $a\in\mathbb{C}^*$ y $\beta=\arg a$. Prueba que $\operatorname{Re}(z\mathrm{e}^{-i\beta})>0$ para todo $z\in D(a,|a|)$. Deduce que en todo disco que no contiene el origen hay argumentos continuos y por tanto logaritmos holomorfos.

66. Calcula la imagen por la función exponencial de:

i) Una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

ii) Una banda horizontal de anchura menor que 2π.

iii) Un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados.

iv) El conjunto $\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$.

67. ¿Tiene la función exponencial límite en infinito? Dado $w\in\mathbb{C}$ con $|w|=1$, estudia la existencia del límite $\lim\limits_{r\to+\infty}\exp(rw)$.

68. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función verificando
$$f(z+w)=f(z)f(w),\quad \forall z,w\in\mathbb{C}.$$
Probar que si f es derivable en un punto entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha propiedad y no sea entera.

69. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que f tiene argumentos continuos en Ω. Justifica que f tiene raíces holomorfas en Ω de cualquier orden.

70. Justifica que en ningún conjunto A que contenga a una circunferencia centrada en cero puede haber (funciones) raíces cuadradas continuas.

71. Da condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto $[a^b]$ de las potencias de base a y exponente b sea finito.

72. Estudia qué relación hay entre los conjuntos $[a^{m/n}]$ y $[(a^m)^{1/n}]$, donde $a\in\mathbb{C}^*$, $m,n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2$. ¿Qué puede afirmarse, en particular, cuando m y n son primos entre sí?.

73. Sean $\rho > 0$, $\alpha < \beta$ tales que $\rho\alpha, \rho\beta, \alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$. Prueba que $z \mapsto z^\rho$ es una biyección de $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg z < \beta\}$ sobre $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg z < \rho\beta\}$.

74. Calcula las partes real e imaginaria de los números

$$\operatorname{sen}(1+i), \quad \cos(1-i), \quad \operatorname{tg}(1+2i)$$

75. Indica los conjuntos de puntos $z \in \mathbb{C}$ donde las funciones e^z, $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{arc\,sen} z$, $\operatorname{arc\,tg} z$ toman:

a) Valores reales.

b) Valores imaginarios puros.

76. Calcula $\operatorname{Arcsen}(1+i)$, $\operatorname{Arctg}(1-i)$, $\operatorname{arc\,sen} i$, $\operatorname{arc\,tg} 2i$.

77. Estudia la convergencia puntual de las series de funciones:

$$\text{a)} \sum_{n \geqslant 0} \exp(-nz) \quad \text{b)} \sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(nz)}{3^n} \quad \text{c)} \sum_{n \geqslant 0} \exp(-nz^2) \quad \text{d)} \sum_{n \geqslant 0} nz \exp(-nz^2)$$

Describe conjuntos en los que hay convergencia uniforme.

78. Consideremos la función f definida por $f(z) = \log\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Prueba que f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$ y, en particular, en $D(0,1)$. Prueba también que $f(z) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $\forall z \in D(0,1)$ y aplica este resultado para calcular la suma de las series

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} \qquad \sum_{n \geqslant 0} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1} \quad (0 < \theta < \pi)$$

Capítulo 2

Teoría de Cauchy Elemental

2.1. Introducción

En este capítulo estaremos interesados en el problema de la existencia de primitivas lo cual está estrechamente relacionado, ver teorema 1.49, con la existencia de logaritmos holomorfos.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que toda función real de variable real continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo. La situación es muy distinta para funciones complejas de variable compleja. Ni siquiera el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio garantiza que tenga primitivas en dicho dominio.

2.1 Ejemplo. La función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y no tiene primitivas en dicho dominio.

En efecto, en virtud del teorema 1.49, la existencia de primitivas en $\mathbb{C}^*$ de la función $f(z) = \dfrac{1}{z}$ equivale a la existencia de argumentos continuos en $\mathbb{C}^*$ y, por la proposición 1.52, sabemos que no hay argumentos continuos en $\mathbb{C}^*$.

A pesar de este resultado, en este capítulo probaremos que toda función holomorfa en un disco tiene primitivas en dicho disco. Es decir, toda función holomorfa en un abierto tienen *localmente* primitivas en dicho abierto.

Como ya debes saber, la herramienta que se usa para la construcción de primitivas es la integración. No debe extrañarte por ello que en este capítulo nuestra herramienta básica sea la integración de funciones complejas. Uno de los resultados más importantes que obtendremos es la llamada "fórmula de Cauchy para una circunferencia" que permite representar los valores que una función holomorfa toma en un disco por medio de una integral en la que solamente intervienen los valores de dicha función en la circunferencia frontera del disco. De dicha fórmula se deduce sin dificultad uno de los resultados más importantes y sorprendentes de la teoría de funciones holomorfas, el teorema de Taylor que afirma que toda función holomorfa es analítica.

También obtendremos en este capítulo el teorema de Liouville estableciendo que toda función entera y acotada es constante y, como consecuencia, el Teorema Fundamental del Álgebra afirmando que $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.

Lo más llamativo de todo es que estos resultados los vamos a obtener con facilidad y con una herramienta muy elemental: la integral de Riemann de funciones continuas.

2.2. Integral de Riemann para funciones de variable real con valores complejos

Diremos que una función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ es *integrable Riemann* en el intervalo $[a,b]$, y escribiremos $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, si las funciones $\operatorname{Re}(\varphi)$ y $\operatorname{Im}(\varphi)$ son integrables Riemann en $[a,b]$ (en el sentido que conocemos, ya que son funciones reales de variable real definidas en un intervalo) en cuyo caso definimos la integral de φ en $[a,b]$ como el número complejo

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}\varphi(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im}\varphi(t)\,dt$$

Es claro que una condición necesaria para la integrabilidad de φ es la acotación. La integrabilidad se puede caracterizar en los siguientes términos:

2.2 Criterio de integrabilidad de Lebesgue. *Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ una función acotada. Entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ si, y sólo si, φ es continua casi por doquier en $[a,b]$. En particular, toda función acotada y continua salvo en un número finito de puntos es integrable.*

En lo sucesivo la expresión "f es integrable" se entenderá como "f es integrable Riemann". Indicamos a continuación las propiedades principales de la integral de Riemann de funciones de variable real con valores complejos. Todas ellas se deducen con facilidad de las propiedades correspondientes de la integral de Riemann de funciones reales de variable real que suponemos conocidas.

Propiedades

1. El conjunto $\mathcal{R}([a,b])$ es un espacio vectorial complejo y la aplicación $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ es una forma lineal. Además, el producto de funciones integrables Riemann en $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$.

2. **Acotación básica** Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ se verifica que $|\varphi| \in \mathcal{R}([a,b])$ y

$$\boxed{\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup\{|\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}(b-a)} \tag{2.1}$$

La segunda desigualdad es conocida. La estrategia para probar la primera parte de esta desigualdad consiste en reducirla a la conocida desigualdad análoga para funciones reales. Para ello, pongamos $\alpha = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Si $\alpha = 0$ no hay nada que probar. Sea, pues, $\alpha \neq 0$ y sea $\beta = \overline{\alpha}/|\alpha|$. Tenemos que

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = |\alpha| = \beta\alpha = \beta\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \beta\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Esta igualdad nos dice que la última integral es un número real positivo pues es igual a $|\alpha|$, luego

$$\int_a^b \beta\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \operatorname{Re}\big(\beta\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \left|\operatorname{Re}\big(\beta\varphi(t)\big)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |\beta\varphi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

3. Si $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funciones integrables en $[a,b]$ que converge uniformemente a φ en $[a,b]$, entonces φ es integrable y $\lim \int_a^b \varphi_n = \int_a^b \varphi$. En particular, si $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ es una serie de funciones integrables que converge uniformemente en $[a,b]$, entonces la función $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t}$$

En efecto, que la función φ es integrable es consecuencia de que la convergencia uniforme conserva la continuidad y la acotación. Por la desigualdad básica, se tiene que

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (\varphi_n(t)-\varphi(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)\sup\{|\varphi_n(t)-\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\}$$

Y, por definición de convergencia uniforme, $\sup\{|\varphi_n(t)-\varphi(t)| : a \leqslant t \leqslant b\} \to 0$.

4. **Aditividad respecto al intervalo**. Si $a < c < b$ y $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$ entonces $\varphi \in \mathcal{R}([a,c])$ y $\varphi \in \mathcal{R}([c,b])$ y

$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$

5. **Teorema fundamental del cálculo**. Si $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces la función dada por

$$G(t) = \int_a^t \varphi(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [a,b])$$

es continua. Si, además, φ es continua, entonces G es una primitiva de φ en $[a,b]$.

6. **Regla de Barrow**. Si $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ es derivable en $[a,b]$ y $F' \in \mathcal{R}([a,b])$, entonces

$$\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

7. **Fórmula del cambio de variable** Sea $\lambda : [c,d] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente con derivada continua. Supongamos que φ es integrable en $[\lambda(c),\lambda(d)]$. Entonces

$$\int_{\lambda(c)}^{\lambda(d)} \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \int_c^d \varphi\big(\lambda(t)\big)\lambda'(t)\,\mathrm{d}t$$

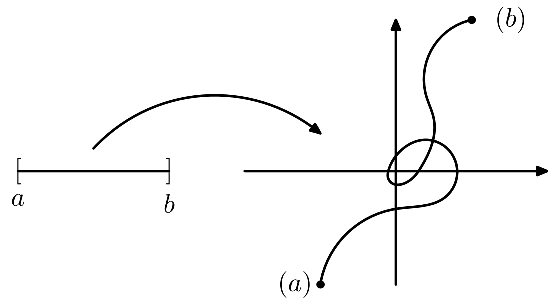
2.3. Curvas en el plano

Una curva en $\mathbb{C}$ es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^* = \gamma([a,b])$. Es claro que γ^* es un conjunto compacto y conexo. Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

Se dice que γ es una curva *cerrada* cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diremos que una curva es *regular*[1] si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase C^1.

[1]En Geometría por *curva regular* se entiende una curva con derivada continua *cuyo vector derivada no se anula en ningún punto.*



2.3 Curvas regulares a trozos o caminos. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es *regular a trozos*, y la llamaremos un *camino*, si hay una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de $[a,b]$ de manera que $\gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$ es regular para $1 \leqslant k \leqslant n$.

Operaciones con las curvas

Curva opuesta de γ

Llamaremos curva opuesta de una dada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, y la notaremos por $\dot{-}\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, a la curva definida por

$$(\dot{-}\gamma)(t) = \gamma(b+a-t)$$

Se trata de una curva que tiene la misma traza que γ pero la recorre en sentido contrario, esto es, el punto inicial de $\dot{-}\gamma$ es el punto final de γ y viceversa.

Yuxtaposición de curvas

Dadas dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(b) = \sigma(c)$, definimos una nueva curva que llamaremos yuxtaposición de γ y σ o también suma de γ y σ, y la notaremos por $\gamma \dot{+} \sigma$, como

$$(\gamma \dot{+} \sigma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ \sigma(c-b+t) & b \leqslant t \leqslant b+d-c \end{cases}$$

Geométricamente se trata de "pegar" las trazas de γ y σ, de ahí que se exija que $\gamma(b) = \sigma(c)$, esto es, que podamos pegarlas de forma continua. Evidentemente en los puntos de unión entre una curva y otra puede que no haya derivabilidad. Es fácil probar que $(\gamma \dot{+} \sigma)^* = \gamma^* \cup \sigma^*$.

Observa que la yuxtaposición de dos caminos también es un camino.

Caminos más usuales

- **Segmento de origen** z **y extremo** w. Es la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = (1-t)z + tw$$
Notaremos a esta curva como $\gamma = [z,w]$. Resaltemos que no se trata de un intervalo en $\mathbb{C}$ ya que en $\mathbb{C}$ no hemos definido ningún orden.
Es fácil comprobar que $\dot{-}[z,w] = [w,z]$
- **Circunferencias de centro** a **y radio** r. Es la curva $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definida por
$$\gamma(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$$
La vamos a representar por el símbolo $C(a,r)$. No hay que confundir a la curva con su imagen, que en este caso es una circunferencia y que notamos como $C(a,r)^* \subset \mathbb{C}$.
- **Poligonal de vértices** $z_0, z_1, \dots, z_n$. Es la curva
$$[z_0,z_1] \dot{+} [z_1,z_2] \dot{+} \cdots \dot{+} [z_{n-1},z_n]$$
y la representaremos por $[z_0,z_1,\dots,z_n]$. La poligonal es un camino, es decir, es una curva regular a trozos.

2.4 Longitud de un camino. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces γ' está definida y es continua en $[a,b]$ excepto en un conjunto finito de puntos de $]a,b[$ en los cuales tiene límites laterales distintos, dándole a γ' en cada uno de esos puntos el valor del límite por la izquierda (aunque esto es totalmente irrelevante, podemos darle cualquier valor) es claro que γ' es acotada en $[a,b]$ y tiene un número finito de discontinuidades, luego es integrable en $[a,b]$. Se define la *longitud* de γ por
$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$$

2.5 Curvas equivalentes. Dos curvas $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se dice que son *equivalentes* cuando existe una aplicación $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ cumpliendo

- $\varphi \in C^1([c,d])$
- $\varphi'(u) > 0$ para todo $u \in [c,d]$
- $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$

y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. En tal caso se dice también que σ es una *reparametrización* de γ.

Dos curvas equivalentes tienen la misma traza, mismo punto inicial y mismo punto final.

2.4. Integral curvilínea

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la *integral de f a lo largo del camino* γ como el número complejo

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Observemos que $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función de variable real con valores complejos que está acotada y solamente puede tener un número finito de discontinuidades, luego la integral de la derecha es la integral que ya hemos definido antes.

En lo que sigue notaremos $\mathcal{C}(\gamma^*)$ el espacio vectorial complejo de las funciones complejas continuas en γ^*.

Propiedades

1. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ son caminos equivalentes y $f \in \mathcal{C}(\gamma^*)$ se verifica que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

En efecto, puesto que $\gamma^* = \sigma^*$ la integral de f a lo largo de σ está definida. Por hipótesis existe una aplicación $\varphi \in \mathcal{C}^1([c,d])$ con derivada positiva que transforma $[c,d]$ en $[a,b]$ y tal que $\gamma \circ \varphi = \sigma$. Tenemos así que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t = \varphi(s) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\Big(\gamma\big(\varphi(s)\big)\Big)\gamma'\big(\varphi(s)\big)\varphi'(s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_c^d f\big(\sigma(s)\big)\sigma'(s)\,\mathrm{d}s = \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

2. Dados dos caminos γ, σ y una función compleja f continua en $\gamma^* \cup \sigma^*$ se cumple

$$\int_{\gamma \dot{+} \sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

En efecto, por las definiciones dadas

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\dot{+}\sigma} f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_a^{b+d-c} f\big((\gamma\dot{+}\sigma)(t)\big)(\gamma\dot{+}\sigma)'(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{b+d-c} f\big(\sigma(t-b+c)\big)\sigma'(t-b+c)\,\mathrm{d}t = \\
&= \begin{bmatrix} s = t-b+c \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^d f\big(\sigma(s)\big)\sigma'(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\int_{\dot{-}\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. Es de comprobación inmediata.

4. Acotación básica

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \big|f\big(\gamma(t)\big)\big|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)
\end{aligned}$$

5. Linealidad. Se verifica que la aplicación $f \longmapsto \int_\gamma f$ del espacio vectorial $\mathcal{C}(\gamma^*)$ en $\mathbb{C}$ es una forma lineal.

6. Permutación del límite uniforme y la integral. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones continuas en γ^* que converge uniformemente en γ^* a una función f, se verifica que f es continua en γ^* y

$$\text{lím} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

En particular

$$\boxed{\int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z}$$

siempre que la serie converja uniformemente en γ^*.

Esto es consecuencia inmediata de la desigualdad

$$\left| \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z - \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int_\gamma (f_n(z) - f(z))\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \text{máx}\{|f_n(z) - f(z)| : z \in \gamma^*\}\,\ell(\gamma)$$

El cálculo de una integral curvilínea es inmediato si se conoce una primitiva de la función que integramos.

2.6 Regla de Barrow para integrales curvilíneas. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función continua en Ω y supongamos que hay una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino cualquiera en Ω (esto es, $\gamma^* \subset \Omega$), entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que γ es un camino regular, es decir, γ tiene derivada continua en $[a,b]$. En tal caso la función $h(t) = (F \circ \gamma)(t)$ es derivable en $[a,b]$ con

$$h'(t)) = F'\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) = f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t) \qquad (t \in [a,b])$$

Por lo que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

Supongamos ahora que γ es regular a trozos. Entonces existe una partición del intervalo $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ de forma que $\gamma_k = \gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$ es una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$. Teniendo en cuenta lo antes visto resulta que

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \Big(F\big(\gamma_k(t_k)\big) - F\big(\gamma_k(t_{k-1})\big)\Big) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(F\big(\gamma(t_k)\big) - F\big(\gamma(t_{k-1})\big)\Big) = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)\end{aligned}$$

como pretendíamos demostrar. ☑

2.4.1. Existencia de primitivas

De la regla de Barrow se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

2.7 Condición necesaria para la existencia de primitivas. *Si una función continua f en un abierto Ω admite una primitiva en Ω, entonces la integral curvilínea de f es la misma para todos los caminos en Ω que tienen los mismos puntos inicial y final. En particular, para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que $\int_\gamma f(w)\,dw = 0$.*

2.8 Proposición. *La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie. En consecuencia, una función analítica en un abierto tiene localmente primitivas.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ es una serie de potencias no trivial. Sea Ω su dominio de convergencia y para $z\in\Omega$ sea $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ la función suma. Se deduce del lema 1.40 que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ tiene también como dominio de convergencia Ω. El teorema de derivación de series de potencias nos dice que la función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ es una primitiva de φ en Ω. $\boxed{\checkmark}$

Volviendo al ejemplo del principio del capítulo, sea $f(z) = \dfrac{1}{z}$ para $z\in\mathbb{C}^*$. Tenemos que

$$\int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\mathrm{e}^{it}}i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0$$

luego f no tiene primitiva en $\mathbb{C}^*$ (cosa que ya sabíamos). Pero vimos en el Capítulo I que f es analítica en $\mathbb{C}^*$ con lo cual f tiene primitivas localmente. Esto pone de manifiesto que *el problema de existencia de primitivas es un problema global no local.*

El anterior corolario nos dio una condición necesaria para la existencia de primitiva de una función. Esta condición es también suficiente. El siguiente lema es de interés.

2.9 Lema. *Dos puntos cualesquiera de un dominio se pueden unir mediante una poligonal contenida en el dominio.*

Demostración. Sea Ω un dominio. Fijemos un punto $a \in \Omega$ y sea W el conjunto de los puntos $z \in \Omega$ que pueden unirse con a por medio de una poligonal en Ω. Evidentemente, $a \in W$. Si $b \in W$ y $D(b,r) \subset \Omega$, es claro que $D(b,r) \subset W$; pues si $z \in D(b,r)$ podemos añadir a una poligonal en Ω que une a con b el segmento $[b,z]$ (que está contenido en el disco $D(b,r)$ y, por tanto, en Ω) y obtenemos así una poligonal en Ω que une a con z. Esto prueba que W es abierto. Veamos que también es cerrado relativo a Ω. Sea $c \in \overline{W} \cap \Omega$. Como $c \in \Omega$ tiene que haber un $\rho > 0$ tal que $D(c,\rho) \subset \Omega$. Como $c \in \overline{W}$ tiene que haber un punto $z_0 \in D(c,\rho/2) \cap W$. Entonces tenemos que $D(z_0,\rho/2) \subset D(c,\rho)$ luego $D(z_0,\rho/2) \subset \Omega$ y, por lo antes visto, se sigue que $D(z_0,\rho/2) \subset W$ y, como $c \in D(z_0,\rho/2)$, concluimos que $c \in W$ lo que prueba que $W = \overline{W} \cap \Omega$, es decir, W es cerrado relativo a Ω. Por conexión concluimos que $W = \Omega$. ☑

2.10 Caracterización de existencia de primitivas. *Sea f una función continua en un abierto Ω. Se verifica que f tiene primitivas en Ω si, y sólo si, la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.*

Demostración. Basta ver la condición suficiente. Supongamos que la integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que Ω es un dominio.

Fijamos un punto $z_0 \in \Omega$. Dado $z \in \Omega$, sea γ_z cualquier camino en Ω cuyo punto inicial sea z_0 y cuyo punto final sea z (dicho camino existe en virtud del lema anterior).

Definimos $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$. Veamos que está bien definida, esto es, no depende del camino γ_z. Sea σ_z otro camino en Ω con punto inicial z_0 y punto final z. Consideremos $\Gamma = \gamma_z \dot{+} (\dot{-}\sigma_z) \equiv \gamma_z \dot{-} \sigma_z$. Γ así definido es un camino cerrado en Ω. La hipótesis afirma que

$$0 = \int_{\Gamma} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{\dot{-}\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$$

con lo cual $\int_{\gamma_z} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\sigma_z} f(w)\,\mathrm{d}w$ y F está bien definida.

Sea $a \in \Omega$. Dado $\varepsilon > 0$, por continuidad de f existe $\delta > 0$ de forma que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para $w \in D(a,\delta)$ se cumple que $|f(w) - f(a)| < \varepsilon$.

Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos que $[a,z]^* \subset D(a,\delta)$ y $\Gamma = \gamma_z \dot{+} [z,a] \dot{-} \gamma_a$ es un camino cerrado en Ω por lo que $\int\limits_{\Gamma} f(w)\,dw = 0$, de donde se deduce que

$$\int\limits_{\gamma_z} f(w)\,dw - \int\limits_{\gamma_a} f(w)\,dw = \int\limits_{[a,z]} f(w)\,dw$$

Así, para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos que

$$\frac{F(z) - F(a) - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\int\limits_{\gamma_z} f(w)\,dw - \int\limits_{\gamma_a} f(w)\,dw - f(a)(z-a)}{z-a} =$$

$$= \frac{\int\limits_{[a,z]} f(w)\,dw - f(a)(z-a)}{z-a} = \frac{\int\limits_{[a,z]} f(w)\,dw - \int\limits_{[a,z]} f(a)\,dw}{z-a} = \frac{\int\limits_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\,dw}{z-a}$$

Y como $[a,z]^* \subset D(a,\delta)$ deducimos que

$$\left|\frac{F(z) - F(a)}{z-a} - f(a)\right| = \frac{\left|\int\limits_{[a,z]} \big(f(w) - f(a)\big)\,dw\right|}{|z-a|} \leqslant \text{máx}\{|f(w) - f(a)| : w \in [a,z]^*\} \leqslant \varepsilon$$

De lo anterior se sigue que F es derivable en a y $F'(a) = f(a)$, esto es, F es una primitiva de f en Ω. $\boxed{\checkmark}$

2.4.2. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{52}$ Calcula $\displaystyle\int\limits_{C(0,1)} \frac{1}{\sqrt[n]{z}}\,dz$.

Ejercicio resuelto $\boxed{53}$ Calcula $\displaystyle\int\limits_{C(0,1)} \log z\,dz$.

Ejercicio resuelto $\boxed{54}$ Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, calcula $\displaystyle\int\limits_{C(0,1)} z^{\alpha} \log z\,dz$.

Ejercicio resuelto $\boxed{55}$ Calcula $\displaystyle\int_{C(a,R)} P(z)\,\overline{\mathrm{d}z}$ donde $P(z)$ es una función polinómica no constante.

Ejercicio resuelto $\boxed{56}$ Sea $A_r = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| \leqslant r,\ \alpha \leqslant \arg(z-a) \leqslant \beta\}$ $(-\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi)$. Supongamos que f es continua en A_r y que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to a\\ z\in A_r}}(z-a)f(z) = L \in \mathbb{C}$. Pongamos para $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\gamma_r(t) = a + r\,\mathrm{e}^{it}$. Prueba que

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = i(\beta-\alpha)L$$

Ejercicio resuelto $\boxed{57}$ Sea f continua en el semiplano superior y tal que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z) = 0$. Prueba que si $\lambda > 0$ y Γ_R es la semicircunferencia de centro 0 y radio R contenida en el semiplano superior, entonces

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} \mathrm{e}^{i\lambda z} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Ejercicio resuelto $\boxed{58}$ Sean $a \in \mathbb{C}$ y g una función continua en $\{z \in \mathbb{C} : r \leqslant |z-a| \leqslant R\}$, donde $0 < r < R$. Sea $\{r_n\} \to R$ con $r < r_n < R$. Prueba que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C(a,r_n)} g(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C(a,R)} g(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Ejercicio resuelto $\boxed{59}$ Integrando la función $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$h(z) = \frac{\mathrm{e}^{iz}-1}{z}\quad \forall z \in \mathbb{C}^*,\ h(0) = i$$

a lo largo del camino formado por la yuxtaposición del segmento $[-r, r]$ y de la semicircunferencia γ_r de centro 0 y radio r contenida en el semiplano superior, deduce que para todo $r > 0$ se verifica que:

$$\left|\int_{-r}^{r}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx - \pi\right| < \frac{\pi}{r}$$

2.4.3. Ejercicios propuestos

79. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \overline{z}\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma:[0,2]\to\mathbb{C}$ el camino dado por:

$$\text{a) } \gamma(t)=t^2+it\,; \quad \text{b) } \gamma(t)=2t+it\,; \quad \text{c) } \gamma(t)=\begin{cases} 2it & 0\leqslant t\leqslant 1\\ 2i+4(t-1) & 1\leqslant t\leqslant 2\end{cases}$$

80. Calcula $\displaystyle\int_\gamma \operatorname{Re}(z)\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ el camino dado por:

$$\text{a) } \gamma(t)=t+it\,; \quad \text{b) } \gamma(t)=\exp(2\pi it)$$

81. Calcula $\displaystyle\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z$ siendo $\gamma=[i,1+i,3+3i]$.

82. Calcula $\displaystyle\int_\gamma |z|\,\overline{z}\,\mathrm{d}z$ siendo γ el camino formado por la mitad superior de la circunferencia unidad y el segmento $[-1,1]$.

83. Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un camino y $\overline{\gamma}$ el camino conjugado de γ. Prueba que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})}\,\mathrm{d}z \qquad (\forall f\in C(\gamma^*))$$

Deduce que si f es continua en la circunferencia unidad, se verifica que

$$\overline{\int_{C(0,1)} f(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_{C(0,1)} \overline{f(z)}\,\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$$

84. Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ abierto, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω. Prueba que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\overline{f'(z)}\,\mathrm{d}z$ es un número imaginario puro.

85. Prueba que para $0<r<1$, se tiene que $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z}\,\mathrm{d}z=0$. Deduce que

$$\int_0^{2\pi}\log(1+r^2+2r\cos\vartheta)\,d\vartheta=0$$

86. Sea f holomorfa en un abierto $\Omega\subset\mathbb{C}$ y verificando que $|f(z)-1|<1\ \ \forall z\in\Omega$. Justifica que $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=0$ para todo camino cerrado γ en Ω.

87. Sean $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\forall z \in \Omega$. Justifica que f no admite una primitiva en Ω.

88. Sea f una función compleja continua definida en un abierto Ω. Pongamos $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. Supongamos que u y v son diferenciables en un punto $(a,b) \in \Omega$. Justifica que f es derivable en $z_0 = a + ib$ si, y sólo si, $\displaystyle\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi\rho^2} \int_{C(z_0,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

2.4.4. Versión elemental del teorema de Cauchy

La utilidad del teorema anterior para probar la existencia de primitivas es dudosa puesto que para justificar que una función tiene primitivas en un cierto dominio Ω sería necesario comprobar que su integral a lo largo de *todo* camino cerrado en Ω es cero, lo que no parece nada fácil en la práctica. Afortunadamente hay teoremas que garantizan que bajo ciertas condiciones la integral de una función a lo largo de cualquier camino cerrado es nula. Estos teoremas reciben el nombre de teoremas de Cauchy. En ellos se considera un abierto Ω y un camino cerrado γ en Ω. Se suponen hipótesis adicionales sobre Ω o sobre γ para concluir que $\displaystyle\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w = 0$ para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

2.11 Teorema de Cauchy–Goursat (1904). *Sea f una función holomorfa en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo de vértices a, b, c contenido en Ω, esto es,*

$$\Delta(a,b,c) = \{\mu a + \lambda b + \gamma c : \mu + \lambda + \gamma = 1 : \mu, \lambda, \gamma \geqslant 0\} \subset \Omega$$

Entonces

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Demostración. La demostración que sigue fue dada por Pringsheim en 1934.

Llamemos $\gamma = [a,b,c,a]$, $\Delta = \Delta(a,b,c)$ e $I = \displaystyle\int_\gamma f(w)\,\mathrm{d}w$. El objetivo es probar que $I = 0$. Para esto consideremos los puntos medios de los lados

$$a' = \frac{b+c}{2} \qquad b' = \frac{a+c}{2} \qquad c' = \frac{a+b}{2}$$

Podemos escribir I en la forma

$$I = \int_{\gamma} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c',b',a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c',b,a',c']} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[a',c,b',a']} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[b',c',a',b']} f(w)\,\mathrm{d}w$$

Esta igualdad es cierta ya que hay caminos (los interiores al triángulo) que están recorridos en direcciones opuestas luego las respectivas integrales se anulan (ver figura 2.1).

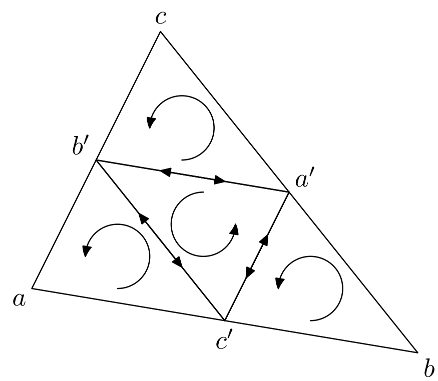


Figura 2.1: Esquema del camino de integración

Si llamamos J_1, J_2, J_3, J_4 a estas cuatro integrales, I_1 a la integral de mayor módulo de entre ellas y $\gamma_1 = [a_1, b_1, c_1, a_1]$ al camino de I_1 tenemos

$$|I| \leqslant 4\,|I_1|$$

Repitiendo el mismo argumento para el triángulo $\Delta_1 = \Delta(a_1, b_1, c_1)$ obtenemos una sucesiones de triángulos $\Delta_n = \Delta(a_n, b_n, c_n)$ y poligonales $\gamma_n = [a_n, b_n, c_n, a_n]$ con la propiedad de que $\Delta_n \subset \Delta_{n-1}$ y

$$\begin{aligned}
\text{diámetro}(\Delta_n) &= \frac{1}{2}\text{diámetro}(\Delta_{n-1}) = \frac{1}{2^n}\text{diámetro}(\Delta)\\
\ell(\gamma_n) &= \frac{1}{2}\ell(\gamma_{n-1}) = \frac{1}{2^n}\ell(\gamma)\\
|I_{n-1}| &\leqslant 4\,|I_n|
\end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (existe puesto que estamos considerando la intersección de una sucesión decreciente de cerrados no vacíos en un espacio métrico completo). Claramente, $\alpha \in \Delta(a, b, c) \subset \Omega$. Pongamos $p(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha)$ que es una función polinómica y por tanto tiene primitiva; luego $\int_{\gamma_n} p(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Podemos escribir por tanto

$$I_n = \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} \big(f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)\big)\,\mathrm{d}z$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la derivabilidad de $f(z)$ en α existe $\delta > 0$ de forma que $D(\alpha, \delta) \subset \Omega$ y para $z \in D(\alpha, \delta)$ se cumple que

$$|f(z) - f(\alpha) - f'(\alpha)(z - \alpha)| \leqslant \varepsilon |z - \alpha|$$

Si diámetro$(\Delta_n) < \delta$ entonces $\Delta_n \subset D(\alpha, \delta)$. Tenemos por tanto

$$\begin{aligned}
|I| \leqslant 4^n\, |I_n| \leqslant 4^n\, \ell(\gamma_n)\, \text{máx}\{|f(z) - f(\alpha) + f'(\alpha)(z - \alpha)| : z \in \gamma_n^*\} \leqslant \\
\leqslant 4^n\, \ell(\gamma_n)\, \varepsilon\, \text{máx}\{|z - \alpha| : z \in \gamma_n^*\} \leqslant \\
\leqslant 4^n\, \varepsilon\, \ell(\gamma_n)\, \text{diámetro}(\Delta_n) = \\
= 4^n\, \varepsilon\, \frac{1}{2^n}\, \ell(\gamma)\, \frac{1}{2^n}\, \text{diámetro}(\Delta) = \\
= \varepsilon\, \ell(\gamma)\, \text{diámetro}(\Delta)
\end{aligned}$$

de donde se deduce que $|I| = 0$ sin más que hacer tender ε a cero. Por tanto $I = 0$ como queríamos probar. ☑

Un abierto Ω es un *dominio estrellado* respecto de un punto $z_0 \in \Omega$ si el segmento que une z_0 con cualquier otro punto de Ω se queda dentro de Ω, esto es, $[z_0, z]^* \subset \Omega$ para todo $z \in \Omega$. Por ejemplo un disco es un dominio estrellado respecto cualquiera de sus puntos.

Por supuesto, cualquier conjunto convexo es un dominio estrellado respecto de cualquiera de sus puntos, pero hay dominios estrellados que no son convexos (por ejemplo el polígono que se muestra en la figura 2.2).

2.12 Teorema de Cauchy para dominios estrellados. *Toda función holomorfa en un dominio estrellado tiene primitivas en dicho dominio.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con Ω un dominio estrellado respecto de z_0. Buscamos una primitiva de f y la forma más intuitiva de definirla es

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)\, \mathrm{d}w$$

Vamos a probar que F así definida es ciertamente una primitiva de f en Ω. Puesto que Ω es un dominio estrellado en z_0 la función F está bien definida. Sea $a \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$. Tomemos un punto $z \in D(a, \rho)$. Como todos los puntos del segmento $[a, z]$ están contenidos en Ω el segmento que une z_0 con cualquiera de estos puntos también

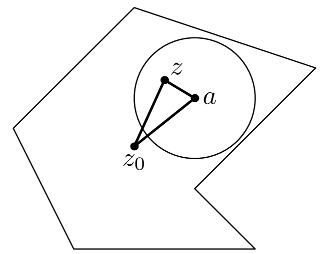


Figura 2.2: Dominio estrellado

estará contenido en Ω por ser este estrellado. Por tanto el triángulo $\Delta(z_0,a,z)$ está totalmente contenido en Ω (ver figura 2.2).

Ahora el teorema de Cauchy–Goursat afirma que

$$\int_{[z_0,z,a,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

Esta integral podemos escribirla como

$$\int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[z,a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[a,z_0]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$$

esto es

$$F(z) - F(a) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w - \int_{[z_0,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

A partir de esta última igualdad, siguiendo el mismo razonamiento que utilizamos en la demostración de la caracterización de existencia de primitivas (ver teorema 2.10), se prueba que F es derivable en a y $F'(a) = f(a)$ lo que concluye la demostración. $\boxed{\checkmark}$

El teorema de Cauchy–Goursat y el teorema de Cauchy para dominios estrellados permanecen válidos si suponemos que f es continua en Ω y es derivable en Ω salvo en algún punto α de Ω. Aunque este resultado pueda parecer una generalización de estos dos teoremas en realidad no es así, pues más adelante probaremos que si f es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$ entonces f también es derivable en α.

2.13 Teorema. *Sea Ω un abierto, $\alpha \in \Omega$ y f una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Sea $\Delta(a,b,c)$ un triángulo contenido en Ω, entonces* $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$.

Demostración.

Caso 1. $\alpha \notin \Delta(a,b,c)$. En tal caso $\Delta(a,b,c) \subset \Omega \setminus \{\alpha\}$ y se aplica el teorema de Cauchy–Goursat a la función f en el abierto $\Omega \setminus \{\alpha\}$.

Caso 2. El punto α es un vértice del triángulo. Por comodidad supondremos que $\alpha = a$. Tomamos los puntos $c_\rho = (1-\rho)a + \rho b$, $b_\rho = (1-\rho)a + \rho c$ para $\rho \in]0,1[$. En este caso

$$\int_{[a,b,c,d]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c_\rho,b,c,c_\rho]} f(w)\,\mathrm{d}w + \int_{[c,b_\rho,c_\rho,c]} f(w)\,\mathrm{d}w = \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w$$

ya que las dos últimas integrales son nulas por el caso 1. Tomando módulos y acotando tenemos

$$\left| \int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w \right| = \left| \int_{[a,c_\rho,b_\rho,a]} f(w)\,\mathrm{d}w \right| \leqslant K\rho\big(|a-b| + |b-c| + |c-a|\big)$$

donde $K = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \Delta(a,b,c)\}$. Esta acotación es válida para todo ρ luego haciendo $\rho \to 0$ obtenemos el resultado.

Caso 3. α está en un lado del triángulo. Por comodidad supongamos que se encuentra en el lado de extremos a y b. Consideramos los triángulos $\Delta(\alpha,b,c)$ y $\Delta(\alpha,c,a)$, ambos se encuentran en el caso 2 luego la integral sobre su frontera es nula y, por tanto, la integral en la frontera del triángulo $\Delta(a,b,c)$ es también nula.

Caso 4. α está en el interior del triángulo. Unimos α con alguno de los vértices y obtenemos dos triángulos que están en el caso 3. ✓

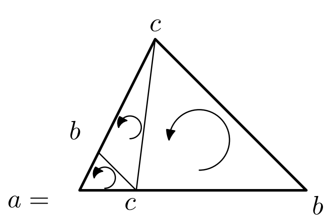


Figura 2.3: Caso 2

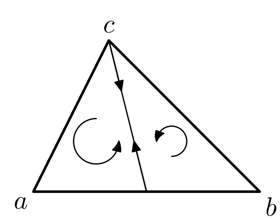


Figura 2.4: Caso 3

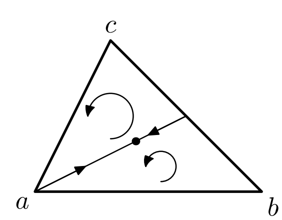


Figura 2.5: Caso 4

Puesto que el teorema de Cauchy–Goursat es cierto suprimiendo la derivabilidad de f en un punto α y el teorema de Cauchy para dominios estrellados se deduce de aquél, podemos enunciar también la siguiente versión del teorema de Cauchy para dominios estrellados.

2.14 Teorema. *Sea Ω un dominio estrellado, α un punto de Ω y f una función continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Entonces f tiene primitivas en Ω.*

2.15 Lema. *Se verifica que*

(a) $\displaystyle\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$ *si* $z \notin \overline{D}(a,\rho)$.

(b) $\displaystyle\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$ *si* $z \in D(a,\rho)$.

Demostración. Para el apartado *(a)* consideremos un semiplano abierto H que contiene a $\overline{D}(a,\rho)$ y no contiene al punto z. La función $w \longmapsto \dfrac{1}{w-z}$ es holomorfa en H y además H es un dominio estrellado. El teorema de Cauchy para dominios estrellados afirma que la aplicación tiene primitivas en H; luego su integral a lo largo de un camino cerrado contenido en H, como es la circunferencia $C(a,\rho)$, es nula.

(b) Escribimos

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \left(\text{si } \frac{|z-a|}{|w-a|} < 1\right) =$$
$$= \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \tag{2.2}$$

Fijamos un punto $z \in D(a,\rho)$ y tomamos $w \in C(a,\rho)^*$ arbitrario. Se cumple por tanto

$$\frac{|z-a|}{|w-a|} = \frac{|z-a|}{\rho} < 1$$

Puesto que

$$\frac{|z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{|z-a|}{\rho}\right)^n = \alpha_n$$

y $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n$ converge por ser una serie geométrica de razón $|z-a|/\rho < 1$, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que la serie 2.2 converge uniformemente en $C(a,\rho)^*$. Podemos permutar por tanto la integral y la suma de la serie con lo que obtenemos

$$\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

La función $w \mapsto \dfrac{1}{(w-a)^k}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ y tiene primitiva $\dfrac{1}{-k+1}(w-a)^{-k+1}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ con $k \neq 1$. Luego la integral $\displaystyle\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{(w-a)^k}\,\mathrm{d}w = 0$ para $k > 1$. Con lo cual

$$\begin{aligned}\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n \int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-a}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a+\rho\,\mathrm{e}^{it}-a}\rho i\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = 2\pi i\end{aligned}$$

como queríamos probar. ☑

2.4.5. Analiticidad de las funciones holomorfas

El siguiente resultado es la clave para probar que todo función holomorfa es analítica.

2.16 Fórmula de Cauchy para una circunferencia. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que el disco cerrado $\overline{D}(a,R)$ está contenido en Ω. Entonces se verifica que*

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z \in D(a,R))}$$

Antes de ver la demostración observemos que esta es una "fórmula de representación" pues representa los valores de una función holomorfa f en todo un disco mediante una integral que depende únicamente de los valores de la función en la frontera de ese disco. Destaquemos además que el radio R que tomamos es cualquiera que cumpla la condición $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$, esto es, la fórmula no depende de la circunferencia que tomemos.

Demostración. Como $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$, podemos tomar $\rho > R$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. Sea $z \in D(a,R)$

fijo en lo que sigue. Definimos la función $g : D(a,\rho) \to \mathbb{C}$ por

$$\begin{aligned} g(w) &= \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \qquad w \neq z \\ g(z) &= f'(z) \end{aligned}$$

Claramente g es continua en $D(a,\rho)$ ya que f es derivable en z. Además g es derivable en todo el disco $D(a,\rho)$ salvo quizá en el punto z. Podemos, pues, aplicar a g en el dominio $D(a,\rho)$ la versión generalizada del teorema de Cauchy para dominios estrellados, teorema 2.14, con lo que obtenemos que g tiene primitiva en $D(a,\rho)$ y, en particular, $\displaystyle\int\limits_{C(a,R)} g(w)\,\mathrm{d}w = 0$. Teniendo en cuenta el lema anterior, deducimos que para $z \in D(a,R)$ es

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w - f(z) \int\limits_{C(a,R)} \frac{1}{w - z}\,\mathrm{d}w = \\ &= \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w - f(z)2\pi i \end{aligned}$$

y despejando $f(z)$ en esta igualdad obtenemos la fórmula de Cauchy. $\boxed{\checkmark}$

Observación

Observa que si $z \notin \overline{D}(a,R)$ entonces podemos tomar $\rho > R$ tal que $D(0,\rho) \subset \Omega$ y además $z \notin D(0,\rho)$. La función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w - z}$ es holomorfa en $D(0,\rho)$ y el teorema de Cauchy para dominios estrellados implica que

$$\int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w = 0 \qquad (z \notin \overline{D}(a,R))$$

2.17 Teorema de Taylor. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y a un punto de Ω. Sea*

$$\rho_a = dist(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \inf\{|z-a| : z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \qquad (\rho_a = +\infty \ si\ \Omega = \mathbb{C})$$

Para $0 < R < \rho_a$ definamos

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{2.3}$$

Entonces para todo $z \in D(a, \rho_a)$ se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{2.4}$$

En consecuencia la función f es analítica en Ω y

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \tag{2.5}$$

donde la integral no depende de R.

Demostración. Es suficiente probar que se verifica la igualdad (2.4) con los coeficientes c_n dados por (2.3) en cualquier disco $D(a,R) \subset \Omega$ con $0 < R < \rho_a$. Sea, pues, $0 < R < \rho_a$ con lo que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. En virtud de la fórmula de Cauchy para una circunferencia tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad z \in D(a,R)$$

Tomamos $z \in D(a,R)$, fijo en lo que sigue, y escribimos

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a-(z-a)} = \frac{f(w)}{w-a} \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{w-a}} = \left(\text{si } \frac{|z-a|}{|w-a|} < 1 \right) =$$

$$= \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n \tag{2.6}$$

Sea $K = \text{máx}\{|f(w)| : w \in C(a,R)^*\}$. Tenemos que

$$\frac{|f(w)|}{|w-a|^{n+1}} |z-a|^n \leqslant \frac{K}{R} \left(\frac{|z-a|}{R} \right)^n = \alpha_n \qquad \text{para todo } w \in C(a,R)^*$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{|z-a|}{R}\right)^n$ es convergente puesto que se trata de una serie geométrica de razón menor que 1, el criterio de Weierstrass afirma que la serie 2.6 converge uniformemente en $C(a,R)^*$, luego podemos permutar la suma con la integral obteniendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n\right)\mathrm{d}w =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n$$

lo que concluye la demostración ya que z era un punto fijo pero arbitrario en $D(a,R)$. ☑

Observa que el teorema anterior nos dice que la serie de Taylor de f converge por lo menos en el disco más grande centrado en a y contenido en Ω y que su suma en *dicho disco* es f. Por tanto, el radio de convergencia, R, de la serie de Taylor de f en a es mayor o igual que ρ_a ($R = +\infty$ si $\rho_a = +\infty$), pero puede ocurrir que $R > \rho_a$.

2.18 Corolario. *Sea f una función entera. Entonces la serie de Taylor de f centrada en cualquier punto converge en todo $\mathbb{C}$ y su suma es igual a f.*

El teorema de Taylor pone de manifiesto la gran diferencia que hay entre la derivabilidad en el campo real y en el campo complejo. En el campo real podemos tener una función que sea continua pero no derivable; continua y derivable pero sin derivada continua; de clase $\mathcal{C}^1$ pero no dos veces derivable, etc. Esto es, con notación que se explica por sí sola

$$\mathcal{C}(I) \supsetneqq \mathcal{D}^1(I) \supsetneqq \mathcal{C}^1(I) \supsetneqq \mathcal{D}^2(I) \supsetneqq \mathcal{C}^2(I) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{C}^\infty(I) \supsetneqq \mathcal{FA}(I)$$

En variable compleja esta cadena de conjuntos se reduce a dos $\mathcal{C}(\Omega)$ y $\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{FA}(\Omega)$.

En particular, este resultado nos dice que si una función f tiene primitiva entonces dicha función f es holomorfa puesto que es la derivada de una función holomorfa. Por tanto, para que una función compleja tenga primitiva debemos exigir que sea holomorfa, no sólo continua como ocurría en el caso real, aunque por supuesto esta condición no garantiza que la función tenga primitiva.

El siguiente resultado es un recíproco del teorema de Cauchy–Goursat para un triángulo.

2.19 Teorema de Morera. *Sea Ω un abierto y f una función compleja continua en Ω. Equivalen:*

(a) f es holomorfa en Ω.

(b) $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f(w)\,\mathrm{d}w = 0$ siempre que el triángulo $\Delta(a,b,c)$ esté contenido en Ω.

Demostración. La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es el teorema de Cauchy–Goursat. Veamos entonces que $(b) \Rightarrow (a)$.

Sea $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $D(z_0,R) \subset \Omega$. El disco es un dominio estrellado y además la integral sobre cualquier triángulo contenido en él es cero. Esto nos permite construir una primitiva

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,\mathrm{d}w \qquad \text{para } z \in D(z_0,R)$$

F es una primitiva de f en $D(z_0,R)$, es decir, $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in D(z_0,R)$ (la prueba de esto es idéntica a la demostración de la existencia de primitivas en dominios estrellados, ver teorema 2.12). Luego f es en el disco $D(z_0,R)$ la derivada de una función holomorfa y, por tanto, es ella misma holomorfa en dicho disco; en particular, f es derivable en z_0. De la arbitrariedad de z_0 obtenemos que f es holomorfa en Ω. $\boxed{\checkmark}$

2.4.6. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{60}$ Calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$ donde $r > 0$, $r \neq 2$.

Ejercicio resuelto $\boxed{61}$ Calcula $\displaystyle\int_{C(2+i,\sqrt{2})} \frac{\mathrm{e}^z \cos z}{(1+z^2)\operatorname{sen} z}\,\mathrm{d}z$.

Ejercicio resuelto $\boxed{62}$ Dado $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$, calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos z}{(a^2+1)z - a(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$.

Ejercicio resuelto $\boxed{63}$ Calcula las integrales:

a) $\displaystyle\int\limits_{C(0,2a)} \frac{\mathrm{e}^z}{a^2+z^2}dz \quad (a>0)$

b) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \log|a+r\mathrm{e}^{it}|dt \quad 0<r<|a|$

Ejercicio resuelto 64 Sea f una función holomorfa en un disco de centro cero y radio $R>1$. Calcula

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,1)} \frac{\overline{f(w)}}{w-z}\,\mathrm{d}w \qquad (z\in\mathbb{C},\ |z|\neq 1)$$

Ejercicio resuelto 65 **Desarrollo limitado de Taylor.** Sea f una función holomorfa en un abierto que contenga a $\overline{D}(a,r)$. Prueba que para todo $z\in D(a,r)$ y todo $n\in\mathbb{N}$ es:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k+\frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{C(a,r)}\frac{f(w)}{(w-z)(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

Ejercicio resuelto 66 **Serie binomial de Newton.** Sea $a\in\mathbb{C}^*$. Justifica que

$$(1+z)^a=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}z^n \qquad (|z|<1)$$

Ejercicio resuelto 67 Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z)=\log(z^2-3z+2)$.

b) $f(z)=\operatorname{arc\,sen} z$.

c) $f(z)=\log(1+\sqrt{1+z^2})$.

Ejercicio resuelto 68 Sean $a,b\in\mathbb{C}$, $a\neq b$. Definamos $f(z)=\log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ para todo $z\in\mathbb{C}\setminus\{a,b\}$.

a) Justifica que f es una función holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus[a,b]^*$.

b) Justifica que para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que

$$\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z=\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z-b}\,\mathrm{d}z$$

c) Si $a=i, b=1$, calcula la serie de Taylor de f en $z=0$. Calcula el radio de convergencia de dicha serie e indica dónde su suma es igual a f.

Ejercicio resuelto $\boxed{69}$ Sea f una función holomorfa en un abierto Ω. Dado $a\in\Omega$, justifica que hay un disco $D(a,\rho)\subset\Omega$ tal que

$$f(z)=f(a)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^{2n+1}}{4^n(2n+1)!}f^{(2n+1)}\left(\frac{z+a}{2}\right)\qquad \text{para todo } z\in D(a,\rho)$$

Ejercicio resuelto $\boxed{70}$ **Integrales tipo Cauchy.** Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y $\varphi:\gamma^*\to\mathbb{C}$ una función continua. Prueba que la función $f:\mathbb{C}\setminus\gamma^*\to\mathbb{C}$ definida por:

$$f(z)=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw\,qquad(z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*)$$

es analítica y sus derivadas vienen dadas por:

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}=\int_\gamma\frac{\varphi(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw\qquad(z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*,k\in\mathbb{N}).$$

2.4.7. Ejercicios propuestos

89. Calcula $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}$, donde $\gamma(t)=\cos t+\frac{i}{2}\operatorname{sen} t,\ \ \forall t\in[-\pi,\pi]$.

90. Sea $\gamma=C(a,r)$ y $b,c\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Calcula todos los posibles valores de $\displaystyle\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-b)(z-c)}$ dependiendo de la posición relativa de los puntos b y c respecto de γ.

91. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma\frac{\cos z}{z^3+z}\mathrm{d}z$, para $\gamma=C(0,2)$, $\gamma=C(0,1/2)$, $\gamma=C(i/2,1)$.

92. Sean f una función entera, $a,b\in\mathbb{C}$ con $a\neq b$ y $R>\text{máx}\{|a|,|b|\}$. Prueba que

$$\int_{C(0,R)}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z=2\pi i\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Deduce que toda función entera y acotada es constante.

93. Para todo $z\in\mathbb{C}$, $z\neq -i$, definamos $f(z)=\log(i+z)$ (logaritmo principal).

a) Justifica que f es discontinua en los puntos de la forma $\rho-i$, con $\rho<0$, y holomorfa en $\Omega=\mathbb{C}\setminus\{\rho-i:\rho\leqslant 0\}$

b) Halla la serie de Taylor de f centrada en $z_0=-1+i$. Sea φ la función suma de dicha serie definida, naturalmente, en su disco de convergencia. Indica para qué valores de $z\in\Omega$ se verifica que $f(z)=\varphi(z)$.

94. Obtener el desarrollo en serie de potencias centrado en el origen de la función f, y calcular el radio de convergencia de la serie resultante en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^2}$.

b) $f(z) = \cos^2(z)$.

c) $f(z) = \operatorname{arc\,tg} z$.

95. Sea $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Justifica que hay una única función f holomorfa en $D(0,1)$ tal que

$$zf'(z) + \alpha f(z) = \frac{1}{1+z}, \qquad (z \in D(0,1))$$

96. Justifica que hay una única función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $\exp(-zf'(z)) = 1 - z$ para todo $z \in D(0,1)$, y $f(0) = 0$. Calcula la serie de Taylor de f centrada en 0.

97. Prueba que los coeficientes c_n de la serie de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{1-z-z^2}$ centrada en $z = 0$ satisfacen las igualdades: $c_0 = c_1 = 1$, $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ para todo $n \geqslant 0$. Calcula dichos coeficientes de forma explícita descomponiendo la fracción dada en fracciones simples. Calcula el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$. La sucesión $\{c_n\}$ se llama sucesión de Fibonacci.

98. En cada uno de los siguientes casos, determinar si hay una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $f^{(n)}(0) = a_n$. En caso afirmativo, encontrar todas las funciones f que verifiquen las condiciones pedidas.

a) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = n$

b) $\Omega = \mathbb{C} \quad a_n = (n+1)!$

c) $\Omega = D(0,1) \quad a_n = 2^n n!$

d) $\Omega = D(0, \frac{1}{2}) \quad a_n = n^n$

99. Considera las funciones complejas dadas para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ por:

$$f(z) = \log\left(\frac{z-i}{z+i}\right); \qquad g(z) = \log(z-i) - \log(z+i)$$

a) Estudia dónde son holomorfas las funciones f y g.

b) ¿Dónde coinciden f y g?

c) Calcula el desarrollo de Taylor de g centrado en $z = 1$.

d) Justifica que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n\,2^n}$ converge (absolutamente) y calcula su suma.

100. Definimos $F(z) = \mathrm{e}^{z^2} \int\limits_{[0,z]} \mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Prueba que F es una función entera y que $F'(z) = 1 + 2zF(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

101. Para $z \neq -1$ sea $f(z) = \dfrac{1}{z}\left(e^{-z} - \dfrac{1}{1+z}\right)$ y $f(0) = 0$.

a) Justifica que f es holomorfa en el abierto $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

b) Integra dicha función a lo largo de la frontera de la parte del disco $D(0,R)$ que queda en el primer cuadrante para calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

102. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, y supongamos que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Prueba que

$$f(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{D(a,R)} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

2.5. Desigualdades de Cauchy. Teoremas de Liouville y de Morera

2.20 Desigualdades de Cauchy. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función holomorfa en Ω, a un punto cualquiera de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que*

$$\frac{\left|f^{(k)}(a)\right|}{k!} \leqslant \frac{M(R)}{R^k}$$

donde $M(R) = \max\{|f(w)| : w \in C(a,R)^*\}$

Demostración. Sabemos que

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}w$$

para $a \in \Omega$ siempre que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Pues bien, tomando módulos y usando la acotación básica para integrales obtenemos

$$\frac{\left|f^{(k)}(a)\right|}{k!} \leqslant \frac{1}{2\pi} \text{máx}\left\{\left|\frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}}\right| : w \in C(a,R)^*\right\} 2\pi R = \frac{1}{R^k} \text{máx}\{|f(w)| : w \in C(a,R)^*\} = \frac{M(R)}{R^k}$$

$\boxed{\checkmark}$

Es interesante comparar este resultado con el teorema del valor medio para funciones reales. El teorema del valor medio nos dice que conociendo una cota, M, de la derivada de una función h podemos acotar el incremento de la función, esto es,

$$|h(x) - h(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

En el caso complejo, las desigualdades de Cauchy nos dicen que conociendo una cota de la función podemos acotar a sus derivadas. Veremos pronto que estas desigualdades son las principales responsables de que la convergencia uniforme de sucesiones de funciones holomorfas implique que la sucesión de sus derivadas también converja uniformemente.

A partir de las desigualdades de Cauchy es fácil probar el siguiente resultado conocido como teorema de Liouville, aunque fue Cauchy el primero en establecerlo

2.21 Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada es constante.*

Demostración. Sea f una función entera acotada. Entonces existe una constante positiva M de forma que $|f(z)| < M$ para todo número complejo $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Taylor afirma que la serie de Taylor de f converge a f en todo $\mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Puesto que para todo $R > 0$ el disco $\overline{D}(0,R)$ está contenido en $\mathbb{C}$, las desigualdades de Cauchy para $a = 0$ con $R > 0$ arbitrario nos dicen que

$$\frac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} \leqslant \frac{M(R)}{R^n} \leqslant \frac{M}{R^n}$$

Tomando límite ahora cuando $R \to +\infty$ obtenemos $f^{(n)}(0) = 0$ para cualquier $n \geqslant 1$. Con lo cual la serie de Taylor de f centrada en 0 se reduce al término $f(0)$. Luego $f(z) = f(0)$

para todo $z \in \mathbb{C}$, esto es, f es constante. ✓

Este resultado permite demostrar de forma sencilla el que se conoce como Teorema Fundamental del Álgebra cuya primera demostración diera Gauss en 1799.

2.22 Teorema Fundamental del Álgebra. *$\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Demostración. Sea $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos no constante. Queremos ver que $p(z)$ tiene alguna raíz en $\mathbb{C}$. Razonamos por reducción al absurdo, supongamos que $p(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Consideremos en dicho caso la función $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$. Dicha función es evidentemente entera y acotada puesto que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. En estas condiciones el teorema de Liouville afirma que f es constante, es decir, p es constante. Esta contradicción nos dice que $p(z)$ tiene que anularse para algún $z \in \mathbb{C}$. ✓

2.23 Teorema. *La imagen de una función entera no constante es densa en el plano. Simbólicamente, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es no constante entonces $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$.*

Demostración. Supongamos que existe un punto $\alpha \in \mathbb{C}$ de forma que $\alpha \notin \overline{f(\mathbb{C})}$. Por definición existe $\rho > 0$ de manera que $\overline{D}(\alpha,\rho) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, o dicho de otra forma, $|f(z) - \alpha| > \rho$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Construimos la aplicación $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-\alpha}$ para $z \in \mathbb{C}$. Es claro que g es una función entera y además está acotada puesto que

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-\alpha|} < \frac{1}{\rho}$$

para cualquier $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Liouville afirma que g es constante, luego ha de serlo también f en contradicción con la hipótesis. ✓

2.24 Corolario. *Las funciones parte real y parte imaginaria de una función entera no constante no están mayoradas ni minoradas.*

2.25 Teorema de extensión de Riemann. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $\alpha \in \Omega$ y supongamos que f es holomorfa en $\Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalen:*

(a) f tiene una extensión holomorfa a Ω, es decir, existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z) = f(z)$ para cualquier punto de $z \in \Omega$, $z \neq \alpha$.

(b) f tiene una extensión continua en Ω, esto es, existe $h \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que $h(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega \setminus \{\alpha\}$. Equivalentemente existe el límite $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$.

(c) f está acotada en un entorno reducido de α.

(d) $\lim\limits_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = 0$.

Demostración. Es claro que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)$. Probemos, por tanto, que $(d) \Rightarrow (a)$. Sea $F(z) = (z-\alpha)^2 f(z)$ para $z \neq \alpha$, $F(\alpha) = 0$. La hipótesis nos dice que $F \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{\alpha\})$. Como

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{F(z)-F(\alpha)}{z-\alpha} = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) = 0$$

deducimos que F es derivable en α con lo cual $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(\alpha) = 0$. Sea $D(\alpha,\rho) \subset \Omega$ aplicando el teorema de Taylor y teniendo en cuenta que $F(\alpha) = F'(\alpha) = 0$ tenemos

$$F(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{F^{(n}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \qquad \text{para todo } z \in D(\alpha,\rho)$$

Sacando factor común $(z-\alpha)^2$ en la serie anterior, resulta que

$$F(z) = (z-\alpha)^2 \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-\alpha)^{n-2} = (z-\alpha)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-\alpha)^n$$

igualdad válida para $z \in D(\alpha,\rho) \subset \Omega$ donde hemos notado $c_n = \dfrac{F^{(n}(\alpha)}{n!}$. De lo anterior se deduce que para $z \in D(\alpha,\rho)$, $z \neq \alpha$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(z-\alpha)^n$$

Definimos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ de la forma

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) \qquad \text{para } z \in \Omega \setminus \{\alpha\} \\ g(\alpha) &= c_2 \end{aligned}$$

Evidentemente g es derivable en $D(\alpha,\rho)$, pues g es suma de una serie de potencias convergente en dicho disco, en particular, g es derivable en α y, por tanto, es una extensión derivable de f como pretendíamos probar. $\boxed{\checkmark}$

Por supuesto, este resultado puede enunciarse para una función derivable en Ω excepto en un número finito de puntos de Ω.

Observa que este resultado implica que si una función es derivable en un abierto excepto en un conjunto finito de puntos del mismo, dicha función no puede ser continua en dichos puntos, ni siquiera puede estar acotada en un entorno de cualquiera de ellos.

2.26 Corolario. *Si una función compleja es continua en un abierto Ω y es derivable en $\Omega \setminus \{\alpha\}$ entonces dicha función es holomorfa en Ω.*

2.27 Fórmula de Cauchy para las derivadas. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función holomorfa en Ω y $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que*

$$\frac{f^{(n}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad \textit{para todo } z \in D(a,R)$$

Demostración. Para cada $z \in D(a,R)$ y $w \in C(a,R)^*$ tenemos que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \left(\frac{|z-a|}{|w-a|} < 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

Derivando k veces respecto a z esta serie de potencias y multiplicando por $f(w)$ tenemos que

$$f(w)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}\left(\frac{1}{w-z}\right) = f(w)\frac{k!}{(w-z)^{k+1}} = f(w)\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(z-a)^{n-k}}{(w-a)^{n+1}}f(w)$$

Por un razonamiento ya varias veces repetido, para cada $z \in D(a,R)$ fijo, la serie anterior es uniformemente convergente para $w \in C(a,R)^*$ por lo que podemos permutar la integral con la suma obteniendo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^{n-k}$$

Por otra parte, derivando k veces la serie de Taylor de f centrada en a tenemos que para todo $z \in D(a,R)$ es

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^{n-k}$$

lo que concluye la demostración. $\boxed{\checkmark}$

2.28 Teorema de convergencia de Weierstrass. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ la función límite puntual*

$$f(z) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(z)\} \qquad (z \in \Omega)$$

Entonces
(i) f es holomorfa en Ω.
(ii) Para cada natural k la sucesión de las derivadas k-ésimas $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la derivada k-ésima $f^{(k)}$ de la función límite.

Demostración.

(i) Las hipótesis implican que f es continua en Ω. Sea $\Delta(a,b,c) \subset \Omega$, puesto que la integral respeta la convergencia uniforme y $[a,b,c,a]^* \subset \Omega$ es un compacto

$$\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,\mathrm{d}z \longrightarrow \int_{[a,b,c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Ahora bien $\displaystyle\int_{[a,b,c,a]} f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0$ ya que, por hipótesis, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cualquier natural n. Luego

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

para cualquier triángulo $\Delta(a,b,c)$ contenido en Ω. El teorema de Morera nos asegura que f es holomorfa en Ω.

(ii) Sea $K\subset\Omega$ un compacto. Elijamos $0<\rho<\operatorname{dist}(K,\operatorname{Fr}\Omega)$ y sea

$$H=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{dist}(z,K)\leqslant\rho\}$$

Por la forma de definirlo es claro que H es un compacto y $K\subset H\subset\Omega$. Tomemos un punto cualquiera $a\in K$, entonces $\overline{D}(a,\rho)\subset H\subset\Omega$.

Sea $k\in\mathbb{N}$. Aplicando las desigualdades de Cauchy a la función $f_n(z)-f(z)$ en el disco $\overline{D}(a,\rho)$ tenemos

$$\begin{aligned}\left|f_n^{(k)}(a)-f^{(k)}(a)\right| &\leqslant \frac{k!}{\rho^k}\,\text{máx}\{|f_n(w)-f(w)|: w\in C(a,\rho)^*\}\leqslant\\ &\leqslant\frac{k!}{\rho^k}\,\text{máx}\{|f_n(w)-f(w)|: w\in H\}\end{aligned}$$

La convergencia uniforme de $\{f_n\}$ en H nos dice que dado $\varepsilon>0$ existe un natural $n_0\in\mathbb{N}$ de forma que para $n\geqslant n_0$ se cumple $\text{máx}\{|f_n(w)-f(w)|: w\in H\}\leqslant\varepsilon$. Deducimos que para $n\geqslant n_0$

$$\left|f_n^{(k)}(a)-f^{(k)}(a)\right|\leqslant\frac{k!}{\rho^k}\,\varepsilon$$

Desigualdad que es válida para cualquier punto $a\in K$ con lo cual

$$\text{máx}\{\left|f_n^{(k)}(a)-f^{(k)}(a)\right|: a\in K\}\leqslant\frac{k!}{\rho^k}\,\varepsilon$$

De donde se deduce que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en K a $f^{(k)}$. $\boxed{\checkmark}$

2.5.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{71}$ Sea f una función entera tal que:

$$|f(z)|\leqslant A+B|z|^{\alpha}\qquad \text{paratodo } z\in\mathbb{C} \text{ con } |z|\geqslant M$$

donde A,B,α,M son constantes no negativas. Prueba que f es una función polinómica de grado menor o igual que α.

Ejercicio resuelto $\boxed{72}$ Sea f una función entera no constante. Dado $w\in\mathbb{C}$, justifíquese que se cumple alguna de las dos siguientes afirmaciones:

a) La ecuación $f(z)=w$ tiene solución.

b) Existe una sucesión $\{z_n\} \to \infty$ tal que $\{f(z_n)\} \to w$.

Ejercicio resuelto $\boxed{73}$ ¿Puede existir una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que $|f(z)| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{|z|}}$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$?

Ejercicio resuelto $\boxed{74}$ Calcula $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z-\pi/4)^2(z^2+9)}\,\mathrm{d}z$.

Ejercicio resuelto $\boxed{75}$ Calcula $\displaystyle\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $|b| < r < |a|$.

Ejercicio resuelto $\boxed{76}$ Sea f una función entera. Para $r > 1$ se define

$$\lambda(r) = \frac{\log M(r)}{\log r}$$

donde $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Demuestra que f es una función polinómica si, y sólo si, λ tiene límite finito en $+\infty$.

Solución.

Supongamos que $\lim\limits_{r\to+\infty} \lambda(r) = \alpha \in \mathbb{R}_o^+$, y sea $\beta > \alpha$. Por definición de límite, existe $K > 0$, tal que $\lambda(r) < \beta$ siempre que $r > K$, y por tanto $\log M(r) < \beta \log r = \log(r^\beta)$, es decir $M(r) < r^\beta$. Como f es una función entera, el teorema de Taylor nos dice que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, y teniendo en cuenta las desigualdades de Cauchy $\left|\dfrac{f^{(n}(0)}{n!}\right| \leqslant \dfrac{M(r)}{r^n}$, válidas, por ser f entera, para todo $r > 0$; deducimos que

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{r^\beta}{r^n} \qquad (r > K)$$

y, tomando límites para $r \to +\infty$, se sigue que $f^{(n}(0) = 0$ para todo $n > \beta$ y, por tanto, f es una función polinómica.

Supongamos ahora que f es un polinomio de grado n, y sea $a_n \neq 0$ su coeficiente líder. Entonces, como $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{f(z)}{a_n z^n} = 1$, se sigue, por definición de límite, que existe $K > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| > K$, es $\dfrac{1}{2} < \left|\dfrac{f(z)}{a_n z^n}\right| < \dfrac{3}{2}$, de donde se sigue que:

$$\log(|a_n|/2) + n\log|z| < \log|f(z)| < \log(3|a_n|/2) + n\log|z|$$

y deducimos que, para $|z| = r > \max\{K, 1\}$, es

$$\log(|a_n|/2) + n\log r < \log M(r) < \log(3|a_n|/2) + n\log r.$$

Dividiendo por $\log r > 0$, obtenemos:

$$\frac{\log(|a_n|/2)}{\log r} + n < \lambda(r) < \frac{\log(3|a_n|/2)}{\log r} + n$$

lo que implica que $\lim\limits_{r\to+\infty} \lambda(r) = n$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{77}$ Prueba que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{-n}\operatorname{sen}(nz)$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$ y calcula su suma.

Ejercicio resuelto $\boxed{78}$ Prueba que la serie

$$1 + \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^2(z^2+1)(z^2+2^2)\cdots(z^2+n^2)}{[(n+1)!]^2}$$

es convergente para todo z y su suma es una función entera.

2.5.2. Ejercicios propuestos

103. Prueba que toda función entera que no tome valores reales es constante.

104. Sea f una función entera verificando:

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que f es constante.

105. Sean f y g dos funciones enteras cuya composición es constante. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

106. Sea $f \in H(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{1-|z|}$ $(|z| < 1)$. Prueba que $|f^{(n)}(0)| \leqslant \mathrm{e}(n+1)!$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

107. Sea f una función entera tal que $f(z) = f(f(z))$ para todo $z\in\mathbb{C}$. ¿Qué puede afirmarse de f?

108. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z}{z(1-z)^3}$ para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$, $\gamma = C(2, 3)$.

109. Calcula la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos z\,\mathrm{d}z}{z^2(z-1)}$ para $\gamma = C(0, 1/3)$, $\gamma = C(1, 1/3)$, $\gamma = C(0, 2)$.

110. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n}\,\mathrm{d}z\,; \quad \int_{C(0,1)} \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z\,; \quad \int_{C(1,\frac{1}{2})} \frac{\log z}{z^n}\,\mathrm{d}z$$

111. Se considera la sucesión de funciones dada por $f_n(z) = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}(nz)$. Justifica que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ pero no converge uniformemente en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

112. Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{1-z^n}$ converge en $D(0,1)$ y que su suma es una función holomorfa.

113. Sea $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones holomorfas en el disco $D(0,1)$ que converge uniformemente en conjuntos compactos. Sea

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k \qquad (|z| < 1)$$

Justifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k} z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{n,k}\right) z^k \qquad (|z| < 1)$$

114. Prueba que para cada número natural k la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{k}{kn(n+1)+1} z^n$ tiene radio de convergencia 1. Sea f_k la función suma de dicha serie. Prueba que la sucesión $\{f_k\}$ converge uniformemente en $D(0,1)$ y calcula la serie de Taylor centrada en 0 de la función límite.

115. Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ y f una función continua en Ω. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω.

b) Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω convergente a un punto z de Ω, la sucesión $\{f_n(z_n)\}$ converge a $f(z)$.

116. Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ que converge a una función f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Sea g una función continua en $\mathbb{C}$. Prueba que la sucesión $\{g \circ f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a la función $g \circ f$.

117. Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de Ω en $\mathbb{C}$. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\{f_n\}$ converge uniformemente en cada compacto de Ω.

b) Cada punto de Ω posee un entorno en el que $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Capítulo 3

Propiedades locales de las funciones holomorfas

3.1. Introducción

En este capítulo vamos a ver que en algunos aspectos las funciones holomorfas se comportan localmente de forma parecida a las funciones polinómicas. Ello se debe, naturalmente, a que las funciones holomorfas son analíticas y, por tanto, localmente, son límites uniformes de sucesiones de funciones polinómicas (sus polinomios de Taylor). Los resultados principales de este capítulo son generalizaciones para funciones holomorfas de resultados conocidos para funciones polinómicas. Por ejemplo, es sabido que si dos funciones polinómicas de grado n coinciden en un punto junto con sus derivadas hasta la de orden n inclusive, entonces dichas funciones son idénticas. La generalización para funciones holomorfas de este resultado afirma que si dos funciones holomorfas en un dominio coinciden ellas y todas sus derivadas en un punto entonces ambas funciones son idénticas (teorema 3.1).

El estudio del módulo de una función holomorfa lleva de forma natural a introducir las funciones subarmónicas. Los resultados hasta aquí obtenidos para las funciones holomorfas se aplican para probar con comodidad importantes resultados para funciones armónicas y, en particular, para resolver el problema de Dirichlet para discos.

3.2. Ceros de funciones holomorfas. Principio de identidad

Es sabido que una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto $a\in\mathbb{C}$, si dicha función y todas sus derivadas, hasta la de orden $k-1$ inclusive, se anulan en a y la derivada de orden k no se anula en a. Además, si una función polinómica $p(z)$ tiene un cero de orden k en un punto a entonces dicha función factoriza en la forma $p(z)=(z-a)^k q(z)$ donde $q(z)$ es una función polinómica que no se anula en a. No es posible extender este concepto de *orden de un cero* a funciones reales no polinómicas.

Por ejemplo, la función real de variable real

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-1/x^2} \qquad \text{si } x\neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}$. Tanto f como todas sus derivadas se anulan en 0. ¿Debemos decir que f tiene un cero de *"orden infinito"* en $a=0$?

Los ceros de una función polinómica son, evidentemente, un conjunto de puntos aislados en $\mathbb{C}$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \qquad \text{si } x\neq 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos que g es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}$ y se anula en 0 y en todos los puntos de la sucesión $x_n=1/n\pi$. Por tanto, en cualquier entorno de 0 hay infinitos ceros de g, es decir el conjunto de los ceros de g tiene a 0 como punto de acumulación.

En contraste con esta situación, vamos a ver que los ceros de las funciones holomorfas pueden caracterizarse de forma parecida a los ceros de las funciones polinómicas. El resultado principal es el siguiente.

3.1 Teorema. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$, f una función holomorfa en Ω y sea*

$$Z(f)=\{z\in\Omega : f(z)=0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Equivalen:

(a) El conjunto $Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω, es decir, $Z(f)'\cap\Omega\neq\emptyset$.

(b) Existe un punto $a\in\Omega$ tal que $f^{(k)}(a)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

(c) f es la función constante cero en Ω.

Demostración.

(a)⇒(b) Por hipótesis hay algún punto $a \in Z(f)' \cap \Omega$. Sea $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$. Existe una sucesión de puntos $a_n \in D(a,\rho)$ con $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{a_n\} \to a$. El teorema de Taylor afirma que

$$f(z) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho)$$

siendo $c_n = \dfrac{f^{(n}(a)}{n!}$.

En primer lugar, por la continuidad de f, tenemos que $f(a) = \lim\{f(a_n)\} = 0$.

Volvemos a escribir la serie teniendo en cuenta que $f(a) = 0$ y dividimos por $z-a$ con lo que

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

Pongamos $g_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1}$, función que es holomorfa en $z \in D(a,\rho)$ y $g_1(a) = 0$. Con ello

$$\frac{f(z)}{z-a} = c_1 + g_1(z)$$

Evaluando en a_n obtenemos $0 = c_1 + g_1(a_n)$ y, tomando límites deducimos que

$$0 = c_1 + \lim g_1(a_n) = c_1 + g_1(a) = c_1$$

Hemos obtenido $c_1 = 0$. Razonemos por inducción sobre k. Supuesto probado que $c_j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$, podemos escribir

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} = c_{k+1} + \sum_{j=k+2} c_j (z-a)^{j-k-1} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

De nuevo llamamos $g_{k+1}(z) = \sum_{j=k+2} c_j (z-a)^{j-k-1}$, evaluamos la igualdad anterior en $z = a_n$ y tomamos límites para obtener

$$0 = c_{k+1} + \lim_{n\to\infty} g_{k+1}(a_n) = c_{k+1}$$

luego $c_{k+1} = 0$ y, por inducción, concluimos que $c_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ como queríamos probar.

(b)⇒(c) Llamemos $A = \{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. A no es vacío por hipótesis y es inmediato que A es cerrado relativo a Ω puesto que es intersección de cerrados relativos

$$A = \bigcap_{k=0}^{\infty} \{z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0\}$$

Sea $a\in A$ y tomemos $\rho>0$ tal que $D(a,\rho)\subset\Omega$. El teorema de Taylor afirma que

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,\rho)$$

luego $f(z)=0$ para todo $z\in D(a,\rho)$ con lo cual $f^{(k)}(z)=0$ para todo $z\in D(a,\rho)$ y para cualquier $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Esto último implica que $D(a,\rho)\subset A$, luego A es abierto. Por conexión $A=\Omega$

(c)$\Rightarrow$*(a)* Es evidente. ☑

Con frecuencia el resultado anterior no se interpreta correctamente. Considera los siguientes casos.

La función $\operatorname{sen} z$ es entera y tiene infinitos ceros $z_n=n\pi$ pero el conjunto de ellos no tiene puntos de acumulación.

La función $\operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$ es holomorfa en el dominio $\mathbb{C}^*$ y sus ceros $\dfrac{1}{n\pi}$ se acumulan en 0 que *no pertenece a* $\mathbb{C}^*$.

A continuación enunciamos uno de los resultados más útiles de la teoría de funciones holomorfas. Este resultado afirma, en particular, que los valores de una función holomorfa en un dominio están determinados de forma única por los valores que dicha función toma en los puntos de una sucesión que converja a un punto del dominio.

3.2 Principio de identidad para funciones holomorfas. *Si dos funciones holomorfas en un dominio Ω coinciden en un subconjunto de Ω que tiene algún punto de acumulación en Ω entonces dichas funciones coinciden en Ω.*

Demostración. Sean $f,g\in\mathcal{H}(\Omega)$ donde Ω es un dominio. Llamemos $h=f-g$. La hipótesis nos dice que $Z(h)'\cap\Omega\neq\emptyset$ y, por el resultado anterior, h es idénticamente nula, esto es, $f(z)=g(z)$ para $z\in\Omega$. ☑

3.3 Corolario. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ una función no idénticamente nula en Ω. Sea*

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de los ceros de f en Ω. Entonces:
(i) $Z(f)$ es un conjunto de puntos aislados en Ω.
(ii) $Z(f)$ es numerable.

Demostración.

(i) Las hipótesis implican por el resultado anterior que $Z(f)$ no tiene ningún punto de acumulación en Ω, que es lo mismo que decir que $Z(f)$ es un conjunto de puntos aislados en Ω.

(ii) Basta tener en cuenta que todo abierto en $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos y que si K es un compacto contenido en Ω entonces el conjunto $Z(f) \cap K$ es finito. $\boxed{\checkmark}$

3.4 Orden de un cero. Sea f una función holomorfa y no idénticamente nula en un dominio Ω y supongamos que f tiene un cero en un punto $a \in \Omega$. Como consecuencia del teorema 3.1, sabemos que alguna derivada de f no se anula en a. Sea $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$. Decimos entonces que f tiene en a un cero de orden k.

El siguiente resultado pone de manifiesto que los ceros de una función holomorfa permiten factorizar dicha función de forma análoga a como factorizan las funciones polinómicas.

3.5 Caracterización del orden de un cero. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω. Dado $a \in \Omega$ se verifica que f tiene en a un cero de orden k si, y sólo si, existe una función holomorfa en Ω, g, de forma que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Supongamos que existe g holomorfa en Ω con $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$. Tomamos $\rho > 0$ de tal forma que $D(a,\rho) \subset \Omega$. El teorema de Taylor nos permite escribir g como suma de su serie de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad z \in D(a,\rho)$$

Se cumple que $\alpha_0 \neq 0$ puesto que $g(a) \neq 0$. Con lo cual

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^{n+k} \qquad \text{para } z \in D(a,\rho)$$

Ya que el desarrollo de Taylor de una función holomorfa es único tenemos que $f^{(q)}(a) = 0$ para todo $0 \leqslant q \leqslant k-1$ y $\alpha_0 = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$, esto es, $f^{(k)}(a) \neq 0$. Hemos obtenido que f tiene en a un cero de orden k.

Recíprocamente, sea a un cero de orden k de f, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \subset \Omega$$

con $c_k \neq 0$. Consideremos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(a) = c_k$$
$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^k} \qquad z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Claramente g es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ y como

$$g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z-a)^{n-k} \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho)$$

deducimos que g es holomorfa en $D(a,\rho)$ y, en particular, es derivable en a. Luego g es holomorfa en Ω. Además se cumple que $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para $z \in \Omega$ y $g(a) \neq 0$. $\boxed{\checkmark}$

3.6 Regla de L'Hôpital. *Sean f, g dos funciones holomorfas no idénticamente nulas en un dominio Ω. Supongamos que $f(a) = g(a) = 0$ en un punto $a \in \Omega$. Entonces*

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Demostración. Por el anterior corolario, puesto que f no es idénticamente nula, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = (z-a)^m F(z)$ con F una función holomorfa en Ω cumpliendo $F(a) \neq 0$. Análogamente para g existe $n \in \mathbb{N}$ y una función holomorfa en Ω, G, de forma que $g(z) = (z-a)^n G(z)$ con $G(a) \neq 0$. Además existe un disco $D(a,\rho) \subset \Omega$ tal que $g(z) \neq 0$ y $g'(z) \neq 0$ para $z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$. Para $z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$ tenemos que

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^m F(z)}{(z-a)^n G(z)}, \qquad \frac{f'(z)}{g'(z)} = (z-a)^{m-n} \frac{mF(z) + (z-a)F'(z)}{nG(z) + (z-a)G'(z)}$$

Tomando límites para $z \to a$ obtenemos:

- Si $m = n$ el valor común de ambos límites es $F(a)/G(a)$.
- Si $m > n$ ambos límites son nulos.
- Si $m < n$ ambos límites son ∞.

3.2.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{79}$ Sea f una función entera verificando que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Prueba que f es una función polinómica.

Ejercicio resuelto $\boxed{80}$ Sean f y g dos funciones enteras no constantes verificando que $|f(z)| \leqslant |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f y g?.

Ejercicio resuelto $\boxed{81}$ Sea f una función entera no constante verificando que $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Prueba que f es de la forma $f(z) = \alpha z^n$ donde n es un número natural y $|\alpha| = 1$.

3.2.2. Ejercicios propuestos

118. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f holomorfa en un entorno del origen, verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo número natural n suficientemente grande:

a) $a_{2n} = 0,\ a_{2n-1} = 1$

b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n}$.

c) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

119. Sea f una función entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

120. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Justifica que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en Ω es un dominio de integridad, es decir, no tiene divisores de cero.

121. Sean f y g funciones holomorfas en un dominio Ω. Supongamos que hay una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de Ω que converge a un punto $a \in \Omega$ con $a_n \neq a$ y $f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que las funciones f y g son linealmente dependientes.

122. Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0) = 0$. Prueba que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en dicho disco.

123. Da un ejemplo de dos funciones holomorfas en un dominio acotado que coincidan en infinitos puntos del mismo y no sean idénticas. Considera también el caso de que el dominio no sea acotado.

3.3. Funciones armónicas y subarmónicas

3.7 Proposición. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω y $R > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$. Entonces*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + R\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \qquad \textit{(igualdad de la media)}$$

esto es, el valor que toma f en el centro de una circunferencia es la media de los valores que toma en la circunferencia. Además

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(a + Re^{it})\right| \mathrm{d}t \qquad \textit{(desigualdad de la media)}$$

Demostración. La fórmula de Cauchy para una circunferencia nos dice que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{Re^{it}} iR\,\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a + Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

La desigualdad de la media se deduce directamente de la igualdad anterior. $\boxed{\checkmark}$

Funciones subarmónicas

3.8 Definición. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un abierto. Una función $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ continua en Ω se dice que es *subarmónica* en Ω si verifica la desigualdad

$$\varphi(a)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

siempre que $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$.

Según acabamos de ver en la proposición 3.7, el módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

3.9 Principio del máximo para funciones subarmónicas. *Una función subarmónica en un dominio que alcanza un máximo absoluto es constante.*

Demostración. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ un dominio y sea $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ una función subarmónica en Ω. Supongamos que existe $a\in\Omega$ tal que $\varphi(a)\geqslant\varphi(z)$ para cualquier $z\in\Omega$. Definimos

$$A=\{z\in\Omega:\ \varphi(z)=\varphi(a)\}$$

Es claro que $a\in A$ y que A es cerrado relativo a Ω. Sea $b\in A$ y $R>0$ tal que $D(b,R)\subset\Omega$. Podemos escribir

$$D(b,R)=\bigcup_{0\leqslant r<R}C(b,r)^*$$

Para probar que $D(b,r)\subset A$ y, por tanto, que A es abierto veamos que cada circunferencia $C(b,r)^*$ se queda dentro de A.

Para cualquiera de las circunferencias $C(b,r)^*$ tenemos

$$\varphi(a)=\varphi(b)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(b+r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$$

luego

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\varphi(a)-\varphi(b+r\,\mathrm{e}^{it})\big)\,\mathrm{d}t\ \leqslant 0$$

Pero la función (real) que estamos integrando verifica que $\varphi(a)-\varphi(b+r\,\mathrm{e}^{it})\geqslant 0$ para todo $t\in[-\pi,\pi]$ puesto que φ alcanza en a un máximo absoluto. Como la integral de una función positiva no puede ser un número negativo, deducimos que

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it})\right) \mathrm{d}t \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it})\right| \mathrm{d}t$$

y como la función que integramos es continua, esta igualdad implica que

$$\varphi(a) - \varphi(b + r\,\mathrm{e}^{it}) = 0 \quad \text{para todo } t \in [-\pi, \pi]$$

Obtenemos así que $b + r\,\mathrm{e}^{it} \in A$ para todo $t \in [-\pi, \pi]$, escrito de otra forma $C(b, r)^* \subset A$. Concluimos que A es abierto y, por conexión, que $A = \Omega$ $\boxed{\checkmark}$

Teniendo en cuenta que una función real continua en un compacto alcanza un máximo absoluto, del resultado anterior se deduce fácilmente el siguiente corolario.

3.10 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado, $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω. Entonces*

$$\text{máx}\{\varphi(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \text{máx}\{\varphi(z) : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

esto es, el máximo de φ se alcanza en la frontera de Ω.

3.11 Principio del módulo máximo. *Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un máximo relativo es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. La hipótesis nos dice que existe $a \in \Omega$, $\rho > 0$ tal que $D(a, \rho) \subset \Omega$ y $|f(a)| \geqslant |f(z)|$ para $z \in D(a, \rho)$.

Sabemos que $|f(z)|$ es una función subarmónica en Ω. Aplicando el teorema 3.9 a $\varphi(z) = |f(z)|$ en el dominio $D(a, \rho)$ obtenemos que $|f(z)|$ es constante en $D(a, \rho)$. Por la proposición 1.31, sabemos que si el módulo de una función holomorfa en un dominio es constante entonces la función es constante. Deducimos así que f es constante en $D(a, \rho)$. Aplicando el principio de identidad, teorema 3.2, concluimos que f es constante en todo Ω. $\boxed{\checkmark}$

3.12 Principio del módulo mínimo. *Una función holomorfa en un dominio cuyo módulo alcanza un mínimo relativo distinto de cero es constante.*

Demostración. Sea Ω un dominio, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por hipótesis existe $z_0 \in \Omega$ y $\rho > 0$ de forma que $D(z_0, \rho) \subset \Omega$ y $0 < |f(z_0)| \leqslant |f(z)|$ para $z \in D(z_0, \rho)$. Definimos $g : D(z_0, \rho) \to \mathbb{C}$ como $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Es claro que $g \in \mathcal{H}(D(z_0, \rho))$ puesto que $f(z) \neq 0$ para $z \in D(z_0, \rho)$. Además el módulo de g tiene un máximo absoluto en $D(z_0, \rho)$ porque

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0)|} \geqslant \frac{1}{|f(z)|} = |g(z)| \qquad z \in D(z_0, \rho)$$

Por el principio del módulo máximo g es constante en $D(a, \rho)$, luego también lo es f. Por el principio de identidad se sigue que f es constante en Ω. $\boxed{\checkmark}$

3.13 Corolario. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces se verifica:*

(a) $|f|$ alcanza su máximo en la frontera de Ω, es decir,

$$\text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

(b) Si f no se anula en Ω entonces el mínimo de $|f|$ también se alcanza en la frontera, es decir,

$$\text{mín}\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \text{mín}\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

(c) Si f no es constante en Ω y $|f|$ es constante en $\operatorname{Fr}\Omega$ entonces f se anula en algún punto de Ω.

Demostración. Puesto que $\overline{\Omega}$ es compacto y $|f|$ es continua y toma valores reales, $|f|$ debe alcanzar un mínimo y un máximo absolutos en $\overline{\Omega}$.

(a) Si $|f|$ alcanza el máximo en un punto interior, el principio del módulo máximo nos asegura que f es constante en Ω y, por continuidad, f es constante en $\overline{\Omega}$, en cuyo caso se verifica la igualdad del enunciado.

(b) Si $|f|$ no se anula y alcanza el mínimo en un punto interior entonces por el principio del módulo mínimo f sería constante y volvemos a concluir como en el apartado anterior.

(c) Si f no se anula en Ω entonces, según acabamos de ver, $|f|$ alcanza su mínimo en la frontera al igual que su máximo. Puesto que, por hipótesis, $|f|$ es constante en la frontera, deducimos que el mínimo y el máximo de $|f|$ en $\overline{\Omega}$ coinciden y, por tanto, $|f|$ es constante. Luego f también es constante en contra de la hipótesis. $\boxed{\checkmark}$

3.14 Funciones armónicas. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Se dice que φ es armónica en Ω si para todo $(x,y) \in \Omega$ se verifica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Representaremos por $\mathcal{A}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones armónicas en Ω.

Observa que aunque los nombres "subarmónica" y "armónica" suenan parecidos, los conceptos que definen son totalmente distintos, puesto que ser "subarmónica" se define por una propiedad global que involucra un promedio integral, mientras que ser "armónica" es una propiedad local pues viene expresada por medio de derivadas parciales.

En lo que sigue vamos a considerar y a dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- *¿Es toda función armónica de clase $\mathcal{C}^\infty$?*
- *¿Verifican las funciones armónicas la igualdad de la media?*
- *¿Es armónica toda función continua que verifique la igualdad de la media?*

3.15 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y llamemos $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. Entonces u, v son armónicas en Ω y además $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Razonemos por inducción. Sea P_n la afirmación siguiente: *"las partes real e imaginaria de toda función holomorfa en Ω son funciones de clase $\mathcal{C}^n$ en Ω".*

P_1 es cierta porque f es holomorfa en Ω y su derivada, gracias a las ecuaciones de Cauchy–Riemann, viene dada por

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

Pero, en virtud del teorema de Taylor, sabemos que f' vuelve a ser holomorfa en Ω, luego su parte real e imaginaria son continuas.

Supongamos que la propiedad es cierta para n. Aplicamos la hipótesis de inducción a $f' \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^n(\Omega)$, esto es, $u, v \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega)$.

De las ecuaciones de Cauchy–Riemann obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

luego u es armónica. El cálculo es análogo para v. ☑

3.16 Proposición. *Sea u una función armónica en Ω. Entonces la función*

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \qquad x+iy \in \Omega$$

es holomorfa en Ω. En consecuencia toda función armónica es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Demostración. Como u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, sus derivadas parciales de primer orden son diferenciables. Además se cumplen las ecuaciones de Cauchy–Riemann para f:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{por ser } u \text{ armónica} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) && \text{por ser } u \text{ de clase } \mathcal{C}^2 \end{aligned}$$

☑

Acabamos de probar que la parte real de cualquier función holomorfa es una función armónica. ¿Es cierto el recíproco? Es decir, si tenemos una función armónica φ en un abierto Ω ¿existe una función f holomorfa en Ω tal que φ sea la parte real de f? En general esto no va a ser cierto y el que lo sea va a depender de las propiedades topológicas del abierto Ω. El siguiente resultado es una primera aproximación a este problema.

3.17 Proposición. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y supongamos que toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω. Entonces toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω (la cual es única salvo una constante aditiva).*

Demostración. Sea u una función armónica en Ω. Por la proposición anterior la función

$$f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

es holomorfa en Ω. Por hipótesis existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para $z \in \Omega$.

Llamemos $\tilde{u} = \operatorname{Re} F$, $\tilde{v} = \operatorname{Im} F$. Resulta

$$F'(z) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x,y) = f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

deducimos que $\tilde{u} - u$ tiene derivadas parciales nulas en el dominio Ω y por tanto es constante, es decir, $u = \tilde{u} + \lambda$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Concluimos que $u = \operatorname{Re}(F + \lambda)$. ✓

Teniendo en cuenta el teorema de Cauchy para dominios estrellados podemos enunciar.

3.18 Corolario. *Toda función armónica en un dominio estrellado es la parte real de una función holomorfa en dicho dominio.*

3.19 Corolario. *Una función u es armónica en un abierto Ω si, y sólo si, para todo disco $D(a,R)$ contenido en Ω existe una función holomorfa en dicho disco, $f_a \in \mathcal{H}(D(a,R))$, tal que $u(x,y) = \operatorname{Re} f_a(x+iy)$ para todo $x+iy \in D(a,R)$.*

Este resultado implica que *localmente* las funciones armónicas son partes reales de funciones holomorfas. Esto nos proporciona una herramienta muy útil para obtener propiedades locales de las funciones armónicas. El siguiente resultado es un ejemplo de esto.

3.20 Igualdad de la media para funciones armónicas. *Las funciones armónicas verifican la igualdad de la media. Esto es, dado* $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, $a \in \Omega$ *y* $R > 0$ *tal que* $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$ *entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Demostración. Tomemos $\rho > 0$ tal que $\overline{D}(a,R) \subset D(a,\rho) \subset \Omega$. La función u es armónica en $D(a,\rho)$ que es un dominio estrellado luego existe $g \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ de forma que $u(z) = \operatorname{Re} g(z)$ para $z \in D(a,\rho)$. Ahora bien las funciones holomorfas verifican la igualdad de la media

$$g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t$$

Tomando partes reales en ambos miembros de la igualdad concluimos que

$$u(a) = \operatorname{Re} g(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} g(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t \qquad \boxed{\checkmark}$$

Hasta ahora hemos respondido afirmativamente, sin mucho esfuerzo, a dos de las preguntas que nos planteamos al definir el concepto de función armónica, esto es, hemos visto que toda función armónica es de clase $\mathcal{C}^{\infty}$ y verifica la igualdad de la media. Responder a la última pregunta requerirá un poco más de trabajo.

3.21 Principio de extremo para funciones armónicas. *Sea* u *una función armónica en un dominio* Ω *y supongamos que* u *alcanza en algún punto de* Ω *un extremo relativo. Entonces* u *es constante en* Ω.

Demostración. Puesto que si u es armónica lo es también $-u$, no es restrictivo suponer que el extremo de u sea un máximo relativo.

Sea, pues, $a \in \Omega$ un máximo relativo de u. Sea $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $u(z) \leqslant u(a)$ para todo $z \in D(a,\rho)$. Acabamos de ver que las funciones armónicas verifican la igualdad de la media luego, en particular, toda función armónica es subarmónica. Podemos aplicar, por tanto, el principio del máximo para funciones subarmónicas a la función u en el disco $D(a,\rho)$ y deducimos que u es constante en dicho disco. Sea $f(x+iy) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)$

para $(x,y)\in\Omega$. Puesto que u es armónica, sabemos que la función f así definida es holomorfa en Ω. Lo anterior implica que $f(z)=0$ para todo $z\in D(a,\rho)$ luego, por el principio de identidad, $f(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Por tanto $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$ para todo $(x,y)\in\Omega$, lo que implica que u es una función constante en Ω como queríamos probar. ☑

La función $u(x,y)=x^2-y^2$ es armónica en $\mathbb{R}^2$, no idénticamente nula, y se anula en las rectas $y=\pm x$. Esto nos indica que no podemos esperar un principio de identidad para funciones armónicas tan bueno como el que conocemos para funciones holomorfas.

3.22 Principio de identidad para funciones armónicas. *Sean u y v dos funciones armónicas definidas sobre un dominio Ω tales que el conjunto donde coinciden tiene interior no vacío. Entonces ambas funciones coinciden sobre todo Ω.*

Demostración. Consideremos la función $u-v\in\mathcal{A}(\Omega)$. La hipótesis afirma que existe algún punto a interior al conjunto

$$A=\{z\in\Omega:\,u(z)=v(z)\}$$

Tomamos $\rho>0$ de forma que $D(a,\rho)\subset A$ con lo cual se cumple que $u(z)-v(z)=0$ para todo $z\in D(a,\rho)$, luego $u-v$ es constante (igual a cero) en $D(a,\rho)$, en particular, todo punto de $D(a,\rho)$ es un extremo relativo de $u-v$. El resultado anterior afirma entonces que $u-v$ es constante (igual a cero) en Ω, es decir, u y v coinciden en Ω. ☑

3.23 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado, u una función armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Entonces u alcanza el máximo y el mínimo en la frontera de Ω, esto es,*

$$\text{máx}\{u(z):z\in\overline{\Omega}\}=\text{máx}\{u(z):z\in\operatorname{Fr}\Omega\}$$
$$\text{mín}\{u(z):z\in\overline{\Omega}\}=\text{mín}\{u(z):z\in\operatorname{Fr}\Omega\}$$

En consecuencia si v es armónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y coincide con u en $\operatorname{Fr}\Omega$, entonces v coincide con u en todo Ω.

Demostración. Ya que Ω es acotado, $\overline{\Omega}$ es compacto. Por ser u continua en $\overline{\Omega}$ tiene que alcanzar en $\overline{\Omega}$ un máximo valor y un mínimo valor.

Si el máximo (o el mínimo) se alcanza en la frontera hemos acabado. En caso contrario, se alcanza en un punto interior y, por tanto, u es constante luego también se alcanza en la frontera.

Para la segunda afirmación, tenemos $v-u \in \mathcal{A}(\Omega)\cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, por hipótesis $v(z)-u(z)=0$ para cualquier $z\in \operatorname{Fr}\Omega$. Luego

$$\begin{aligned} \text{máx}\{v(z)-u(z) : z\in\overline{\Omega}\} &= 0 \\ \text{mín}\{v(z)-u(z) : z\in\overline{\Omega}\} &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual $v-u$ es idénticamente nula en Ω, es decir, $u(z)=v(z)$ para $z\in\Omega$. $\boxed{\checkmark}$

3.4. El problema de Dirichlet para discos

El corolario anterior afirma que una función armónica está determinada de manera única por los valores que toma en la frontera de un dominio acotado. Surge así el llamado *problema de Dirichlet*:

> *Dado un dominio Ω distinto de $\mathbb{C}$ y dada una función continua $\varphi : \operatorname{Fr}\Omega \to \mathbb{R}$, ¿existe una función $\widehat{\varphi}$ armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$ que coincide con φ en $\operatorname{Fr}\Omega$?*

Para dominios acotados, por lo que acabamos de ver, la solución de este problema, si existe, es única. Por supuesto la existencia de solución depende de cómo sea Ω. Vamos a resolver el problema de Dirichlet para el caso de que Ω sea un disco.

El siguiente resultado es una sencilla extensión de resultados conocidos (ver el ejercicio **58**).

3.24 Lema. *Sea f una función continua en $\overline{D}(a,R)$ y holomorfa en $D(a,R)$. Entonces*

(a) $\displaystyle\int_{C(a,R)} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

(b) Para todo $z\in D(a,R)$ se verifica que $\displaystyle f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$.

3.25 Integrales tipo Cauchy. *Sea* γ *un camino en* $\mathbb{C}$*,* $\varphi : \gamma^* \to \mathbb{C}$ *una función continua. Entonces se verifica que la función* $h : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$h(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$*.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y sea $\rho = \operatorname{dist}(a, \gamma^*) > 0$. Probaremos que h admite un desarrollo en serie de potencias centrada en a válido en el disco $D(a, \rho)$. Fijemos $z \in D(a, \rho)$. Tenemos que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n \qquad (|z-a| < |w-a|)$$

Usando el criterio de Weierstrass, se prueba fácilmente que la serie

$$\sum_{n \geqslant 0} \varphi(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

converge uniformemente a $\dfrac{\varphi(w)}{w-z}$ cuando $w \in \gamma^*$. Permutando la integral con la suma de la serie se tiene

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right) (z-a)^n \qquad z \in D(a, \rho)$$

Hemos probado así que h es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. ☑

3.26 Fórmula de Poisson. *Sea* $f : \overline{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{D}(0,1)$ *y holomorfa en* $D(0,1)$*. Entonces para todo* $z \in D(0,1)$ *se verifica que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{it} + z}{\mathrm{e}^{it} - z} \right) f(\mathrm{e}^{it}) \, \mathrm{d}t$$

En particular, si es $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$*, entonces para todo* $z \in D(0,1)$ *se verifica que*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{it} + z}{\mathrm{e}^{it} - z} \right) u(\mathrm{e}^{it}) \, \mathrm{d}t \tag{3.1}$$

Demostración. Fijemos $z \in D(0,1)$. Por el lema 3.24*(a)* tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

La aplicación $w \longmapsto \dfrac{f(w)}{w - 1/\overline{z}}$ es holomorfa en $D(0,1)$ porque al ser $|1/\overline{z}| = 1/|z| > 1$ el denominador no se anula en $D(0,1)$. Además dicha función es continua en $\overline{D}(0,1)$. Por el lema 3.24*(b)* tenemos que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,1)} \frac{f(w)}{w-1/\overline{z}}\,\mathrm{d}w$$

Por tanto podemos escribir:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(0,1)} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-1/\overline{z}} \right) \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(\mathrm{e}^{it})}{\mathrm{e}^{it}-z} - \frac{f(\mathrm{e}^{it})}{\mathrm{e}^{it}-1/\overline{z}} \right) \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{z}{\mathrm{e}^{it}-z} + \frac{\overline{z}}{\mathrm{e}^{-it}-\overline{z}} \right) f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z}{\mathrm{e}^{it}-z} \right) \right] f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(1 + 2\frac{z}{\mathrm{e}^{it}-z} \right) f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z} \right) f(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Finalmente, basta tomar partes reales en la igualdad anterior para obtener la segunda igualdad del enunciado. ☑

La igualdad 3.1 nos da la clave para resolver el problema de Dirichlet para discos pues permite calcular los valores de una función armónica en el interior del disco unidad conociendo sus valores en la frontera.

3.27 Teorema. *Dada una función continua* $\varphi : C(0,1)^* \to \mathbb{R}$*, la función* $\widehat{\varphi} : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{it}+z}{\mathrm{e}^{it}-z} \right) \varphi(\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t\,, \quad |z| < 1 \\
\widehat{\varphi}(z) &= \varphi(z) \qquad \textit{para } z \in C(0,1)^*
\end{aligned}$$

es armónica en $D(0,1)$*, continua en* $\overline{D}(0,1)$*, coincide con* φ *en* $C(0,1)^*$ *y es la única función que cumple estas condiciones.*

Demostración. Para probar que $\widehat{\varphi}$ es armónica observamos que por ser φ una función que toma valores reales podemos escribir para $|z|<1$

$$\widehat{\varphi}(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\varphi(e^{it})\,dt\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{w+z}{w-z}\frac{\varphi(w)}{w}\,dw\right)$$

Para probar que $\widehat{\varphi}$ es armónica en $D(0,1)$ bastará probar que la función

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{w+z}{w-z}\frac{\varphi(w)}{w}\,dw$$

es holomorfa en $D(0,1)$. Pero esto es claro pues

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{\varphi(w)}{w}\,dw+\frac{z}{\pi i}\int_{C(0,1)}\frac{\varphi(w)/w}{w-z}\,dw \qquad (|z|<1)$$

La primera de las integrales es un número complejo, la segunda es holomorfa por ser del tipo Cauchy.

Probaremos ahora que $\widehat{\varphi}$ es continua en 1. Usaremos que, en virtud de la fórmula de Poisson con $f(z)=1$, se verifica que

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \tag{3.2}$$

Podemos, por tanto, escribir para $|z|<1$

$$\widehat{\varphi(z)}-\varphi(1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\big(\varphi(e\,it)-\varphi(1)\big)\,dt \tag{3.3}$$

Sea $M>0$ tal que $|\varphi(z)|\leqslant M$ para todo $z\in C(0,1)^*$. Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta>0$ tal que

$$\left|\varphi(e^{it})-\varphi(1)\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{siempre que }|t|\leqslant\delta \tag{3.4}$$

En lo que sigue consideraremos $z\in D(0,1)$ tal que

$$|z-1|<\text{mín}\left\{\operatorname{sen}\delta/2,\ \frac{\varepsilon}{8M}\operatorname{sen}^2\delta/2\right\} \tag{3.5}$$

Ahora, para $\delta\leqslant|t|\leqslant\pi$ tenemos que

$$\left|e^{it}-z\right|\geqslant\left|1-e^{it}\right|-|1-z|=2\,|\operatorname{sen}t/2|-|1-z|\geqslant 2\operatorname{sen}\delta/2-|1-z|\overset{(3.5)}{>}\operatorname{sen}\delta/2 \tag{3.6}$$

Teniendo en cuenta la igualdad 3.3, tenemos que

$$\left|\widehat{\varphi(z)} - \varphi(1)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,|\varphi(e\,it)-\varphi(1)|\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,|\varphi(e\,it)-\varphi(1)|\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,|\varphi(e\,it)-\varphi(1)|\,dt \overset{(3.4)}{\leqslant}$$
$$\overset{(3.4)}{\leqslant} \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{\varepsilon}{2}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}2M\,dt \overset{(3.2)}{\leqslant}$$
$$\overset{(3.2)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\,dt \overset{(3.6)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi}\frac{1-|z|^2}{\operatorname{sen}^2\delta/2}\,dt =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi}(1-|z|)(1+|z|)\frac{2(\pi-\delta)}{\operatorname{sen}^2\delta/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M(1-|z|)}{\operatorname{sen}^2\delta/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{4M}{\operatorname{sen}^2\delta/2}\,|1-z| \overset{(3.5)}{<} \varepsilon$$

Sea ahora $z_0 = e^{is}$ un punto cualquiera de la circunferencia $C(0,1)^*$. Teniendo en cuenta la periodicidad de la función que se integra, para $|z| < 1$ tenemos

$$\widehat{\varphi}(z_0 z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z\,e^{is}}{e^{it}-z\,e^{is}}\right)\varphi(e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(t-s)}+z}{e^{i(t-s)}-z}\right)\varphi(e^{it})\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-s}^{\pi-s}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\varphi(e^{i(t+s)})\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)\varphi(z_0\,e^{it})\,dt$$

Consideremos la función $h : C(0,1)^* \to \mathbb{R}$ dada por $h(z) = \varphi(z_0 z)$ para todo $z \in C(0,1)^*$. Y sea $\widehat{h} : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widehat{h}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)h(e^{it})\,dt\,, \quad |z| < 1$$
$$\widehat{h}(z) = h(z) \qquad \text{para } z \in C(0,1)^*$$

Según acabamos de probar se tiene que $\widehat{h}(z) = \widehat{\varphi}(z_0 z)$ para todo $z \in \overline{D}(0,1)$. En virtud de lo antes visto, la función $\widehat{h}$ es continua en $z = 1$, luego:

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ |z|<1}}\widehat{\varphi}(z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}\widehat{\varphi}(z_0 z) = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}}\widehat{h}(z) = h(1) = \varphi(z_0)$$

Lo que prueba que $\widehat{\varphi}$ es continua en z_0. ☑

Teniendo en cuenta que si u es una función armónica y a, b son números complejos, la función $z \mapsto u(a+bz)$ también es armónica, el resultado anterior se extiende sin dificultad a un disco arbitrario.

3.28 Teorema. *Sea* $a\in\mathbb{C}$ *y* $R>0$. *Dada una función continua* $\psi : C(a,R)^* \to \mathbb{R}$, *la función* $\widehat{\psi} : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{R\,\mathrm{e}^{it}+(z-a)}{R\,\mathrm{e}^{it}-(z-a)}\right)\psi(a+R\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t\,, \quad z\in D(a,R)$$

$$\widehat{\psi}(z) = \psi(z) \qquad \textit{para } z\in C(a,R)^*$$

es armónica en $D(a,R)$, *continua en* $\overline{D}(a,R)$, *coincide con* ψ *en* $C(a,R)^*$ *y es la única función que cumple estas condiciones.*

Demostración. Sea $\varphi : C(0,1)^* \to \mathbb{R}$ la función definida por $\varphi(z) = \psi(a+Rz)$ para todo $z\in C(0,1)^*$. Sea $\widehat{\varphi} : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ la función definida en el teorema anterior. Se comprueba fácilmente que la función $\widehat{\psi} : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ dada por $\widehat{\psi}(z) = \widehat{\varphi}\left(\dfrac{z-a}{R}\right)$ para todo $z\in\overline{D}(a,R)$ verifica todas las condiciones del enunciado. ✓

Estamos ahora en condiciones de resolver la última cuestión que planteamos al definir las funciones armónicas.

3.29 Teorema. *Toda función* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *continua y que verifique la igualdad de la media, es decir,*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a+R\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$$

siempre que $\overline{D}(a,R) \subset \Omega$, *es armónica en* Ω.

Demostración. Sea $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Por el teorema anterior existe una función $\widehat{u}$ armónica en $D(a,R)$ y continua en $\overline{D}(a,R)$ que coincide con u en la frontera del disco, es decir, $\widehat{u}(z) = u(z)$ para $z \in \mathbb{C}(a,R)^*$. Veamos que u y $\widehat{u}$ deben ser la misma función.

Consideremos las funciones $\widehat{u}-u$ y $u-\widehat{u}$. Dichas funciones son subarmónicas en $D(a,R)$ (puesto que tanto $\widehat{u}$ como u verifican la igualdad de la media) y continuas en $\overline{D}(a,R)$. El principio del máximo para funciones subarmónicas afirma que el máximo lo deben alcanzar en la frontera. Pero

$$\text{máx}\{\widehat{u}(z)-u(z): z\in\overline{D}(a,R)\} = \text{máx}\{\widehat{u}(z)-u(z): z\in C(a,R)^*\} = 0$$

$$\text{mín}\{\widehat{u}(z)-u(z): z\in\overline{D}(a,R)\} = -\,\text{máx}\{u(z)-\widehat{u}(z): z\in C(a,R)^*\} = 0$$

Concluimos que $u=\widehat{u}$ en $\overline{D}(a,R)$, luego u es armónica en $D(a,R)$. Como esto es cierto cualquiera sea el disco $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$, concluimos que u es armónica en Ω ya que ser armónica es un concepto local. ✓

3.5. Comportamiento local de una función holomorfa: teoremas de la aplicación abierta y de la función inversa

3.30 Teorema de la aplicación abierta. *Una función holomorfa y no constante en un dominio es una aplicación abierta.*

Demostración. Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función holomorfa no constante y Ω un dominio. Tomemos U abierto en Ω. Probaremos que $f(U)$ es abierto.

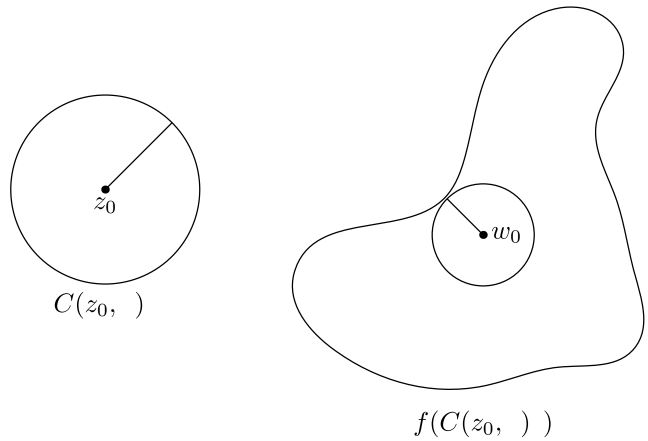
Sea $w_0\in f(U)$ y sea $z_0\in U$ tal que $f(z_0)=w_0$. El punto z_0 es un cero de la función no constante $z\mapsto f(z)-w_0$ y debe ser un cero aislado de dicha función. Luego existe un número $\rho>0$ de forma que $\overline{D}(z_0,\rho)\subset U$ y para $z\in\overline{D}(z_0,\rho)\setminus\{z_0\}$ se tiene que $f(z)\neq w_0$.

Llamemos $\lambda=\text{mín}\{|f(z)-w_0|: z\in C(z_0,\rho)^*\}$ y veamos que $D(w_0,\lambda/2)\subset f(U)$. Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $w\in D(w_0,\lambda/2)$ tal que $w\notin f(U)$. Sea

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-w}, \qquad z\in U$$

La función g así definida es holomorfa en U, además

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|w_0-w|} > \frac{1}{\lambda/2} = \frac{2}{\lambda}$$



Para $z \in C(z_0, \rho)^*$ tenemos que

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-w|} = \frac{1}{|f(z)-w_0-(w-w_0)|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|f(z)-w_0|-|w-w_0|} \leqslant \frac{1}{\lambda-|w-w_0|} < \frac{1}{\lambda-\lambda/2} = \frac{2}{\lambda}$$

Hemos probado que en el centro del disco $\overline{D}(z_0, \rho) \subset U$ el módulo de g toma un valor $|g(z_0)| > 2/\lambda$ mientras que en la frontera de dicho disco toma valores menores que $2/\lambda$. Esto contradice el principio del módulo máximo que afirma que $|g|$ debe alcanzar su máximo en $\overline{D}(z_0, \rho)$ siempre en la frontera. $\boxed{\checkmark}$

3.31 Lema. *Dada una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, se verifica que la función $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ dada por*

$$g(z,w) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \qquad z \neq w$$
$$g(z,z) = f'(z) \qquad z = w$$

es continua en $\Omega \times \Omega$.

Demostración. Sea $G = \{(z,w) \in \Omega \times \Omega : z \neq w\}$ que es un conjunto abierto en $\Omega \times \Omega$. La restricción de g a dicho conjunto es evidentemente continua, luego g es continua en G. Los únicos puntos donde debemos probar la continuidad de g son los de la forma (a,a) para $a \in \Omega$. Veamos que g es continua también en dichos puntos.

Dado $\varepsilon > 0$ por la continuidad de f' existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para $z \in D(a,\delta)$ se tiene que $|f'(z) - f'(a)| < \varepsilon$. Veamos que dicho δ cumple la condición de continuidad para g, esto es, si

$$\left.\begin{array}{r} |z-a| < \delta \\ |w-a| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |g(z,w) - g(a,a)| = |g(z,w) - f'(a)| < \varepsilon$$

Si $z = w$ la desigualdad anterior se reduce a la continuidad de f'. Supongamos entonces que $z \neq w$ son puntos en $D(a,\delta)$. Escribimos

$$f(z) - f(w) = \int_{[w,z]} f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 f'\big((1-t)w + tz\big)(z-w)\,\mathrm{d}t$$

con lo cual $g(z,w) = \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} = \displaystyle\int_0^1 f'\big((1-t)w+tz\big)\,\mathrm{d}t$. Ahora bien

$$g(z,w) - f'(a) = \int_0^1 \Big(f'\big((1-t)w+tz\big) - f'(a)\Big)\,\mathrm{d}t$$

tomando módulos

$$|g(z,w) - f'(a)| \leqslant \int_0^1 \big|f'\big((1-t)w+tz\big) - f'(a)\big|\,\mathrm{d}t < \varepsilon$$

puesto que el segmento $[z,w]^* \subset D(a,\delta)$ y por tanto $\big|f'\big((1-t)w+tz\big) - f'(a)\big| < \varepsilon$ para todo $t \in [0,1]$. $\boxed{\checkmark}$

Este lema permite ahora demostrar de forma cómoda el siguiente resultado.

3.32 Teorema de inversión local. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω, a un punto de Ω en el que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe un abierto $U \subset \Omega$ que contiene al punto a verificándose que*

(I) *f es inyectiva en U y la imagen $f(U) = V$ es abierto.*

(II) *La función $\varphi = (f|_U)^{-1} : V \to \mathbb{C}$ es holomorfa en V siendo $\varphi'\big(f(z)\big)f'(z) = 1$ para todo $z \in U$.*

Demostración. Sea g la función del lema anterior. Por hipótesis $g(a,a) = f'(a) \neq 0$. Sea $\lambda = |f'(a)|$. Puesto que g es continua también lo es $|g|$, luego existe $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$, y para $z, w \in D(a, \delta)$ se cumple $|g(z,w)| \geqslant \lambda/2 > 0$. Esta condición implica que para $z \neq w$ en $D(a, \delta)$ es

$$|f(z) - f(w)| \geqslant \frac{\lambda}{2} |z - w| \tag{3.7}$$

lo que prueba la inyectividad de f en $D(a, \delta)$. Además $g(z,z) = f'(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, \delta)$.

Sea $U = D(a, \delta)$. Puesto que f es holomorfa y no constante en U, el teorema de la función abierta nos asegura que f es abierta. En consecuencia $f(U) = V$ es un conjunto abierto y, además, la función $\varphi = (f|_U)^{-1} : V \to \mathbb{C}$ es continua (lo que también se deduce inmediatamente de la desigualdad (3.7)).

Falta probar la derivabilidad de φ. Sea $w \in V$ y tomemos una sucesión de número complejos $\{w_n\}$ en V con $w_n \neq w$ que converja a w. La sucesión $z_n = \varphi(w_n) \in U$ converge a $z = \varphi(w)$. Por la inyectividad se tiene que $z_n \neq z$. Ahora bien

$$\frac{\varphi(w_n) - \varphi(w)}{w_n - w} = \frac{z_n - z}{f(z_n) - f(z)} = \frac{1}{\dfrac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}} \to \frac{1}{f'(z)}$$

lo que prueba que $\varphi'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$ donde $w = f(z)$. ☑

Podemos preguntarnos qué ocurriría en el teorema de inversión local si $f'(a) = 0$. Por ejemplo, podemos considerar la función polinómica $f(z) = z^n$ cuya derivada se anula en $a = 0$ donde f tiene un cero de orden n y en cualquier entorno de cero la función f toma cada valor exactamente n veces. Este comportamiento de la función $f(z) = z^n$ en un entorno de cero da una pista de lo que sucede en el caso general. Necesitaremos el siguiente lema de interés por sí mismo.

3.33 Lema. *Toda función holomorfa que no se anula en un dominio estrellado tiene logaritmos holomorfos en dicho dominio. En particular, tiene raíces holomorfas de cualquier orden.*

Demostración. Sea Ω un dominio estrellado y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. En tal caso la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ es holomorfa en Ω y, en virtud del teorema de Cauchy para dominios estrellados, se sigue que dicha función tiene primitivas en Ω. En virtud del teorema 1.49, sabemos que esto equivale a que f tiene un logaritmo holomorfo en Ω. Es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Dado $m \in \mathbb{N}$ la función $h(z) = \exp\big(g(z)/m\big)$

es holomorfa en Ω y verifica que

$$\big(h(z)\big)^m = \exp\big(g(z)/m)\big)^m = \exp\big(g(z)\big)\big) = f(z) \qquad \text{para todo } z \in \Omega$$

es decir, h es una raíz m-ésima holomorfa de f en Ω. ☑

3.34 Comportamiento local de una función holomorfa. *Sea Ω un dominio, a un punto de Ω y f una función holomorfa y no constante en Ω. Sea m el orden del cero que tiene en el punto a la función $z \mapsto f(z) - f(a)$. Entonces existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para todo $w \in D\big(f(a),\varepsilon\big) \setminus \{f(a)\}$ se verifica que hay exactamente m puntos $z_k \in D(a,\delta)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, tales que $f(z_k) = w$.*

Demostración. Por la caracterización de los ceros de una función holomorfa sabemos que

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m \varphi(z)$$

siendo φ una función holomorfa en Ω que no se anula en el punto a, $\varphi(a) \neq 0$. Tomemos $\rho > 0$ de forma que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $\varphi(z) \neq 0$ para $z \in D(a,\rho)$.

El lema anterior nos asegura que φ tiene una raíz m-ésima holomorfa en el disco $D(a,\rho)$, esto es, existe $g \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ de forma que $g(z)^m = \varphi(z)$ para $z \in D(a,\rho)$. Llamemos $h(z) = (z-a)g(z)$. Evidentemente $h \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ y verifica $f(z) - f(a) = h(z)^m$.

Puesto que $h'(a) = g(a) \neq 0$ aplicamos el teorema de inversión local a h y encontramos $\delta > 0$ de forma que $D(a,\delta) \subset D(a,\rho)$ y h es inyectiva en $D(a,\delta)$. Además, como $0 \in h\big(D(a,\delta)\big)$ que es un conjunto abierto por ser h holomorfa (teorema de la aplicación abierta), existe $\varepsilon > 0$ de forma que

$$D(0, \sqrt[m]{\varepsilon}) \subset h\big(D(a,\delta)\big)$$

Tomemos ahora $w \in D(f(a),\varepsilon) \setminus \{f(a)\}$ con lo cual $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$. Sean $\{w_1, \dots, w_n\}$ las raíces de orden m del número complejo $w - f(a)$. Todas ellas se encuentran en el disco $D(0, \sqrt[m]{\varepsilon})$. Puesto que $D(0, \sqrt[m]{\varepsilon}) \subset h\big(D(a,\delta)\big)$ y h es inyectiva en el disco $D(a,\delta)$, existen exactamente m puntos $z_1, \dots, z_k \in D(a,\delta)$ tales que $h(z_k) = w_k$ para $1 \leqslant k \leqslant m$. De todo lo anterior obtenemos

$$f(z_k) - f(a) = \big(h(z_k)\big)^m = w - f(a)$$

con lo cual $f(z_k) = w$ para $k = 1, \dots, m$. Finalmente, es inmediato comprobar que

$$\{z \in D(a,\delta) : f(z) = w\} = \{z_1, \dots, z_m\}$$

es decir, no hay otros puntos en $D(a,\delta)$ cuya imagen por f sea w. $\checkmark$

Observa que el caso particular de este teorema para el caso de un cero de orden 1 contiene parte del teorema de inversión local.

3.35 Corolario. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y a un punto de Ω. Equivalen:*

(a) $f'(a)\neq 0$

(b) f *es inyectiva en un entorno de* a.

Demostración.

$(a)\Rightarrow(b)$ Es el teorema de inversión local.

$(b)\Rightarrow(a)$ Si fuese $f'(a)=0$ entonces la aplicación $z\to f(z)-f(a)$ tendría un cero en a de orden al menos 2. El teorema anterior afirma que en estas condiciones f toma cualquier valor en un entorno de a al menos dos veces, luego no sería inyectiva en contra de lo supuesto. $\checkmark$

En variable real una función derivable en un intervalo I con $f'(x)\neq 0$ para todo $x\in I$ es inyectiva en I. El recíproco no es cierto como lo prueba la función $x\mapsto x^3$. En variable compleja acabamos de probar que esto ocurre al contrario, una función holomorfa inyectiva en Ω tiene derivada no nula en todo punto de Ω, mientras que el recíproco no es cierto como le ocurre a la función $z\mapsto \mathrm{e}^z$.

3.36 Teorema de inversión global. *Sea f una función holomorfa en Ω e inyectiva. Entonces f es una biyección biholomorfa de Ω sobre $f(\Omega)$.*

Demostración. El corolario anterior nos asegura, gracias a la inyectividad, que $f'(z)\neq 0$ para cualquier $z\in\Omega$. Puesto que f es inyectiva existe su inversa. El teorema de inversión local nos garantiza que f es localmente invertible de forma holomorfa, luego f^{-1} es holomorfa en $f(\Omega)$. $\checkmark$

3.5.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 82 Sea $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y supongamos que para cada $z\in\mathbb{C}$ hay alguna derivada de f que se anula en z. Prueba que f es una función polinómica.

Ejercicio resuelto 83 Sea $f:D(0,1)\to\mathbb{C}$ una función holomorfa y no constante. Se define

$$M(r)=\text{máx}\{|f(z)|:|z|=r\}\quad(0<r<1).$$

a) Prueba que la función M es estrictamente creciente.

b) Supongamos que hay un número natural, n, tal que para todo $r\in]0,1[$ es $M(r)=r^n$, y deduce que $f(z)=\alpha z^n$ para todo $z\in D(0,1)$, donde $\alpha\in\mathbb{C}$ con $|\alpha|=1$.

Ejercicio resuelto 84 Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos del plano, $f\in H(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1)\subset\Omega_2$, y $u\in A(\Omega_2)$. Prueba que la composición $u\circ f$ es armónica en Ω_1.

Ejercicio resuelto 85 Sea u una función armónica en todo el plano y supongamos que existen números reales positivos, a,b, tales que $u(z)\leqslant a|\log|z||+b$ para todo $z\in\mathbb{C}^*$. ¿Qué puede afirmarse de u?

Ejercicio resuelto 86 Sea f una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $f(z)=0$ para todo $z=\exp(it)$ con $0\leqslant t\leqslant\pi/2$. Prueba que $f(z)=0$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$.

Solución.
La simetría del problema lleva a considerar la función $g(z)=f(z)f(iz)f(-iz)f(-z)$. Veamos que g se anula en la circunferencia unidad.

Sea $z=\mathrm{e}^{it}$, entonces:

a) Si $-\pi\leqslant t\leqslant-\pi/2$, es $f(-z)=f(\mathrm{e}^{i(t+\pi)})=0$.

b) Si $-\pi/2\leqslant t\leqslant 0$, es $f(iz)=f(\mathrm{e}^{i(t+\pi/2)})=0$.

c) Si $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, es $f(z)=0$.

d) Si $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$, es $f(-iz)=f(\mathrm{e}^{i(t-\pi/2)})=0$.

Deducimos que $g(z)=0$ para todo $z\in C(0,1)^*$. Como g es holomorfa en $D(0,1)$, que es un dominio acotado, y es continua en $\overline{D}(0,1)$; en virtud del principio del módulo máximo, sabemos que:

$$\text{máx}\{|g(z)|:z\in\overline{D}(0,1)\}=\text{máx}\{|g(z)|:z\in C(0,1)^*\}=0$$

y concluimos que $g(z)=0$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$.

Sea $0<\rho<1$, y $z\neq 0$ tal que $|z|<\rho$. Puesto que $g(z)=0$, se sigue que *alguno de los números* $f(z), f(iz), f(-iz), f(-z)$ es igual a cero y, como $|\pm iz|=|\pm z|=|z|<\rho$, concluimos que f se anula en algún punto de $D(0,\rho)\setminus\{0\}$, es decir, si $Z(f)$ es el conjunto de los ceros de f en $D(0,1)$, hemos probado que $0\in Z(f)'\cap D(0,1)$. El principio de identidad implica que $f(z)=0$ para todo $z\in D(0,1)$ y, por continuidad, concluimos que $f(z)=0$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$.

También puede procederse como sigue: supongamos, razonando por reducción al absurdo, que f no es idénticamente nula en $D(0,1)$. Sabemos que en tal caso, como consecuencia del principio de identidad, el conjunto $\mathcal{A}=\{z\in D(0,1): f(z)=0\}$ es numerable. Evidentemente:

$$\{z\in D(0,1): g(z)=0\}=\mathcal{A}\cup(i\mathcal{A})\cup(-\mathcal{A})\cup(-i\mathcal{A}),$$

y, según hemos probado, $\{z\in D(0,1): g(z)=0\}=D(0,1)$. Lo cual lleva a contradicción porque $D(0,1)$, que es un conjunto no numerable, no puede ser igual al conjunto $\mathcal{A}\cup(i\mathcal{A})\cup(-\mathcal{A})\cup(-i\mathcal{A})$ el cual es numerable por ser unión finita de conjuntos numerables. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{87}$ Sea f una función no constante, continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en su interior, tal que $|f(z)|=1$ siempre que $|z|=1$. Prueba que $f(\overline{D}(0,1))=\overline{D}(0,1)$.

Sugerencia: Sea $\mathcal{U}=f(D(0,1))$. Justifica que $\mathcal{U}=\overline{\mathcal{U}}\cap D(0,1)$.

Solución.

Como f es holomorfa en $D(0,1)$, que es un dominio acotado, y es continua en $\overline{D}(0,1)$; en virtud del principio del módulo máximo, sabemos que:

$$\max\{|f(z)|: z\in\overline{D}(0,1)\}=\max\{|f(z)|: z\in C(0,1)^*\}$$

y concluimos que $|f(z)|\leqslant 1$ para todo $z\in\overline{D}(0,1)$, es decir[1], $f(\overline{D}(0,1))\subseteq\overline{D}(0,1)$. Además, como f no es constante, el mismo principio nos dice que ha de ser $|f(z)|<1$ siempre que $|z|<1$; es decir $\mathcal{U}=f(D(0,1))\subseteq D(0,1)$ (alternativamente: sabemos, en virtud del teorema de la aplicación abierta, que $\mathcal{U}$ es abierto y, al estar contenido en el disco unidad cerrado, debe de estar contenido en su interior $D(0,1)$). Hemos probado que $\mathcal{U}\subseteq\overline{\mathcal{U}}\cap D(0,1)$.

Para probar la inclusión contraria, sea $w\in\overline{\mathcal{U}}\cap D(0,1)$. Por definición de adherencia: $w=\lim\{w_n\}$ donde $w_n\in\mathcal{U}$, es decir, $w_n=f(z_n)$ para $z_n\in D(0,1)$. Como la sucesión $\{z_n\}$ es acotada, en virtud del teorema de Bolzano-Weierstrass, podemos suponer sin pérdida de generalidad que es convergente (en otro caso bastaría sustituirla por una parcial suya convergente). Sea, pues, $\lim\{z_n\}=z$. Naturalmente, $z\in\overline{D}(0,1)$ y, por continuidad de f, es $f(z)=w$. Además, como $|w|<1$, se sigue de las hipótesis hechas, que ha de ser $|z|<1$. Concluimos así que $w=f(z)\in f(D(0,1))=\mathcal{U}$.

Hemos probado que $\mathcal{U}=\overline{\mathcal{U}}\cap D(0,1)$. Se sigue que $\mathcal{U}$ es abierto (teorema de la aplicación abierta) y cerrado relativo a $D(0,1)$ y, por conexión, ha de verificarse que $\mathcal{U}=D(0,1)$. Como $f(\overline{D}(0,1))$ es cerrado por ser la imagen continua de un compacto, y $f(\overline{D}(0,1))\supseteq \mathcal{U}=D(0,1)$, deducimos que $f(\overline{D}(0,1))\supseteq \overline{D}(0,1)$ y, finalmente, concluimos que $f(\overline{D}(0,1))=\overline{D}(0,1)$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{88}$ Sea f una función entera no constante y supongamos que hay un número complejo $\alpha\neq 1$ tal que $f(z)=f(\alpha z)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

a) Prueba que, $f(z)=f(\alpha^n z)$ para todo $n\in\mathbb{Z}$ y todo $z\in\mathbb{C}$, y deduce que, necesariamente, $|\alpha|=1$.

b) Justifica que el conjunto $\{\alpha^n : n\in\mathbb{Z}\}$ es finito y, por tanto, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $\alpha^m=1$.

c) Sea m el menor número natural tal que $\alpha^m=1$. Justifica que hay una función entera g tal que $f(z)=g(z^m)$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

3.5.2. Ejercicios propuestos

124. Sea f una función holomorfa no constante en el disco $D(a,R)$. Para $0<r<R$ definamos

$$M(r)=\text{máx}\{|f(z)| : |z-a|=r\} \qquad A(r)=\text{máx}\,\{\operatorname{Re} f(z) : |z-a|=r\}$$

Prueba que las funciones $r\mapsto M(r)$ y $r\mapsto A(r)$ son estrictamente crecientes. Si se supone que f es una función entera no constante entonces $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r)=\lim\limits_{r\to+\infty} A(r)=+\infty$.

125. Sea Ω un dominio acotado del plano y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Prueba que si $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω también converge uniformemente en $\overline{\Omega}$.

126. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $g:\Omega_1\to\mathbb{C}$ continua con $g(\Omega_1)\subset\Omega_2$ y $f\in H(\Omega_2)$ tal que $f'(z)\neq 0\ \forall z\in\Omega_2$. Prueba que si $f\circ g$ es holomorfa en Ω_1 también lo es g.

127. Sea f una función entera tal que $f(z)\in\mathbb{R}$ para $|z|=1$. Prueba que f es constante.

128. Sean $f, g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas en el disco abierto unidad y continuas en el disco cerrado unidad. Se supone que para $|z| = 1$ se verifica que $g(z) = \overline{f(z)}$. Prueba que f y g son constantes.

129. Sea $f \in H(\mathbb{C}^*)$ tal que $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Prueba que f tiene un cero en $\mathbb{C}^*$.

130. Justifica que no puede existir una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para todo w con $|w| = 1$ se tenga $\lim\limits_{z\to w} f(z) = \infty$.

131. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y verificando que $|f(z^2)| \geqslant |f(z)|$ para todo $z \in D(0,1)$. Prueba que f es constante.

132. ¿Verdadero o falso?

a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f es constante.

b) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $\operatorname{Re}(f)$ está acotada entonces f está acotada.

133. Describir las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}^*$ que verifican $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $|f(z)| = 1$ siempre que $|z| = 1$.

134. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1, |\operatorname{Im} z| < 1\}$, y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω verificando que $f(z) = 0$ siempre que $z \in \overline{\Omega}$ y $\operatorname{Re} z = 1$. Prueba que $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{\Omega}$.

Sugerencia: considera la función $g(z) = f(z)f(iz)f(-z)f(-iz)$.

135. Sea f una función polinómica de grado $n \geqslant 1$. Supongamos que $|f(z)| \leqslant 1$ siempre que $|z| = 1$. Pruébese que $|f(z)| \leqslant |z|^n$ siempre que $|z| \geqslant 1$.

136. Sea f una función entera acotada en el conjunto de puntos $(\mathbb{R} + i\mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} + i\mathbb{R})$. Justifica que f es constante.

137. Sea f una función entera no constante. Dado un número $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}, \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leqslant \rho\}$$

a) Prueba que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.

b) Justifica que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f.

138. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y que tiene límite finito en infinito. Justifica que la función $|f|$ alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si f no es constante, la función φ definida para todo $r > 1$ por

$$\varphi(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

es estrictamente decreciente.

139. Sea Ω un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$. Prueba que en cualquier entorno de z_0 hay puntos a, b tales que $f'(z_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

140. Sea f holomorfa en un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$. Prueba que, para $r > 0$ suficientemente pequeño, se verifica que:

$$\frac{2\pi i}{f'(a)} = \int_{C(a,r)} \frac{1}{f(w) - f(a)}\, dw.$$

Capítulo 4

Forma general del teorema de Cauchy

4.1. Introducción

En este capítulo pretendemos dar respuesta a los dos problemas siguientes:

1. Caracterizar los *caminos* cerrados γ en un abierto Ω tales que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para toda función f holomorfa en Ω.
2. Caracterizar los *abiertos* Ω tales que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω y toda función holomorfa f en Ω. Equivalentemente, caracterizar los abiertos en los que se verifica que toda función holomorfa tiene primitivas.

Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω. Entonces, como caso particular, si z es un punto que no está en Ω la función $w \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ es holomorfa en Ω, luego deberá cumplirse que

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0$$

Si ahora f es una función holomorfa en Ω y $z \in \Omega$, la aplicación

$$w \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

es holomorfa en Ω (pues es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ por lo que el teorema de extensión de Riemann nos asegura que es holomorfa en todo Ω) y deberá ser

$$\int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = 0$$

Supuesto que $z \notin \gamma^*$ tenemos que

$$0 = \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

de donde

$$f(z)\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Para el caso de que γ sea la circunferencia frontera de un disco contenido en Ω y z pertenezca a dicho disco sabemos que $\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = 2\pi i$ por lo que la igualdad anterior es la conocida fórmula de Cauchy para una circunferencia. En el caso general, la igualdad anterior nos proporciona una representación integral de f conocidos sus valores sobre un cierto camino cerrado γ.

Queda claro, por estas consideraciones, que para responder a los problemas planteados debemos empezar estudiando la integral $\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$ donde $z \notin \gamma^*$.

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva regular cerrada y $z \notin \gamma^*$. Pongamos $\sigma(t) = \gamma(t) - z$. Tenemos

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\,\mathrm{d}t$$

Esta igualdad nos indica que debemos buscar un logaritmo derivable de σ. Para ello es suficiente, por ser σ derivable (ver proposición 1.47), que encontremos un argumento continuo de σ, es decir, una función $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y $\vartheta(t) \in \operatorname{Arg}\big(\sigma(t)\big)$ para todo $t \in [a,b]$. Supuesto encontrado tal argumento continuo, definimos $\varphi(t) = \log|\sigma(t)| + i\vartheta(t)$. La función φ así definida es un logaritmo derivable de σ y

$$\varphi'(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}, \quad \text{para todo } t \in [a,b]$$

lo que nos permite calcular la integral anterior sin más que aplicar la regla de Barrow

$$\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = \varphi(b) - \varphi(a) = \log|\sigma(b)| + i\vartheta(b) - \log|\sigma(a)| - i\vartheta(a) = i(\vartheta(b) - \vartheta(a)) = i2k\pi$$

La última igualdad es consecuencia de que $\vartheta(a)$ y $\vartheta(b)$ son argumentos del mismo número complejo $\sigma(a) = \sigma(b)$ luego su diferencia es un múltiplo entero de 2π.

Hemos justificado la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi}=k\in\mathbb{Z}$$

siendo $\vartheta(t)$ un argumento continuo de $\gamma(t)-z$.

El número entero k que aparece es intuitivamente el número de veces que la curva σ rodea al origen o equivalentemente el número de veces que γ rodea al punto z.

Para formalizar nuestro razonamiento lo único que necesitamos justificar es que la curva σ tiene argumentos continuos. De esto nos ocuparemos a continuación.

4.2. Índice de una curva cerrada respecto de un punto

4.1 Teorema. *Toda curva $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}^*$ tiene argumentos continuos. Es decir, existe una función $\vartheta:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y que verifica que $\vartheta(t)\in\mathrm{Arg}(\gamma(t))$ para todo $t\in[a,b]$. Además si ϑ_1, ϑ_2 son dos argumentos continuos de γ entonces se verifica que $\vartheta_1(b)-\vartheta_1(a)=\vartheta_2(b)-\vartheta_2(a)$.*

Demostración. Definimos $\rho=\min\{|\gamma(t)|:a\leqslant t\leqslant b\}>0$ y, por continuidad de γ, sea $\delta>0$ de forma que si $|s-t|<\delta$ entonces $|\gamma(s)-\gamma(t)|<\rho$. Sea $t_0=a<t_1<\cdots<t_n=b$ una partición de $[a,b]$ tal que $t_k-t_{k-1}<\delta$ para $1\leqslant k\leqslant n$. En cada punto $\gamma(t_k)$ de la curva vamos a centrar un disco $D_k=D(\gamma(t_k),\rho)$. Por la definición de ρ, $0\notin D_k$ para ningún k y, además, por la elección de δ se tiene que $\gamma(t)\in D_k$ para $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$. De esta forma hemos cubierto la curva por una serie de discos que se cortan dos a dos (ver figura 4.1).

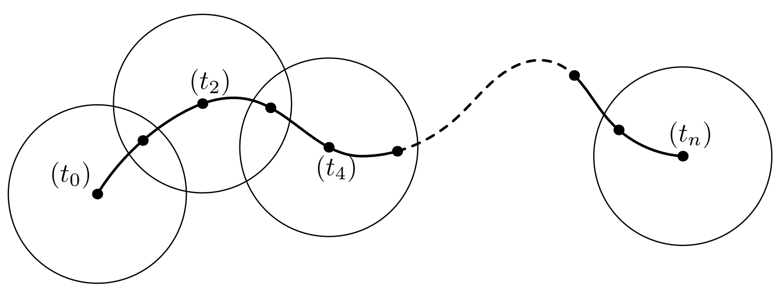


Figura 4.1: Construcción de un argumento continuo

Puesto que el disco D_k es un dominio estrellado que no contiene al cero existe un logaritmo holomorfo de la identidad, equivalentemente hay un argumento continuo de la identidad, esto es, existe para cada k una función $A_k : D_k \to \mathbb{R}$ continua cumpliendo $A_k(z) \in \operatorname{Arg}(z)$.

Consideramos ahora para cada k, $\vartheta_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}$ dada por $\vartheta_k(t) = A_k(\gamma(t)) \in \operatorname{Arg}(\gamma(t))$. Definida ϑ_1 debemos ajustar ϑ_2 para que no perdamos la continuidad en el punto t_1. De la misma forma debemos ajustar ϑ_3 para no perder la continuidad en t_2, etc.

Para hacer esto llamemos $2\pi m_k = \vartheta_k(t_k) - \vartheta_{k+1}(t_k)$ y definimos $\vartheta : [a,b] \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\begin{array}{ll}
\vartheta(t) = \vartheta_1(t) & t_0 = a \leqslant t \leqslant t_1 \\
\vartheta(t) = \vartheta_2(t) + 2\pi m_1 & t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\
\vartheta(t) = \vartheta_3(t) + 2\pi(m_1 + m_2) & t_2 \leqslant t \leqslant t_3 \\
\vdots & \vdots \\
\vartheta(t) = \vartheta_n(t) + 2\pi(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}) & t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n = b
\end{array}$$

En general

$$\vartheta(t) = \vartheta_k(t) + 2\pi \sum_{j=1}^{k-1} m_j \qquad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k \quad k = 1, \dots, n$$

Con ello es claro que ϑ es un argumento continuo de γ en $[a,b]$.

Ahora, si ϑ_1 y ϑ_2 son dos argumentos continuos de γ en $[a,b]$, entonces la función $\dfrac{\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)}{2\pi}$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y toma valores enteros, luego debe ser constante, esto es, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(t) + 2k\pi$ por lo que $\vartheta_1(b) - \vartheta_1(a) = \vartheta_2(b) - \vartheta_2(a)$. $\boxed{\checkmark}$

Observación

No hay que confundir un argumento continuo de una curva γ con un argumento continuo en el soporte de γ. Así, si $\gamma(t) = e^{it}$, la función $\vartheta(t) = t$ para $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ es un argumento continuo de γ pero en la imagen $\gamma^* = C(0,1)^*$ sabemos que no hay ningún argumento continuo.

Naturalmente, si se conoce un argumento continuo, ϑ, en un conjunto del plano que contenga al soporte de una curva γ, entonces se dispone de un argumento continuo de γ, a saber, $t \mapsto \vartheta(\gamma(t))$. Por ejemplo, si $\gamma^* \cap \mathbb{R}_o^- = \emptyset$, entonces $t \mapsto \arg(\gamma(t))$ es un argumento continuo de γ.

El resultado anterior motiva la siguiente definición.

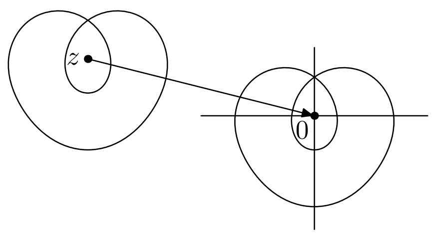
4.2 Definición. Sea γ una curva definida en un intervalo $[a,b]$. Supongamos que $z \notin \gamma^*$ y sea ϑ un argumento continuo de la curva $\gamma - z$. Se define la *variación del argumento de* z

a lo largo de γ como el número

$$\Delta_\gamma(z) = \vartheta(b) - \vartheta(a)$$

Cuando la curva γ es cerrada, se define el *índice de* z *respecto de* γ como el número entero

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{\Delta_\gamma(z)}{2\pi} = \frac{\vartheta(b) - \vartheta(a)}{2\pi}$$



Geométricamente, $\vartheta(t)$ es una medida del ángulo que forma con el eje de abscisas el segmento que une z con $\gamma(t)$. Cada vez que γ da una vuelta completa alrededor de z en sentido contrario al de las agujas del reloj $\vartheta(t)$ aumenta en 2π y si la vuelta es en el sentido de las agujas del reloj $\vartheta(t)$ disminuye en 2π. Por ello, como ya observamos antes, $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ representa el número de veces que la curva γ rodea al punto z teniendo en cuenta que vueltas alrededor de z en sentido opuesto se cancelan.

El teorema anterior nos asegura que el índice está bien definido y no depende del argumento continuo que escojamos.

4.3 Propiedades del índice. *Dada una curva cerrada* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$*, la función definida para* $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ *por* $z \mapsto \operatorname{Ind}_\gamma(z)$ *tiene las propiedades:*

1. *Es continua y por tanto es constante en cada componente conexa de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
2. *Vale cero en la componente no acotada de* $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Demostración.

1. Sea $z_0 \notin \gamma^*$ y $\rho = \min\{|\gamma(t) - z_0| : a \leqslant t \leqslant b\}$. Tenemos que $\rho > 0$ y $D(z_0, \rho) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Sea $z \in D(z_0, \rho)$ fijo en lo que sigue. Podemos escribir

$$\gamma(t) - z = \big(\gamma(t) - z_0\big) \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(t) - z_0}$$

Observemos que

$$\left|1-\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\gamma(t)-z_0}\right| < 1$$

luego para todo $t\in[a,b]$, $\dfrac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}\in D(1,1)$, disco que está contenido en el semiplano de la derecha donde el argumento principal es continuo.

Sea ϑ_0 un argumento continuo de la curva $\gamma-z_0$. Definimos

$$\vartheta(t)=\vartheta_0(t)+\arg\left(\frac{\gamma(t)-z}{\gamma(t)-z_0}\right)$$

Tenemos entonces que ϑ así definida es continua y además es un argumento de $\gamma(t)-z$. Ahora, como $\vartheta(b)-\vartheta(a)=\vartheta_0(b)-\vartheta_0(a)$, resulta que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$ para todo $z\in D(z_0,\rho)$. Hemos probado así que la función $z\mapsto \operatorname{Ind}_\gamma(z)$ es localmente constante, luego es continua.

2. Sea $R>0$ tal que $|\gamma(t)|<R$ para todo $t\in[a,b]$ y elijamos z_0 de modo que $\operatorname{Re} z_0<-R$. Evidentemente $z_0\notin\gamma^*$ y luego $\operatorname{Re}(\gamma(t)-z_0)>0$. Hemos trasladado la curva al semiplano de la derecha. En dicha región tenemos un argumento continuo, el argumento principal. Definimos

$$\vartheta(t)=\arg(\gamma(t)-z_0)$$

que es un argumento continuo de $\gamma-z_0$ y además $\vartheta(a)=\vartheta(b)$, por tanto, $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)=0$.

Ahora bien, $z_0\in\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z<-R\}$ que es un conjunto conexo no acotado contenido en $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ y por tanto está contenido en la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Como el índice es constante en componentes conexas deducimos que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=0$ para cualquier z en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. $\boxed{\checkmark}$

Al comienzo del capítulo obtuvimos una expresión integral del índice de una curva respecto de un punto, que vamos a recoger en el siguiente resultado.

4.4 Proposición. *Sea $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ un camino cerrado y z un punto que no está en su soporte. Entonces*

$$\boxed{\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}$$

Demostración. Sea ϑ un argumento continuo de la curva $\gamma-z$. Entonces

$$\varphi(t)=\log|\gamma(t)-z|+i\vartheta(t)$$

es un logaritmo continuo de $\gamma(t)-z$. Sea $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$, una partición del intervalo $[a,b]$ de forma que $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ es derivable. Entonces $\varphi_k=\varphi|_{[t_{k-1},t_k]}$ es derivable y

$$\varphi_k'(t)=\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}, \quad t_{k-1}<t<t_k$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n\big(\varphi_k(t_k)-\varphi_k(t_{k-1})\big) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^n\big(\varphi(t_k)-\varphi_(t_{k-1})\big) = \frac{1}{2\pi i}\big(\varphi(b)-\varphi(a)\big) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\big(\log|\gamma(b)-z|+i\vartheta(b)-\log|\gamma(a)-z|-i\vartheta(a)\big) = (\text{ya que } \gamma(a)=\gamma(b)) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}i(\vartheta(b)-\vartheta(a)) = \operatorname{Ind}_\gamma(z)
\end{aligned}$$

☑

4.2.1. Cadenas

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de “cadenas”. Una *cadena* es una combinación lineal formal con coeficientes enteros de caminos, es decir, una expresión de la forma

$$\Gamma=m_1\gamma_1+m_2\gamma_2+\cdots+m_q\gamma_q$$

donde cada γ_i es un camino y cada m_i es un entero. El símbolo “$+$” que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni a la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena Γ está formada por varios caminos. Por ejemplo, podemos considerar la cadena

$$\Gamma=C(0,1)+C(i,2)-2C(1+i,1/2)$$

que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Se define además el *soporte* de Γ, que notaremos Γ^*, como

$$\Gamma^*=\gamma_1^*\cup\gamma_2^*\cup\cdots\cup\gamma_q^*$$

y la *longitud* de Γ por

$$\ell(\Gamma)=\sum_{j=1}^q|m_j|\,\ell(\gamma_j)$$

Por definición, para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales.

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} m_j \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Dadas dos cadenas Γ y $\Sigma = k_1\sigma_1 + \cdots + k_p\sigma_p$ entonces su suma es otra cadena compuesta por todos los caminos que forman Γ y todos los que forman Σ:

$$\Gamma + \Sigma = m_1\gamma_1 + \cdots + m_q\gamma_q + k_1\sigma_1 + \cdots + k_p\sigma_p$$

Evidentemente se cumple

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Es cierta también la acotación básica, esto es, si $M = \max\{|f(z)| : z \in \Gamma^*\}$ entonces

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leqslant \ell(\Gamma) M$$

Como caso particular de cadenas tenemos los *ciclos*. Un ciclo es una cadena formada por caminos cerrados. En el ejemplo anterior Γ era un ciclo pues estaba formado por circunferencias.

Si Γ es un ciclo se define el índice de un punto $z \notin \Gamma^*$ respecto a Γ como la suma de los índices del punto z respecto a cada uno de los caminos que forman el ciclo.

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_{j=1}^{q} m_j \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z)$$

4.5 Proposición. *Dado un ciclo Γ, la función $z \mapsto \operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)$ es continua, luego constante en componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ y vale 0 en la componente conexa no acotada.*

4.6 Definición. Dos cadenas Σ y Γ se llaman *equivalentes* si para toda función f continua en $\Sigma^* \cup \Gamma^*$ se verifica que $\displaystyle\int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z$.

4.7 Definición. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un ciclo Γ en Ω, diremos que Γ es *nulhomólogo* respecto de Ω si el índice de Γ con respecto a todo punto que no esté en Ω es cero:

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

4.3. Forma general del teorema de Cauchy y de la fórmula integral de Cauchy

A continuación demostraremos el teorema principal del capítulo que afirma que la integral de toda función holomorfa en un abierto sobre un ciclo nulhomólogo respecto de dicho abierto vale cero y además establece una representación integral de dicha función. La demostración que veremos es del año 1971 y se debe a J. D. Dixon.

4.8 Lema. *Dados un abierto Ω, una cadena Γ y una función continua $F:\Omega\times\Gamma^*\to\mathbb{C}$, definamos*

$$h(z)=\int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w \qquad \textit{para } z\in\Omega$$

Entonces h es continua en Ω.
Si además para cada $w\in\Gamma^*$ la función $F_w:\Omega\to\mathbb{C}$ dada por $F_w(z)=F(z,w)$ es holomorfa en Ω, entonces $h\in\mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Sea $z_0\in\Omega$ y sea sucesión $\{z_n\}$ una sucesión de puntos de Ω convergente a z_0. Tenemos que

$$|h(z_n)-h(z_0)|=\left|\int_\Gamma F(z_n,w)-F(z_0,w)\,\mathrm{d}w\right|\leqslant \ell(\Gamma)\ \max\{|F(z_n,w)-F(z_0,w)| : w\in\Gamma^*\}$$

Como el conjunto $K=\big\{\{z_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{z_0\}\big\}\times\Gamma^*$ es compacto (producto de compactos), F es uniformemente continua en K. Dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $|z-z'|<\delta$ y $|w-w'|<\delta$ entonces $|F(z,w)-F(z',w')|<\varepsilon$. Sea ahora n_0 tal que para $n\geqslant n_0$ es $|z_n-z_0|<\delta$. Entonces tenemos que $|F(z_n,w)-F(z_0,w)|<\varepsilon$ para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $w\in\Gamma^*$, por lo que

$$|h(z_n)-h(z_0)|\leqslant \ell(\Gamma)\varepsilon$$

para todo $n\geqslant n_0$. Luego $\{h(z_n)\}\to h(z_0)$ lo que prueba la continuidad de h en z_0 y por ser este punto arbitrario obtenemos la continuidad en Ω.

Para la segunda afirmación apliquemos el teorema de Morera. Tomemos un triángulo $\Delta(a,b,c)\subset\Omega$. Tenemos

$$\int_{[a,b,c,a]} h(z)\,\mathrm{d}z=\int_{[a,b,c,a]}\left[\int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}z\overset{(*)}{=}\int_\Gamma\left[\int_{[a,b,c,a]} F(z,w)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}w=\int_\Gamma 0\,\mathrm{d}w=0$$

ya que $F_w(z)=F(z,w)$ es holomorfa en Ω luego, por el teorema de Cauchy–Goursat, la integral a lo largo de la frontera de un triángulo contenido en Ω es nula.

Resta justificar la permutación de integrales en $(*)$. Por la linealidad de la integral basta probarla para dos caminos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ cualesquiera.

$$\int_\sigma \left[\int_\gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w\right]\mathrm{d}z = \int_c^d \left[\int_a^b F(\sigma(s),\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\right]\sigma'(s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= \int_a^b \left[\int_c^d F(\sigma(s),\gamma(t))\sigma'(s)\,\mathrm{d}s\right]\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \left[\int_\sigma F(z,w)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}w$$

$\boxed{\checkmark}$

4.9 Forma general del Teorema de Cauchy y de la Fórmula Integral de Cauchy. *Sea* Ω *un abierto en* $\mathbb{C}$*,* Γ *un ciclo en* Ω *nulhomólogo respecto de* Ω*. Entonces para toda función holomorfa* f *en* Ω *se verifica:*

(I) $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

(II) $\displaystyle f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$*, para todo* $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$

Demostración. [Demostración (J. D. Dixon 1971)] Definimos $F : \Omega\times\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$F(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$$

Sabemos que F así definida es continua en $\Omega\times\Omega$. Fijado $w\in\Omega$, es claro que $F_w \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{w\})$. Pero F_w es continua en Ω luego, por el teorema de extensión de Riemann, F_w es holomorfa en Ω.

Ahora definimos $h : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$h(z) = \int_\Gamma F(z,w)\,\mathrm{d}w \qquad (z\in\Omega)$$

Por el lema anterior $h \in \mathcal{H}(\Omega)$. Consideremos el conjunto $\Omega_0 = \{z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$ que es abierto por ser unión de componentes conexas de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$. La hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto a Ω nos dice que $\mathbb{C}\setminus\Omega \subseteq \Omega_0$ y por tanto $\Omega\cup\Omega_0 = \mathbb{C}$. Sea entonces

$$F_0 : \Omega_0\times\Gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z,w) \longmapsto F_0(z,w) = \frac{f(w)}{w-z}$$

F_0 está bien definida ya que $w-z\neq 0$ por ser $\Omega_0\cap\Gamma^*=\emptyset$ y además es continua. Fijado $w\in\Gamma^*$, $F_{0w}\in\mathcal{H}(\Omega_0)$ ya que se trata de una función racional.

Sea

$$h_0(z)=\int_\Gamma F_0(z,w)\,\mathrm{d}w=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Aplicando el lema anterior obtenemos que $h_0\in\mathcal{H}(\Omega_0)$. Por último definimos

$$\varphi(z)=\begin{cases} h(z) & z\in\Omega\\ h_0(z) & z\in\Omega_0\end{cases}$$

Veamos que φ está bien definida, es decir, si $z\in\Omega\cap\Omega_0$ entonces $h(z)=h(z_0)$. Pero esto es cierto ya que si $z\in\Omega\cap\Omega_0$ entonces $z\notin\Gamma^*$ y

$$h(z)=\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z)2\pi i=h_0(z)$$

ya que $z\in\Omega_0$ y por tanto $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=0$. Concluimos que φ es entera ya que es holomorfa en $\Omega\cup\Omega_0=\mathbb{C}$.

Sea $R>0$ tal que $|w|<R$ para cualquier $w\in\Gamma^*$. Si $z\in\mathbb{C}$ es tal que $|z|>R$, entonces z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$ y, por tanto, está en Ω_0. Luego

$$\varphi(z)=h_0(z)=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$$

Poniendo $M=\text{máx}\{|f(w)|:w\in\Gamma^*\}$, y teniendo en cuenta que $|w-z|\geqslant|z|-R$ para todo $w\in\Gamma^*$, tenemos que

$$|\varphi(z)|\leqslant\ell(\Gamma)\frac{M}{|z|-R}$$

Tomando límite para $z\to\infty$ deducimos que $\displaystyle\lim_{z\to\infty}\varphi(z)=0$, lo cual implica que φ está acotada. El teorema de Liouville fuerza a que φ sea constante pero dicha constante debe ser 0. Obtenemos, por tanto, que $h(z)=0$ para todo $z\in\Omega$. Tomemos un punto $z\in\Omega\setminus\Gamma^*$ entonces

$$\begin{aligned}0=h(z)&=\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w=\\&=\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w-f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z)\,2\pi i\end{aligned}$$

despejando obtenemos la fórmula general de Cauchy:

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\qquad\text{para todo } z\in\Omega\setminus\Gamma^*$$

Por otra parte si tomamos $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ y le aplicamos a la función $g(z) = (z-a)\,f(z)$, que es holomorfa en Ω, lo que acabamos de probar para f en el punto a obtenemos:

$$0 = g(a)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{(w-a)f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\,\mathrm{d}w$$

$\boxed{\checkmark}$

Es cómodo introducir la siguiente terminología.

4.10 Definición. Dos ciclos Γ, Σ en un abierto Ω se dicen *homológicamente equivalentes* respecto de Ω si se verifica que

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_\Sigma(z) \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

El teorema de Cauchy que acabamos de probar afirma que si Γ, Σ son ciclos en un abierto Ω homológicamente equivalentes respecto de Ω, entonces $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma f(z)\,\mathrm{d}z$ para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. En lo que sigue vamos a ver cómo este teorema permite reducir el cálculo de integrales de funciones holomorfas sobre caminos cerrados al cálculo de integrales sobre circunferencias. El siguiente ejemplo es ilustrativo de esto.

4.11 Ejemplo. Sea el abierto Ω el plano complejo $\mathbb{C}$ al que le hemos quitado tres puntos a, b y c. Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la figura 4.2

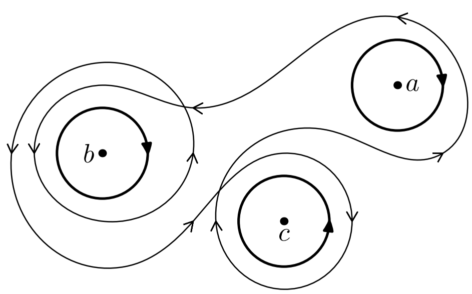


Figura 4.2: Un camino complicado

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos a, b y c respecto de Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario al de las agujas del reloj) a la vista de la figura tenemos:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 1, \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(b) = 2, \qquad \mathrm{Ind}_\Gamma(c) = -1$$

Consideremos las circunferencias $C(a,\rho)$, $C(b,\rho)$ y $C(c,\rho)$ que se presentan en la figura y formemos el ciclo

$$\Sigma = C(a,\rho) + 2C(b,\rho) - C(c,\rho)$$

El ciclo Σ es homológicamente equivalente al ciclo Γ respecto de Ω. El teorema de Cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω, f, se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C(a,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z + 2\int_{C(b,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C(c,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias. Observa, además, que podemos tomar las circunferencias de radio tan pequeño como queramos. Esto nos dice que es el comportamiento de f en un entorno reducido de los puntos a, b y c el que determina el valor de la integral de f sobre cualquier camino cerrado. Volveremos sobre esta idea al estudiar las singularidades aisladas de una función holomorfa. □

4.12 Definición. Un abierto Ω se llama *homológicamente conexo* si todo ciclo en Ω es nulhomólogo respecto de Ω.

Aunque en la definición se han considerado ciclos podemos limitarnos a caminos cerrados, es decir, un abierto Ω es homológicamente conexo si todo camino cerrado en Ω es nulhomólogo respecto de Ω. Intuitivamente, un abierto es homológicamente conexo si no tiene "agujeros". Por ejemplo, un disco o un semiplano son conjuntos homológicamente conexos.

El nombre de "homológicamente conexo" induce a pensar que este concepto implica conexión. Esto no es cierto; por ejemplo, dos discos abiertos disjuntos forman un abierto homológicamente conexo pero evidentemente no forman un conjunto conexo.

4.13 Teorema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) Ω es homológicamente conexo.

(b) La integral de toda función holomorfa en Ω sobre cualquier ciclo en Ω es nula.

(c) Toda función holomorfa en Ω tiene primitivas en Ω.

(d) Toda función armónica en Ω es la parte real de una función holomorfa en Ω.

(e) Toda función holomorfa que no se anula en Ω tiene logaritmos holomorfos en Ω.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$ *(b)* Es el teorema de Cauchy (teorema 4.9).

(b)$\Rightarrow$*(c)* Consecuencia de la caracterización de existencia de primitivas (teorema 2.10).

(c)$\Rightarrow$*(d)* Es consecuencia de la proposición 3.17.

(d)$\Rightarrow$ *(e)* Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$. Consideremos un disco $D(a,r) \subset \Omega$. Como consecuencia del lema 3.33 existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r)$. Por tanto $\log|f(z)| = \operatorname{Re}\big(\exp\big(g(z)\big)\big)$ para todo $z \in D(a,r)$ y, por tanto, $\log|f(z)|$ es armónica en $D(a,r)$. Como esto es cierto para cualquier disco abierto contenido en Ω concluimos que $\log|f(z)|$ es armónica en Ω. Por hipótesis existe una función $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\log|f(z)| = \operatorname{Re} h(z)$ para todo $z \in \Omega$. Definamos $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ por $\varphi(z) = \dfrac{\exp\big(h(z)\big)}{f(z)}$. Tenemos que

$$|\varphi(z)| = \frac{\big|\exp\big(h(z)\big)\big|}{|f(z)|} = \frac{\exp\big(\operatorname{Re} h(z)\big)}{|f(z)|} = \frac{\exp\big(\log|f(z)|\big)}{|f(z)|} = 1$$

lo que, en virtud de la proposición 1.31, implica que φ es constante en cada componente conexa de Ω y por tanto $\varphi'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Calculando $\varphi'(z)$ obtenemos que $h'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ lo que, en virtud del teorema 1.49, implica que f tiene logaritmos holomorfos en Ω.

(e)$\Rightarrow$ *(a)* Sea $z \notin \Omega$. La función $w \mapsto w - z$ es holomorfa y no se anula en Ω, por lo que existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp\big(g(w)\big) = w - z$ para todo $w \in \Omega$. Pero entonces $g'(w) = \dfrac{1}{w-z}$ por lo que $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw = 0$ para todo camino cerrado γ en Ω. ☑

Si γ es un camino cerrado en un abierto Ω y lo sometemos a una "pequeña deformación" obteniendo un nuevo camino cerrado $\widehat{\gamma}$ en Ω, parece intuitivo que el ciclo $\gamma - \widehat{\gamma}$ debe ser nulhomólogo respecto de Ω o, lo que es igual, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\widehat{\gamma}}(z)$ para todo $z \notin \Omega$. En otras palabras, es razonable pensar que el índice es también una función continua del camino γ. Los resultados que siguen precisan esta idea. En la demostración de estos resultados se aprecia la gran ventaja de haber definido el índice para curvas cerradas cualesquiera y no solamente para caminos cerrados.

4.14 Lema. *Sean* $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *curvas cerradas y sea* $z \in \mathbb{C} \setminus \{\gamma^* \cup \sigma^*\}$. *Supongamos que*

$$|\gamma(t) - \sigma(t)| < |\gamma(t) - z| \quad \textit{para todo } t \in [a,b]$$

Entonces $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_\sigma(z)$.

Demostración.

$$\sigma(t) - z = (\gamma(t) - z)\frac{\sigma(t) - z}{\gamma(t) - z} = (\gamma(t) - z)\left(1 + \frac{\sigma(t) - \gamma(t)}{\gamma(t) - z}\right)$$

Sea ϑ un argumento continuo de $\gamma - z$ en $[a,b]$. Teniendo en cuenta que el número

$$w(t) = 1 + \frac{\sigma(t) - \gamma(t)}{\gamma(t) - z}$$

está en el disco $D(1,1)$ y, por tanto, está en el semiplano de la derecha, se sigue que la función $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\lambda(t) = \vartheta(t) + \arg(w(t))$ es un argumento continuo de $\sigma - z$ en $[a,b]$. Como $w(a) = w(b)$ se sigue que

$$\lambda(b) - \lambda(a) = \vartheta(b) + \arg(w(b) - \vartheta(a) - \arg(w(a)) = \vartheta(b) - \vartheta(a)$$

es decir, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_\sigma(z)$. $\boxed{\checkmark}$

4.15 Definición. Se dice que dos curvas cerradas $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ en un abierto Ω son *homotópicas* (como curvas cerradas) en Ω si existe una función continua $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ tal que se verifica:

$$\begin{array}{rrcll} \text{i)} & H(0,t) & = & \gamma(t) & \text{para todo} \quad t \in [a,b] \\ \text{ii)} & H(1,t) & = & \sigma(t) & \text{para todo} \quad t \in [a,b] \\ \text{iii)} & H(s,a) & = & H(s,b) & \text{para todo} \quad s \in [0,1] \end{array}$$

La idea que subyace en esta definición es sencilla. Para cada $s \in [0,1]$ notemos por $H_s : [a,b] \to \mathbb{C}$ la función dada por $H_s(t) = H(s,t)$ para todo $t \in [a,b]$. Lo que tenemos entonces es una familia $\{H_s : s \in [0,1]\}$ de curvas en Ω. Dichas curvas son cerradas porque $H(s,a) = H(s,b)$ y, a medida que el parámetro s recorre el intervalo $[0,1]$, las curvas de esta familia se van desplazando de forma continua sin salirse de Ω desde la curva inicial $H_0 = \gamma$ hasta la curva final $H_1 = \sigma$. Intuitivamente, lo que hace la función H es una deformación continua *sin salirse de* Ω de la curva cerrada γ en la curva cerrada σ a través de las curvas cerradas H_s.

4.16 Lema. *Sean* $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *dos caminos cerrados en un abierto* Ω *que son homotópicos en* Ω*. Entonces* γ *y* σ *son homológicamente equivalentes respecto de* Ω.

Demostración. Por hipótesis existe una función continua $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ tal que, con las notaciones de la definición anterior, $H_0 = \gamma$, $H_1 = \sigma$ y $H_s(a) = H_s(b)$ para todo $s \in [0,1]$. Sea $z \notin \Omega$ y definamos $\rho = \min\{|z - H(s,t)|, (s,t) \in [0,1] \times [a,b]\}$. Por la continuidad uniforme de H en el compacto $[0,1] \times [a,b]$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{lll} s, s' \in [0,1] & \text{y} & |s - s'| < \delta \\ t, t' \in [a,b] & \text{y} & |t - t'| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \left|H(s,t) - H(s',t')\right| < \rho$$

Por tanto, para $s, s' \in [0,1]$ con $|s - s'| < \delta$ se tiene que

$$|H_s(t) - H_{s'}(t)| < \rho \leqslant |H_s(t) - z| \quad \text{para todo } t \in [a,b]$$

En estas condiciones el lema anterior nos dice que $\operatorname{Ind}_{H_s}(z) = \operatorname{Ind}_{H_{s'}}(z)$. Deducimos que la función $s \mapsto \operatorname{Ind}_{H_s}(z)$ es localmente constante y por tanto continua en el intervalo $[0,1]$ y, como los intervalos son conjuntos conexos, deducimos que dicha función ha de ser constante y, en particular, $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_{H_0}(z) = \operatorname{Ind}_{H_1}(z) = \operatorname{Ind}_\sigma(z)$. ☑

De este resultado y de la versión general del teorema de Cauchy, se deduce enseguida la llamada versión homotópica del teorema de Cauchy.

4.17 Versión homotópica del teorema de Cauchy. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *un conjunto abierto,* $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *dos caminos cerrados en* Ω *que son homotópicos en* Ω*. Entonces para toda función,* f*, holomorfa en* Ω *se verifica que* $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\sigma f(z)\,\mathrm{d}z$.

El siguiente resultado es de gran utilidad para reconocer si un abierto es homológicamente conexo.

4.18 Proposición. *Un abierto cuyo complemento no tienen componentes conexas acotadas es homológicamente conexo.*

Demostración. Sea Ω un abierto en las condiciones del enunciado y sea γ un camino cerrado en Ω. Dado $z \notin \Omega$, sea C la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene a z. Tomemos $R > 0$ tal que $\gamma^* \subset D(0,R)$. Sea U la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Claramente U contiene a $\mathbb{C} \setminus D(0,R)$ y como, por hipótesis, C no está acotada deducimos que $C \cap U \neq \emptyset$. Como $C \subset \mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, se sigue que $C \subset U$ y, por tanto, $z \in U$ lo que, según sabemos, implica que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0$. ☑

4.19 Definición. Una abierto Ω se llama *simplemente conexo* cuando toda curva cerrada en Ω es homotópica en Ω a una curva constante.

Intuitivamente, en un abierto simplemente conexo cualquier curva cerrada no puede rodear puntos que estén fuera del abierto.

4.20 Corolario. *Todo abierto simplemente conexo es homológicamente conexo.*

Demostración. Evidentemente el índice de cualquier punto respecto de una curva constante es cero. Por tanto el corolario es consecuencia directa del lema 4.16. ☑

4.3.1. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{89}$ Sea $\rho : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^+$ una función continua tal que $\rho(\pi) = \rho(-\pi)$, y sea $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ la curva definida, para todo $t \in [-\pi,\pi]$, por $\gamma(t) = \rho(t)e^{it}$. Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Solución.

Observa que es fácil calcular el índice de 0 respecto a γ pues, evidentemente, la función $\vartheta : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $\vartheta(t) = t$, es un argumento continua de $\gamma - 0 = \gamma$. Luego $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1$.

Probemos ahora que $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ tiene exactamente dos componentes conexas. Fíjate que por la definición de γ es inmediato que $z \in \gamma^*$ si, y sólo si, $|z| = \rho(\arg z)$. Luego si definimos

$$A = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}^* : |z| < \rho(\arg z)\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| > \rho(\arg z)\}$$

se tiene que A y B son conjuntos disjuntos y $\mathbb{C} \setminus \gamma^* = A \cup B$.

Si $z\in A$ entonces para $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ también $\lambda z\in A$ por lo que A es estrellado respecto a 0 y por tanto es conexo. Deducimos que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=1$ para todo $z\in A$.

Si $z\in B$ entonces para todo $\lambda \geqslant 1$ también $\lambda z\in B$. Si definimos $M=\text{máx}\,\{\rho(t) : t\in[-\pi,\pi]\}$, entonces si $|z|>M$ se verifica que $z\in B$. Por tanto

$$B=\bigcup_{z\in B}\big(\{\lambda z : \lambda \geqslant 1\}\cup\big(\mathbb{C}\setminus\overline{D}(0,M)\big)\big)$$

que es una unión de conjuntos conexos con intersección no vacía lo que prueba que B es conexo. Resulta así que B es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$, luego $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=0$ para todo $z\in B$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{90}$ Justifica que el índice de un punto respecto de una curva cerrada es invariante por giros, homotecias y traslaciones.

Solución.
Sea $g(z)=\alpha z+\beta$ donde $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Se trata de probar que si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ es una curva cerrada y $z\notin\gamma^*$, entonces se verifica que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=\operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(g(z))$. Esto justifica que el índice es invariante por traslaciones ($\alpha=1$), por homotecias ($\alpha>0,\beta=0$) y por giros ($|\alpha|=1,\beta=0$).

Sea $\vartheta:[a,b]\to\mathbb{R}$ un argumento continuo de $\gamma-z$. Como

$$g\big(\gamma(t)\big)-g(z)=\alpha\big(\gamma(t)-z\big)$$

se sigue que $\varphi(t)=\vartheta(t)+\arg(\alpha)$ es un argumento continuo de $g\circ\gamma-g(z)$. Por tanto

$$\operatorname{Ind}_{g\circ\gamma}(g(z))=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{2\pi}=\frac{\vartheta(b)-\vartheta(a)}{2\pi}=\operatorname{Ind}_\gamma(z)$$

☺

Ejercicio resuelto $\boxed{91}$ Consideremos el rectángulo $\gamma=[a+ib,c+ib,c+id,a+id,a+ib]$, donde a,b,c,d son números reales tales que $a<c$ y $b<d$. Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma^*$.

Solución.
Como el índice es invariante por traslaciones, no es restrictivo suponer que el rectángulo está centrado en el origen, es decir, es de la forma:

$$\gamma=[a-ib,a+ib,-a+ib,-a-ib,a-ib]\quad(a>0,b>0)$$

Pongamos $z_0=a-ib$, $z_1=a+ib$, $z_2=-a+ib$, $z_3=-a-ib$, $z_4=z_0$. Recordemos que la poligonal γ es la yuxtaposición de los segmentos $[z_k,z_{k+1}]$ $(k=0,1,2,3)$, de hecho, γ es la aplicación $\gamma:[0,4]\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma(t)=z_k+(t-k)(z_{k+1}-z_k)$ para $k\leqslant t\leqslant k+1$.

Es suficiente calcular el índice de 0 respecto a γ. Sea $\vartheta : [0,4] \to \mathbb{R}$ un argumento continuo de γ. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ind}_\gamma(0) &= \frac{\theta(4)-\theta(0)}{2\pi} = \\
&= \frac{\theta(4)-\theta(3)+\theta(3)-\theta(2)+\theta(2)-\theta(1)+\theta(1)-\theta(0)}{2\pi} = \\
&= \frac{\Delta\gamma_3(0)+\Delta\gamma_2(0)+\Delta\gamma_1(0)+\Delta\gamma_0(0)}{2\pi}
\end{aligned}$$

donde hemos puesto $\gamma_k = [z_k, z_{k+1}]$, $(k = 0,1,2,3)$. Calcularemos ahora la variación del argumento a largo de cada uno de dichos segmentos. Como los segmentos γ_k $(k = 0,1,3)$ están contenidos en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^-$, tenemos que $\Delta\gamma_k(0) = \arg(z_{k+1}) - \arg(z_k)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\Delta\gamma_0(0)+\Delta\gamma_1(0)+\Delta\gamma_3(0) &= \big(\arg(z_1)-\arg(z_0)\big)+\big(\arg(z_2)-\arg(z_1)\big)+\big(\arg(z_4)-\arg(z_3)\big) = \\
&= \arg(z_2)-\arg(z_3) = \arg(-a+ib)-\arg(-a-ib) = \\
&= -\operatorname{arc\,tg}(b/a)+\pi-\big(\operatorname{arc\,tg}(b/a)-\pi\big) = \\
&= -2\operatorname{arc\,tg}(b/a)+2\pi
\end{aligned}$$

Para obtener la variación del argumento en el segmento γ_2 podemos usar un argumento continuo en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_o^+$, por ejemplo (ver ejercicio 25) la función $\arg_0(z)$. Para los puntos comprendidos en el semiplano de la izquierda se tiene que $\arg_0(x+iy) = \pi + \operatorname{arc\,tg}(y/x)$. Por tanto

$$\Delta\gamma_2(0) = \arg_0(z_3)-\arg_0(z_2) = \operatorname{arc\,tg}(b/a)+\pi-\big(-\operatorname{arc\,tg}(b/a)+\pi\big) = 2\operatorname{arc\,tg}(b/a)$$

Deducimos, por tanto, que $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1$. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{92}$ Dados dos números complejos distintos a y b, sea Ω el dominio obtenido al suprimir en el plano el segmento de extremos a y b. Justifica que Ω no es simplemente conexo. Prueba que existe una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $[f(z)]^2 = (z-a)(z-b)$ para todo $z \in \Omega$.

Solución.
Para probar que Ω no es simplemente conexo basta probar que no es homológicamente conexo. Pero esto es evidente, pues si γ es una circunferencia que deja en su interior al segmento de extremos a y b entonces γ es un camino cerrado en Ω, y si z es un punto del segmento de extremos a y b entonces $z \notin \Omega$ y $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1$.

Hemos visto en el ejercicio 68 que la función $h(z) = \log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ es holomorfa en Ω. Por tanto la función $f(z) = (z-b)\exp(h(z)/2)$ es holomorfa en Ω y verifica que $[f(z)]^2 = (z-a)(z-b)$ para todo $z \in \Omega$. ☺

Ejercicio resuelto 93 Sean z_1, z_2, z_3 números complejos distintos y F un conexo cerrado que los contiene. Estudia si la función

$$f(z) = \frac{z}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

tiene primitiva en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus F$.

Solución.

Sea γ un camino cerrado en Ω. Como z_1, z_2, z_3 están en una misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ se tiene que $\operatorname{Ind}_\gamma(z_1) = \operatorname{Ind}_\gamma(z_2) = \operatorname{Ind}_\gamma(z_3)$.

Tenemos que

$$f(z) = \frac{z_1}{(z-z_1)(z_1-z_2)(z_1-z_3)} - \frac{z_2}{(z-z_2)(z_1-z_2)(z_2-z_3)} + \frac{z_3}{(z-z_3)(z_1-z_3)(z_2-z_3)}$$

Por lo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{z_1 \operatorname{Ind}_\gamma(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} - \frac{z_2 \operatorname{Ind}_\gamma(z_2)}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)} + \frac{z_3 \operatorname{Ind}_\gamma(z_3)}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)} =$$

$$= \left(\frac{z_1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} - \frac{z_2}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)} + \frac{z_3}{(z_1-z_3)(z_2-z_3)}\right)\operatorname{Ind}_\gamma(z_1) = 0$$

Como esto se cumple cualquiera sea el camino cerrado γ en Ω, deducimos que f tiene primitiva en Ω. Observa que Ω no tiene por qué ser homológicamente conexo. ☺

Ejercicio resuelto 94 Sea γ un camino cerrado en $\mathbb{C}^*$ tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \{0,1\}$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Supongamos que $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 1$. Sea f una función entera. Calcula el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z f(w)}{(z-w)w}\,\mathrm{d}w$$

cuando z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ y para z en la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ que contiene a 0.

Solución.

Observa que la integral pedida puede escribirse de manera más familiar como

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)/w}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Esto lleva a considerar la función $f(z)/z$. Esta función no está definida en 0 pero es fácil modificarla para obtener una función entera. Para ello definimos la función $g(z) = \dfrac{f(z)-f(0)}{z}$ para $z \neq 0$ y $g(0) = f'(0)$. Es claro que g es una función entera. En virtud de la fórmula de Cauchy se verifica que

$$g(z)\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Supongamos que z está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. Entonces se tiene que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=0$, por lo que

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \Longleftrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(0)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w$$

Como

$$\frac{1}{w(w-z)}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{w-z}-\frac{1}{w}\right)$$

deducimos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w=-\frac{f(0)}{z}\Longleftrightarrow f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf(w)}{w(z-w)}\,\mathrm{d}w$$

Supongamos que z está en la componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ que contiene a 0. Entonces se tiene que $\operatorname{Ind}_\gamma(z)=1$, por lo que

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\,.$$

Si suponemos que $z\neq 0$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(0)}{z}&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(0)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w-\frac{f(0)}{z}\big(\operatorname{Ind}_\gamma(z)-\operatorname{Ind}_\gamma(0)\big)=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

de donde

$$f(0)-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf(w)}{(z-w)w}\,\mathrm{d}w$$

Para $z=0$ resulta

$$f'(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^2}\,\mathrm{d}w-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(0)}{w^2}\,\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w^2}\,\mathrm{d}w$$

Otra forma de hacer este ejercicio es considerar el ciclo $\Gamma=\gamma-C(0,R)$ el cual es nul-homólogo respecto de $\mathbb{C}^*$ y aplicar el teorema de Cauchy directamente a la función f. Razonando de esta manera no se precisa suponer que f es entera sino solamente que es holomorfa en $\mathbb{C}^*$. ☺

4.3.2. Ejercicios propuestos

141. Considera las curvas:

$$\gamma_1(t) = t, \ \forall t \in [-1,1]; \ \gamma_2(t) = e^{it} \ \ \forall t \in [0,\pi] \ \text{ y } \ \gamma = \gamma_1 \dotplus \gamma_2.$$

Calcula $\operatorname{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

142. Sea $w \in \mathbb{C}^*$ y γ un camino en $\mathbb{C}^*$ cuyo origen es 1 y cuyo extremo es w. Justifica que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} \in \operatorname{Log}(w)$.

143. Prueba que si Ω es un dominio estrellado, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.

144. Prueba que todo disco abierto es simplemente conexo.

145. Prueba que si dos abiertos son homeomorfos y uno de ellos es simplemente conexo el otro también lo es.

146. Sea $\alpha : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$ una función continua tal que $\alpha(0) = 0$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha(t) = \infty$. Justifica que el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\alpha(t) : t \geqslant 0\}$ es abierto y que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\exp(f(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$.

147. Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano que no contiene al cero y contiene a $\mathbb{R}^+$. Justifica que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = x^x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Puede suprimirse la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?

148. Sea γ la elipse de centro $(0,0)$ y semiejes a y b. Calcula de dos formas distintas la integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ y deduce el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$.

4.4. Series de Laurent. Funciones holomorfas en un anillo

Nos proponemos estudiar el comportamiento de una función holomorfa en un entorno reducido de un punto, esto es, en un conjunto de la forma $D(a,\rho) \setminus \{a\}$. En el ejemplo que sigue al teorema de Cauchy vimos que el valor de la integral de una función depende de los valores de dicha función en conjuntos de la forma $D(a,\rho) \setminus \{a\}$ con ρ arbitrariamente pequeño. Es decir, depende del comportamiento de la función en el punto a. Observa que el conjunto $D(a,\rho)\setminus\{a\}$ es un tipo especial de anillo. El *anillo* (abierto) de centro a, radio interior r y radio exterior R, donde $0\leqslant r<R\leqslant+\infty$, es el conjunto

$$A(a;r,R)=\{z\in\mathbb{C}: r<|z-a|<R\}$$

Claramente $D(a,r)\setminus\{a\}=A(a;0,\rho)$. Sabemos que una función holomorfa en un disco $D(a,r)$ es igual a la suma de su serie de Taylor centrada en a y que dicha serie converge por lo menos en dicho disco. Queremos ahora obtener una representación de una función holomorfa en un anillo por medio de una serie convergente en dicho anillo. La consideración de algunos casos sencillos nos puede dar la pista del tipo de series apropiadas para tal fin.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(1/z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} \quad \text{para todo } z\in A(0;0,+\infty)\\
\frac{e^z}{(z-a)^q} &= \sum_{n=0}^{q-1}\frac{1}{n!}\frac{1}{(z-a)^{q-n}}+\sum_{n=q}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-a)^{n-q} \quad \text{para todo } z\in A(a;0,+\infty)\\
\exp(1/z)+\log(1+z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}z^{n+1} \quad \text{para todo } z\in A(0;0,1)
\end{aligned}$$

Las series anteriores son todas ellas de la forma $\sum\dfrac{a_n}{(z-a)^n}+\sum b_n(z-a)^n$, es decir, son suma de dos series (alguna de ellas puede reducirse a una suma finita o incluso no tener ningún término); una es una serie de potencias centrada en a y la otra es una serie en potencias *negativas* de $z-a$. Tales series se llaman *series de Laurent*. Vamos a definirlas de manera formal y a introducir la notación especial que suele usarse para este tipo de series que consiste en que, por comodidad de notación, los coeficientes de las potencias negativas de $z-a$ se notan con subíndices negativos de la forma c_{-n}.

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y un número $a\in\mathbb{C}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por

$$\begin{aligned}
f_0(z) &= c_0\\
f_n(z) &= \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+c_n(z-a)^n=c_{-n}(z-a)^{-n}+c_n(z-a)^n \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}
\end{aligned}$$

La serie de término general f_n, es decir, la sucesión

$$\sum_{n\geqslant 0}f_n(z)=\left\{\sum_{k=0}^{n}f_n(z)\right\}=\left\{c_0+\sum_{k=1}^{n}\bigl(c_{-n}(z-a)^{-n}+c_n(z-a)^n\bigr)\right\}=\left\{\sum_{k=-n}^{n}c_n(z-a)^n\right\}$$

se llama *serie de Laurent centrada en a con coeficientes* c_n. Es costumbre representar dicha sucesión como $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Cuando dicha serie converge representaremos su límite por

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n\geqslant 0} f_n(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

Como de costumbre, dicho límite se llama la suma de la serie.

Convergencia de una serie de Laurent

A cada serie de Laurent, $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$, podemos asociarle dos series de potencias, a saber,

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n \qquad \text{con radio de convergencia } R^+$$

$$\sum_{n\geqslant 1} c_{-n} z^n \qquad \text{con radio de convergencia } R^-$$

Supongamos que $1/R^- < R^+$ y consideremos el anillo $A(0;\alpha,\beta)$ donde $1/R^- < \alpha < \beta < R^+$. Como $\beta < R^+$ la serie $\sum |c_n|\beta^n$ converge; y como $1/\alpha < R^-$ la serie $\sum |c_{-n}|\alpha^{-n}$ también converge. Para todo $z\in A(0;\alpha,\beta)$ tenemos que $\alpha < |z-a| < \beta$, y por tanto

$$|c_{-n}|\,|z-a|^{-n} < |c_{-n}|\,\alpha^{-n} \qquad |c_n|\,|z-a|^n < |c_n|\,\beta^n$$

Y, por el criterio de Weierstrass, deducimos que las series $\sum c_{-n}(z-a)^{-n}$ y $\sum c_n(z-a)^n$ convergen absoluta y uniformemente en $A(0;,\alpha,\beta)$ y lo mismo le pasa a su suma, es decir a la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-a)^n$. Hemos probado así que la serie converge absolutamente en el anillo $A(0;1/R^-,R^+)$ y converge uniformemente en compactos contenidos en dicho anillo. Este anillo se llama *anillo de convergencia* de la serie de Laurent. Es fácil probar que en el exterior de dicho anillo no hay convergencia porque el término general de la serie no tiende a cero mientras que en su frontera nada puede decirse del comportamiento de la serie. En el caso de que $1/R^- \geqslant R^+$ el anillo de convergencia es vacío y se dice que se trata de una serie de Laurent trivial.

En virtud del teorema de convergencia de Weierstrass para sucesiones de funciones holomorfas, la función suma $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ de una serie de Laurent no trivial es holomorfa en el anillo de convergencia $A(a;1/R^-,R^+)$. Observa que la función suma podemos escribirla como:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

Hemos probado que las series de Laurent no triviales definen funciones holomorfas en anillos. El siguiente resultado nos dice que, recíprocamente, cualquier función holomorfa en un anillo es la función suma de una cierta serie de Laurent (única) y proporciona una expresión para sus coeficientes.

4.21 Teorema. Desarrollo en serie de Laurent *Sean $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ y f una función holomorfa en el anillo $A(a;r,R)$. Entonces hay una única serie de Laurent centrada en a y con coeficientes $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cuyo anillo de convergencia contiene al anillo $A(a;r,R)$ y cuya suma coincide con f en dicho anillo*

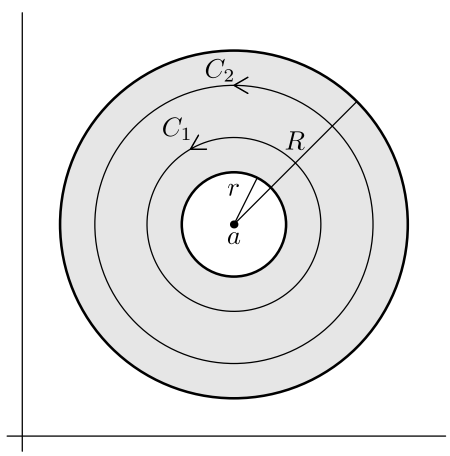
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \qquad z \in A(a;r,R)$$

Además los coeficientes de la serie vienen dados por

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{Z})}$$

siendo $r < \rho < R$ arbitrario.

Demostración. En primer lugar veamos que la expresión de los coeficientes c_n no depende de ρ. Tomemos $r < r_1 < r_2 < R$, pongamos $C_1 = C(a,r_1)$, $C_2 = C(a,r_2)$ y consideremos el ciclo $\Gamma = C_2 - C_1$.



Para $z \notin A(a;r,R)$ o bien es $|z-a| \geqslant R$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{C_2}(z) - \operatorname{Ind}_{C_1}(z) = 0$; o bien es $|z-a| \leqslant r$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{C_2}(z) - \operatorname{Ind}_{C_1}(z) = 1 - 1 = 0$. Luego el ciclo Γ es nulhomólogo respecto del anillo. Como la función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}$ es holomorfa en $A(a;r,R)$, el teorema general de Cauchy nos dice que

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w - \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w$$

de donde obtenemos la independencia de ρ.

Sea $z \in A(a;r,R)$, fijo en lo que sigue. Elijamos $0 \leqslant r < r_1 < |z-a| < r_2 < R$ y consideremos el ciclo $\Gamma = C(a,r_2) - C(a,r_1)$. Observemos que $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = 1$ puesto que z es interior a $D(a,r_2)$ y exterior a $D(a,r_1)$. Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = f(z)\,\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r_2)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r_1)} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \tag{4.1}$$

Desarrollamos ahora en serie geométrica la función $w \mapsto \dfrac{1}{w-z}$ de dos formas distintas según que $w \in C(a,r_1)^*$ o $w \in C(a,r_2)^*$. Supongamos que $w \in C(a,r_2)^*$. Entonces $\dfrac{|z-a|}{|w-a|} < 1$ y

$$\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{w-a-(z-a)} = f(w)\frac{1}{w-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

serie que converge uniformemente para $w \in C(a,r_2)^*$ ya que está mayorada por

$$\frac{|z-a|^n}{|w-a|^n} = \left(\frac{|z-a|}{r_2}\right)^n$$

serie numérica convergente por ser una serie geométrica de razón $\dfrac{|z-a|}{r_2} < 1$.

Supongamos ahora que $w \in C(a,r_1)^*$. Entonces $\dfrac{|w-a|}{|z-a|} < 1$ y

$$\frac{f(w)}{w-z} = f(w)\frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{-f(w)}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{w-a}{z-a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)\,(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

serie que converge uniformemente para $w \in C(a,r_1)^*$ ya que está mayorada por

$$\frac{|w-a|^n}{|z-a|^n} = \left(\frac{r_1}{|z-a|}\right)^n$$

serie numérica convergente por ser una serie geométrica de razón $\dfrac{r_1}{|z-a|} < 1$.

Sustituyendo los desarrollos anteriores en la igualdad 4.1 y permutando la integral con la suma de las series obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\limits_{C(a,r_2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^n + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_{C(a,r_1)} f(w)(w-a)^{n-1}\,\mathrm{d}w\right)(z-a)^{-n}$$

Teniendo en cuenta que z es un punto cualquiera del anillo y que

$$\int\limits_{C(a,r_1)} f(w)(w-a)^{n-1}\,\mathrm{d}w = \int\limits_{C(a,r_1)} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,\mathrm{d}w = c_{-n}$$

hemos probado que la serie de Laurent cuyos coeficientes son los del enunciado converge en el anillo dado y su suma en dicho anillo es igual a la función f.

La unicidad de este desarrollo es fácil. Supongamos que tenemos otra serie de Laurent que representa a f en el anillo $A(a;r,R)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-a)^n \qquad z\in A(a;r,R)$$

entonces para $r<\rho<R$ los coeficientes de la serie vienen dados por

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(w-a)^n}{(w-a)^{k+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{d_n}{(w-a)^{k+1-n}}\,\mathrm{d}w\right)$$

Ahora bien, las funciones $w\mapsto (w-a)^{n-k-1}$ tienen primitiva salvo en el caso $n-k-1=-1$, luego para $n-k-1\neq -1$, la integral de $(w-a)^{n-k-1}$ es cero a lo largo de la circunferencia $C(a,\rho)$ con lo cual obtenemos que

$$c_k = \frac{d_k}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)} \frac{1}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{d_k}{2\pi i}2\pi i = d_k$$

luego $c_k = d_k$ para todo $k\in\mathbb{Z}$ y la serie de Laurent de f es única. ☑

Observemos que en el enunciado queda abierta la posibilidad de que el radio interior del anillo sea $r=0$, es decir, que f sea holomorfa en un disco “pinchado”, esto es, un disco al que se le ha quitado su centro. La importancia de este caso particular se verá a continuación.

4.5. Singularidades aisladas de una función holomorfa

4.22 Definición. Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$.

(a) Se dice que f es *regular* en a o bien que a es un *punto regular* de f si es posible definir f en a de manera que sea derivable en a, lo que, en virtud del teorema de extensión de Riemann, equivale a que exista $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$.

(b) Si no es posible definir f en a de manera que sea derivable en a, se dice que a es un punto *singular* aislado de f o que f presenta una *singularidad aislada* en a.

Observa que el concepto de punto regular o de singularidad aislada es un concepto local y que el abierto Ω en la definición puede muy bien ser un "pequeño" disco centrado en a. Recuerda que el teorema de extensión de Riemann (teorema 2.25) da varias condiciones equivalentes para que a sea un punto regular de f.

Supongamos que f presenta una singularidad (aislada) en el punto a. Para estudiar el comportamiento de la función en dicho punto tomemos un disco $\overline{D}(a,r)\subset\Omega$. Puesto que f es holomorfa en el anillo $D(a,r)\setminus\{a\}=A(a;0,r)\subset\Omega\setminus\{a\}$, el teorema 4.21 nos dice que podemos representar f de manera única como

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,r)\setminus\{a\} \tag{4.2}$$

Este desarrollo se llama desarrollo de Laurent de f en a. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ se llama *parte principal* del desarrollo de Laurent de f en a y la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(z-a)^n$ se llama *parte regular* del desarrollo de Laurent de f en a. Claramente, el "mal" comportamiento de f en a procede de la parte principal de su desarrollo de Laurent.

Observa que si f es regular en a entonces, definiendo f en a de manera que sea holomorfa en Ω, se sigue que las integrales

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)}\frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad 0<\rho<r$$

son nulas para todo $n\geqslant 1$, pues la función $w\mapsto\dfrac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}$ es holomorfa en Ω para todo $n\geqslant 1$ y el camino $C(a,\rho)$ es nulhomólogo respecto de Ω (porque $\overline{D}(a,\rho)\subset\Omega$) luego la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a es nula y dicho desarrollo coincide con el desarrollo de Taylor de f centrado en a. En este sentido el desarrollo de Laurent es una generalización del desarrollo de Taylor.

Puesto que la serie de Laurent de f en a sabemos que es convergente en el anillo $A(a;1/R^-,R^+)$, donde R^- es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}z^n$, y debe ocurrir que $A(a;1/R^-,R^+)\supseteqq A(a;0,r)$, deducimos que $R^-=+\infty$ y, por tanto, la función dada por $h(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$ es una función entera que se anula en 0. Podemos escribir la igualdad 4.2 en la forma

$$f(z)=h\left(\frac{1}{z-a}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,r)\setminus\{a\} \tag{4.3}$$

Por su parte la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ tiene radio de convergencia $R^+\geqslant r$ y, por tanto, la función dada por

$$\widehat{g}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n \qquad \text{para todo } z\in D(a,r)$$

es una función holomorfa en $D(a,r)$. Si definimos

$$\begin{aligned} g(z)&=f(z)-h\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \text{para todo } z\in\Omega\setminus\{a\}\\ g(a)&=c_0 \end{aligned}$$

se tiene que g es holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$ y, como g coincide con $\widehat{g}$ en el disco $D(a,r)$, concluimos que g es holomorfa en Ω. Además, la descomposición anterior es única, como consecuencia de la unicidad del desarrollo de Laurent . Hemos probado el siguiente resultado.

4.23 Descomposición canónica de una función en una singularidad aislada. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Entonces existen funciones g, h únicas tales que:*
(a) g es holomorfa en Ω y h es una función entera que se anula en cero.
(b) Para todo $z\in\Omega\setminus\{a\}$ se verifica que $f(z)=g(z)+h\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$.
La igualdad anterior se llama descomposición canónica de f en el punto a.

Conviene destacar una consecuencia importante de este resultado.

4.24 Corolario. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados en Ω, y f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Para cada $a \in S$ sea $h_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a. Entonces se verifica que la función $f(z) - h_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ es regular en a.*

Demostración. En efecto, sea $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \cap S = \{a\}$ y $D(a,\rho) \subset \Omega$. Podemos aplicar lo antes visto a la función f en el abierto $D(a,\rho)$ para obtener que hay una función $g_a \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ tal que

$$f(z) = g_a(z) + h_a\left(\frac{1}{z-a}\right) \qquad \text{para todo } z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$$

deducimos de esta igualdad que la función $f(z) - h_a\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ tiene límite finito en a, es decir, es regular en a. $\boxed{\checkmark}$

Dependiendo de que la función h sea una función polinómica o sea una función entera no polinómica se distinguen dos tipos de singularidades.

4.25 Definición. Supongamos que f tiene una singularidad (aislada) en el punto a y sea

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

el desarrollo de Laurent de f en a. Pongamos $h(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n$.

Si la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a tiene un número finito de coeficientes no nulos, equivalente la función h es un polinomio, entonces se dice que a es un *polo* de f o que f *tiene un polo en* a. Se define el *orden* de dicho polo como el grado del polinomio h, esto es, como $\operatorname{máx}\{k \in \mathbb{N} : c_{-k} \neq 0\}$.

Si la parte singular de f tiene infinitos coeficientes no nulos, equivalentemente, h es una función entera no polinómica. Entonces se dice que f tiene en a una *singularidad esencial.*

4.26 Caracterización de los polos. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene un polo en a de orden k.

(b) Existe el límite $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ y es un número complejo no nulo.

(c) Existe $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\varphi(a) \neq 0$ tal que $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$.

Demostración. Supongamos que $D(a,r) \subset \Omega$.

$(a) \Rightarrow (b)$ Si f tiene un polo de orden k en el punto a entonces su desarrollo en serie de Laurent es:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} \qquad z \in D(a,r) \setminus \{a\}$$

luego si multiplicamos f por $(z-a)^k$ llegamos a la expresión

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k} + c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{k-1} \qquad z \in D(a,r) \setminus \{a\}$$

de donde se sigue que $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^k f(z) = c_{-k} \neq 0$ lo que prueba (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ Definimos

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (z-a)^k f(z) \qquad \text{para } z \neq a \\ \varphi(a) &= \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) \neq 0 \end{aligned}$$

la función φ es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Por el teorema de extensión de Riemann φ es holomorfa en Ω y evidentemente cumple las condiciones de (c)

$(c) \Rightarrow (a)$ Consideremos el desarrollo en serie de Laurent de f en a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} \qquad z \in D(a,r) \setminus \{a\}$$

Por tanto

$$(z-a)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^{n+k} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n+k} \qquad z \in D(a,r) \setminus \{a\}$$

Como la hipótesis afirma que la función $(z-a)^k f(z)$ es regular en a, deducimos que la parte principal de este desarrollo debe ser nula, luego $c_{-n}=0$ para $n>k$. En tal caso tenemos, además, que $\varphi(a)=\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)=c_{-k}$. Esto nos proporciona el siguiente desarrollo de Laurent para f:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n+\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

con $c_{-k}=\varphi(a)\neq 0$ lo que prueba que f tiene un polo de orden k en a. ☑

Esta caracterización nos hace ver que existe cierta similitud entre los polos de una función holomorfa y las singularidades de una función racional (los puntos donde se anula el denominador). De hecho, dada una función racional $f(z)=P(z)/Q(z)$, donde P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes, es fácil probar, que las únicas singularidades de f son los ceros de Q los cuales son polos de f y el orden de cada polo de f coincide con el orden de cada cero de Q. De hecho, esto es consecuencia del siguiente sencillo resultado,

4.27 Proposición. *Sean Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en Ω tal que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\Omega$ con $z\neq a$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene en a un cero de orden k.

(b) $1/f$ tiene en a un polo de orden k.

Demostración.
$[(a)\Rightarrow(b)]$ La hipótesis implica que hay una función $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(a)\neq 0$ y $f(z)=(z-a)^k g(z)$ para todo $z\in\Omega$. De aquí se sigue que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to a}(z-a)^k\frac{1}{(z-a)^k g(z)}=\lim_{z\to a}\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{g(a)}$$

luego $1/f$ tiene en a un polo de orden k en virtud del punto *(b)* de la caracterización anterior.

$[(b)\Rightarrow(a)]$ La hipótesis implica, en virtud del punto *(c)* de la caracterización anterior, que hay una función $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\varphi(a)\neq 0$ y $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ para todo $z\in\Omega\setminus\{a\}$. De aquí se sigue que $\varphi(z)\neq 0$ para todo $z\in\Omega$, por lo que la función $g(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ es holomorfa en Ω. Como, evidentemente, es $f(z) = (z-a)^k g(z)$ se sigue, en virtud de la conocida caracterización del orden de un cero, que f tiene en a un cero de orden k. ☑

La siguiente es una caracterización descriptiva de los polos de una función.

4.28 Proposición. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene un polo en a.

(b) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$.

Demostración.
$[(a) \Rightarrow (b)]$ Es consecuencia inmediata del punto *(c)* de la caracterización de los polos (4.26).

$[(b) \Rightarrow (a)]$ Por hipótesis existe $\rho > 0$ tal que si $z \in D(a,\rho) \setminus \{a\}$ entonces $|f(z)| > 1$, en particular, $f(z) \neq 0$ para $z \in D(a,\rho)$. Definimos

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{f(z)} \qquad z \in D(a,\rho) \setminus \{a\} \\ h(a) &= 0 \end{aligned}$$

h está bien definida y además es holomorfa en $D(a,\rho)$ (holomorfa en $D(a,\rho)\setminus\{a\}$ y continua en a). Ahora bien $h(a) = 0$, luego, por la proposición anterior, concluimos que f tiene un polo en a. ☑

De los resultados anteriores se sigue enseguida, por exclusión, el siguiente corolario.

4.29 Corolario. *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene una singularidad esencial en a.

(b) f no tiene límite finito ni infinito en a.

4.30 Teorema. de Casorati–Weierstrass *Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) La función f tiene una singularidad esencial en a.
(b) La imagen por f de todo entorno reducido de a es densa en $\mathbb{C}$.

Demostración.

(a)⇒(b) Razonamos por reducción al absurdo. Supongamos que hay algún entorno de a, $D(a,r)\subset\Omega$ tal que $f\big(D(a,r)\setminus\{a\}\big)$ no es denso en $\mathbb{C}$. Entonces existen $w\in\mathbb{C}$ y $\rho>0$ tales que $D(w,\rho)\cap f\big(D(a,r)\setminus\{a\}\big)=\emptyset$. Es decir $|f(z)-w|\geqslant\rho$ para todo $z\in D(a,r)\setminus\{a\}$. Definimos $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w}$ para todo $z\in D(a,r)\setminus\{a\}$. Evidentemente, g es holomorfa en $D(a,r)\setminus\{a\}$ y está acotada, pues $|g(z)|\leqslant 1/\rho$, lo que, en virtud del teorema de extensión de Riemann, implica que existe $\lim\limits_{z\to a}g(z)=\alpha$. Si fuera $\alpha=0$ entonces deducimos que $\lim_{z\to a}f(z)=\infty$ lo, que según sabemos, implica que f tienen un polo en a lo que contradice la hipótesis. Por tanto debe ser $\alpha\neq 0$. Pero en tal caso deducimos que $\lim\limits_{z\to a}f(z)=w+1/\alpha$, y, en consecuencia, f sería regular en a lo que también contradice la hipótesis.

(b)⇒(a) Esta implicación es clara pues la hipótesis implica que f no tiene límite finito ni infinito en a. ☑

De los coeficientes del desarrollo de Laurent de una función en un punto el coeficiente c_{-1} tiene una importancia especial.

4.31 Definición. Sea Ω un abierto, $a\in\Omega$ y $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\{a\})$. El número

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,\rho)}f(z)\,\mathrm{d}z$$

se llama *residuo de f en el punto a* y lo notaremos por $\operatorname{Res}(f(z),a)$.

4.5.1. Cálculo del residuo de una función en un punto

Puesto que el teorema de Cauchy permite reducir el cálculo de la integral de una función en un camino cerrado al cálculo de varias integrales en circunferencias, es importante disponer de algún método que permita calcular el residuo de una función en un punto *sin necesidad de calcular la integral correspondiente.*

Al igual que ocurre con los desarrollos en serie de Taylor, que pueden calcularse muchas veces sin necesidad de calcular las integrales que nos dan los coeficientes del desarrollo, con los desarrollos de Laurent sucede lo mismo: con frecuencia podemos calcularlos de forma indirecta sin necesidad de calcular las integrales que nos dan los coeficientes del desarrollo. Siempre que podamos hacer esto podremos calcular el residuo c_{-1} y con ello la integral correspondiente. De hecho, este es el único procedimiento general para calcular el residuo en una singularidad esencial. Afortunadamente, para los polos hay un método sistemático de calcular no sólo el residuo sino todos los coeficientes de la parte principal del desarrollo de Laurent.

Supongamos que f tiene en a un polo de orden k, esto quiere decir que

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

para z en un cierto anillo $A(a;0,r)$. Definimos la función

$$g(z)=(z-a)^k f(z)=c_{-k}+c_{-k+1}(z-a)+\cdots+c_{-1}(z-a)^{k-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^{n+k} \quad z\neq a$$

$$g(a)=c_{-k}$$

g es holomorfa donde lo sea f y además es continua en a. Observemos que la expresión anterior es el desarrollo en serie de Taylor de la función g y que para $0\leqslant j\leqslant k-1$, c_{-k+j} es el coeficiente de la potencia $(z-a)^j$ de dicha serie y por tanto viene dado por:

$$c_{-k+j}=\frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}z^j}g(z)\bigg|_{z=a}$$

Para recordar esta igualdad es más cómodo poner $-k+j=-q$ con lo que $1\leqslant q\leqslant k$ y la igualdad anterior se escribe:

$$c_{-q}=\frac{1}{(k-q)!}\frac{\mathrm{d}^{k-q}}{\mathrm{d}z^{k-q}}g(z)\bigg|_{z=a}$$

En la práctica suele aparecer una indeterminación al evaluar esta derivada en a por lo que escribimos

$$\boxed{c_{-q}=\frac{1}{(k-q)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-q}}{\mathrm{d}z^{k-q}}(z-a)^k f(z)} \qquad (4.4)$$

En particular, para $q=1$ obtenemos:

$$\boxed{c_{-1}=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}}(z-a)^k f(z)}$$

Es decir, el residuo en un polo se calcula derivando.

En el caso particular de que exista $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=\alpha\in\mathbb{C}$ entonces se verifica que $\operatorname{Res}(f(z);a)=\alpha$. Pues si $\alpha=0$ entonces, por el teorema de extensión de Riemann, sabemos que f es regular en a y su residuo es nulo. Y si $\alpha\neq 0$, la condición anterior equivale a que f tenga en a un polo de orden 1 en cuyo caso, como hemos visto en el teorema 4.26 en la implicación *(a)⇒(b)*, su residuo viene dado por $c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ (también se deduce directamente de lo antes visto).

Polos de cocientes de funciones holomorfas

En muchas ocasiones la función que integramos viene dada como cociente de dos funciones holomorfas $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ donde suponemos que g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω. En tal caso las únicas posibles singularidades de f son los ceros de h. Es de comprobación inmediata que si h tiene un cero de orden k en un punto a y $g(a)\neq 0$, entonces f tiene un polo de orden k en a. En el caso de que sea un polo simple, es decir, de orden 1, tenemos

$$\operatorname{Res}(f(z),a)=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{g(z)}{h(z)}=g(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)}=\frac{g(a)}{h'(a)}$$

4.5.2. Comportamiento en infinito de una función holomorfa

Mediante el artificio de invertir la variable, podemos estudiar el comportamiento en ∞ de una función holomorfa f sin más que estudiar el comportamiento en 0 de la función $z\mapsto f(1/z)$. La utilidad de este procedimiento nos lleva a establecer la siguiente definición.

4.32 Definición. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que para algún $R>0$ se tiene que $\Omega\supset A(0;R,+\infty)$. Definamos la función $F:D(0,1/R)\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ por $F(z)=f(1/z)$. Se dice que

a) f es regular en ∞ o que ∞ es un punto regular de f si F es regular en 0.

b) f tiene un polo de orden k en ∞ si F tiene un polo de orden k en 0.

c) f tiene una singularidad esencial en ∞ si F tiene una singularidad esencial en 0.

Sea $F(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ el desarrollo de Laurent de F en el anillo $A(0;0,1/R)$.

Entonces, por definición, el *desarrollo de Laurent de f en ∞* viene dado por

$$f(z)=F(1/z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^{-n}\qquad z\in A(0;R,+\infty)$$

La serie $\sum_{n\geqslant 1} c_{-n}z^n$ se llama *parte principal* y $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^{-n}$ se llama *parte regular* del desarrollo de Laurent de f en ∞.

Teniendo en cuenta, una vez más, que la serie converge uniformemente en cualquier circunferencia de centro 0 y radio $\rho > R$, por lo que podemos permutar su suma con la integral, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,\rho)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,\rho)}\frac{c_1}{z}\,\mathrm{d}z = c_1$$

Se define el *residuo de f en ∞* como

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty) = -c_1 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(0,\rho)} f(w)\,\mathrm{d}w \qquad \text{donde } \rho > R \tag{4.5}$$

Observa que c_1 es el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de f en ∞. La razón del signo "–" en la definición se debe a que "desde el infinito" las circunferencias se ven con orientación opuesta a como se ven desde el origen.

Para calcular el residuo en ∞ la siguiente igualdad es útil.

$$\boxed{\operatorname{Res}(f(z);\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right)} \tag{4.6}$$

Para comprobarlo, sea $r = 1/\rho$. Tenemos

$$\begin{aligned}
2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right) &= \int\limits_{C(0,r)}\frac{1}{z^2}f(1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{e}^{-it}/r)\frac{\mathrm{e}^{-2it}}{r^2}ir\mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\,\mathrm{e}^{-it})i\rho\,\mathrm{e}^{-it} = -\int_{\pi}^{-\pi} f(\rho\,\mathrm{e}^{is})i\rho\,\mathrm{e}^{is} = \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho\,\mathrm{e}^{is})i\rho\,\mathrm{e}^{is} = \int\limits_{C(0,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de las definiciones dadas y de las caracterizaciones conocidas de los polos, así como del teorema de Casorati–Weierstrass, se tiene el siguiente resultado.

4.33 Proposición. *Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y supongamos que para algún $R > 0$ se tiene que $\Omega \supset A(0;R,+\infty)$. Sea*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \qquad z \in A(0;R,+\infty)$$

el desarrollo de Laurent de f en ∞.

1. *Equivalen las siguientes afirmaciones*

   1.a) *f tiene un polo en ∞.*

   1.b) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

   1.c) *La parte principal del desarrollo de Laurent de f en ∞ es una función polinómica. Es decir el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : c_{-n} \neq 0\}$ es finito.*

2. *Equivalen las siguientes afirmaciones*

   2.a) *f es regular en ∞.*

   2.b) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$.

   2.c) *$c_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Equivalen las siguientes afirmaciones*

   3.a) *f tiene una singularidad esencial en ∞.*

   3.b) *f no tienen límite finito ni infinito en ∞.*

   3.c) *Para todo $\rho \geqslant R$ el conjunto $\{f(z) : |z| > \rho\}$ es denso en $\mathbb{C}$.*

4.34 Proposición. *Una función entera es una función polinómica no constante si, y sólo si, tiene un polo en ∞. Una función entera es constante si, y sólo si, es regular en ∞.*

Demostración. Sea f una función entera. Representemos f por medio de su serie de Taylor en 0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}$$

Tenemos que

$$F(z) = f(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n} \qquad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

La unicidad del desarrollo en serie de Laurent implica que este es el desarrollo de Laurent de F en 0. Por tanto, la serie de Laurent de f en ∞ coincide con la serie de Taylor de f en 0. En consecuencia, f tiene un polo en ∞ si, y sólo si, f es una función polinómica no constante.

Si f es regular en ∞ entonces $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$, lo que implica que f está acotada en $\mathbb{C}$ y, por el teorema de Liouville, f es constante. $\boxed{\checkmark}$

4.5.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto $\boxed{95}$ Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < |b|$. Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$$

en cada uno de los anillos: $A(0;|a|,|b|)$, $A(0;|b|,+\infty)$, $A(a;0,|b-a|)$ y $A(a;|b-a|,+\infty)$.

Solución.
Basta tener en cuenta que

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

y expresar de forma conveniente en cada caso las fracciones anteriores como suma de una serie geométrica.

Para $z \in A(0;|a|,|b|)$ tenemos que:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-a/z} + \frac{1}{b}\frac{1}{1-z/b}\right) =$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(a/z)^n + \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(z/b)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{a-b}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a-b)b^{n+1}}z^n$$

Para $z \in A(0;|b|,+\infty)$ tenemos que:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\frac{1}{1-a/z} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-b/z}\right) =$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(a/z)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(b/z)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{a-b}z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^{n-1}}{(a-b)}z^{-n} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)z^{-n}$$

Para $z \in A(a;0,|b-a|)$ tenemos que:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{b-a}\frac{1}{1-(z-a)/(b-a)}\right) =$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} + \frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\big((z-a)/(b-a)\big)^n\right) =$$
$$= \frac{1}{a-b}(z-a)^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^{n+2}}(z-a)^n$$

Para $z \in A(a;|b-a|,+\infty)$ tenemos que:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-(b-a)/(z-a)}\right) =$$
$$= \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\big((b-a)/(z-a)\big)^n\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(b-a)^{n-2}(z-a)^{-n}$$

☺

Ejercicio resuelto 96 Clasifica las singularidades y calcula los residuos en todos los polos de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)\left(e^{\pi z}-1\right)}{z^3(z^2+1)(z^2+3z+2)}$$

Solución.

Se trata de un cociente de dos funciones enteras por lo que las únicas posibles singularidades hay que buscarlas entre los ceros del denominador $\{0,-1,-2,i,-i\}$ que pueden ser polos de la función.

En $z=0$ el denominador tiene un cero de orden 3 y el numerador un cero de orden 2, por lo que f tiene en $z=0$ un polo de orden 1. Esta afirmación se deduce también de que

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z}\frac{\left(e^{\pi z}-1\right)}{z}\frac{1}{(z^2+1)(z^2+3z+2)} = \frac{\pi^2}{2}$$

y, por tanto, $\operatorname{Res}(f(z),0)=\pi^2/2$.

En $z=-1$ el denominador y el numerador tienen un cero de orden 1, por lo que f es regular en $z=1$. Esta afirmación se deduce también de que

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}\frac{\operatorname{sen}(\pi z)\left(e^{\pi z}-1\right)}{z^3(z^2+1)(z+2)}=0.$$

En $z=i$ el numerador no se anula y el denominador tiene un cero de orden 1, por lo que f tiene en $z=i$ un polo de orden 1. Esta afirmación se deduce también de que

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{\operatorname{sen}(\pi z)\left(e^{\pi z}-1\right)}{z^3(z+i)(z^2+3z+2)}=\frac{\operatorname{sen}(i\pi)(-2)}{-i(2i)(3i+1)}=-\frac{\operatorname{sen}(i\pi)}{1+3i}$$

y, por tanto, $\operatorname{Res}(f(z),i)=-\dfrac{\operatorname{sen}(i\pi)}{1+3i}$.

Observa que tiene sentido considerar el comportamiento de la función en ∞. Como la sucesión $\{f(in)\}$ no es convergente, se sigue que en ∞ hay una singularidad esencial. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{97}$ Clasifica las singularidades de las siguientes funciones y calcula los residuos correspondientes (incluyendo el punto ∞ cuando tenga sentido).

$$\text{a)}\ \frac{\operatorname{tg} z}{z^2+z+1}\qquad \text{b)}\ \frac{e^z}{z^2(z^2+1)}\qquad \text{c)}\ \frac{\operatorname{sen}(1/z)}{(z+1/z)^3}$$

Solución.
a) Pongamos

$$f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z^2+z+1}=\frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+z+1)\cos z}$$

Se trata de un cociente de dos funciones enteras. El denominador tiene ceros simples en los puntos $\{(2n+1)\pi/2 : n\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-1/2\pm i\sqrt{3}/2\right\}$ y en dichos puntos el numerador no se anula, por lo que son polos simples. Los residuos se calculan muy fácilmente. Pongamos $z_n=(2n+1)\pi/2$. Tenemos que

$$\operatorname{Res}(f(z),z_n)=\lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)=\lim_{z\to z_n}\frac{z-z_n}{\cos z}\lim_{z\to z_n}\frac{\operatorname{sen} z}{z^2+z+1}=\frac{1}{-\operatorname{sen}(z_n)}\frac{\operatorname{sen}(z_n)}{z_n^2+z_n+1}=$$
$$=\frac{-1}{z_n^2+z_n+1}$$

donde hemos aplicado L'Hôpital para calcular el primer límite. Análogamente, poniendo $a=-1/2\pm i\sqrt{3}/2$. Tenemos

$$\operatorname{Res}(f(z),a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\lim_{z\to a}\frac{z-a}{z^2+z+1}\lim_{z\to a}\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}=\frac{1}{2a+1}\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}=\frac{\operatorname{tg} a}{2a+1}$$

donde hemos aplicado L'Hôpital para calcular el primer límite.

No tiene sentido considerar el residuo en ∞.

b) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z^2+1)}$. Se trata de un cociente de dos funciones enteras. El denominador tiene un cero doble en $z=0$ que es un polo doble de f y ceros simples en los puntos $\{\pm i\}$ que son polos simples. Los residuos en los polos simples se calculan muy fácilmente. Tenemos que

$$\operatorname{Res}(f(z),i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2}=-\frac{\mathrm{e}^i}{2i}$$

El residuo en el polo doble $z=0$ viene dado por

$$\operatorname{Res}(f(z),0)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{e}^z}{z^2+1}=\lim_{z\to 0}\frac{(z^2+1)\,\mathrm{e}^z-2z\,\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}=1$$

Tiene sentido considerar el residuo en ∞ que viene dado por

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty)=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right)=-\operatorname{Res}\left(\frac{z^2\exp(1/z)}{z^2+1},0\right)$$

La función $g(z)=\dfrac{z^2\exp(1/z)}{z^2+1}$ tiene una singularidad esencial en $z=0$ por lo que para obtener el residuo hay que calcular el coeficiente c_{-1} de su desarrollo de Laurent en $z=0$. Para $z\in D(0,1)\setminus\{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\\
z^2\exp(1/z)&=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}z^{2-q}\\
g(z)&=\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}z^{2-q}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\substack{2-q+2n=m\\ n\geqslant 0,q\geqslant 0}}\frac{(-1)^n}{q!}\right)z^m
\end{aligned}$$

Haciendo $m=-1$ obtenemos que el coeficiente c_{-1} viene dado por:

$$c_{-1}=\sum_{\substack{2-q+2n=-1\\ n\geqslant 0,q\geqslant 0}}\frac{(-1)^n}{q!}=\sum_{\substack{q=2n+3\\ n\geqslant 0}}\frac{(-1)^n}{q!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)!}$$

y por tanto

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=-1+\operatorname{sen}1.$$

c) Pongamos

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen}(1/z)}{(z+1/z)^3}=\frac{z^3\operatorname{sen}(1/z)}{(z^2+1)^3}$$

En $z=0$ hay una singularidad esencial pues es fácil comprobar que f no tiene límite finito ni finito en $z=0$. Basta para ello notar que $f(1/n)\to 0$ y $f(i/n)\to\infty$. Para obtener el residuo hay que calcular el coeficiente c_{-1} de su desarrollo de Laurent en $z=0$. Para $z\in D(0,1)\setminus\{0\}$ tenemos que

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nz^{2n-1}=\frac{-2z}{(z^2+1)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)z^{2n-2}=\frac{-2}{(z^2+1)^2}+\frac{8z^2}{(z^2+1)^3}$$

Deducimos que

$$\frac{8z^3}{(z^2+1)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)z^{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nz^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-2)z^{2n-1}=$$
$$=4\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)z^{2n-1}$$

Por tanto el desarrollo de Laurent de f en $D(0,1)\setminus\{0\}$ viene dado por

$$f(z)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n-1)z^{2n-1}\right)\left(\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^{q+1}}{(2q-1)!}\frac{1}{z^{2q-1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{2(n-q)=m}(-1)^{n+q+1}\frac{n(n-1)}{(2q-1)!}\right)z^m=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n-q=k}(-1)^{n+q+1}\frac{n(n-1)}{(2q-1)!}\right)z^{2k}$$

Comprobamos que en esta serie de Laurent los coeficientes c_n con $n\in\mathbb{Z}$ impar son nulos, en particular $c_{-1}=0$.

Podríamos haber obtenido este resultado sin necesidad de hacer los cálculos anteriores pues es fácil justificar que el desarrollo de Taylor de $\dfrac{z^3}{(z^2+1)^3}$ tiene que ser de la forma $\sum\limits_{n\geqslant 2}a_{2n-1}z^{2n-1}$ y con esto es suficiente para obtener que $c_{-1}=0$.

Los puntos $z=\pm i$ son ceros triples del denominador que no anulan al numerador y por tanto son polos triples. En $z=i$ el residuo viene dado por

$$\operatorname{Res}(f(z),i)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left((z-i)^3\frac{z^3\operatorname{sen}(1/z)}{(z^2+1)^3}\right)=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left(\frac{z^3\operatorname{sen}(1/z)}{(z+i)^3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{2z(2-iz+z^2)\cos(1/z)+(1-2iz-7z^2-6iz^3)\operatorname{sen}(1/z)}{z(z+i)^5}=-\frac{i}{16\,\mathrm{e}}$$

Análogamente se calcula el residuo en $z=-i$.

Tiene sentido considerar el residuo en ∞ que viene dado por

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty)=-\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f(1/z),0\right)=-\operatorname{Res}\left(\frac{z\operatorname{sen}z}{(1+z^2)^3},0\right)=0$$

ya que la función $\dfrac{z\operatorname{sen}z}{(1+z^2)^3}$ es holomorfa en el disco unidad. ☺

Ejercicio resuelto $\boxed{98}$ Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $a\in\Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. Prueba que si la parte real de f está mayorada o minorada en un entorno reducido de a entonces f es regular en a. Deduce que si f tiene una singularidad en a entonces $\exp(f)$ tiene una singularidad esencial en a.

Solución.

Supongamos que $\operatorname{Re} f$ está mayorada en un entorno reducido de a, es decir, existen números $M>0$, $\rho>0$ tales que $\overline{D}(a,\rho)\subset\Omega$ y para todo $z\in\overline{D}(a,\rho)\setminus\{a\}$ se verifica que $\operatorname{Re} f(z)\leqslant M$. Sea

$$f(z)=g(z)+h\left(\frac{1}{z-a}\right)\qquad\forall z\in\Omega\setminus\{a\}$$

donde $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $h\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $h(0)=0$, la descomposición canónica de f en a. Para probar que f es regular en a debemos probar que $h\equiv 0$. Recordando el teorema de Liouville podríamos intentar probar que h está acotada; de hecho, es suficiente probar que $\operatorname{Re} h$ está mayorada en $\mathbb{C}$ pues entonces la imagen de h no puede ser densa en $\mathbb{C}$ y por tanto h deberá ser constante. Sea $K=\min\left\{\operatorname{Re} g(z): z\in\overline{D}(a,\rho)\right\}$ (para esto hemos tomado el disco cerrado). Tenemos que

$$\operatorname{Re} h\left(\frac{1}{z-a}\right)=\operatorname{Re} f(z)+\operatorname{Re} g(z)\leqslant M-K\qquad\forall z\in\overline{D}(a,\rho)\setminus\{a\}$$

es decir $\operatorname{Re} h(w)\leqslant M-K$ para todo $w\in\mathbb{C}$ con $|w|\geqslant 1/\rho$. De aquí se sigue enseguida que la función $\operatorname{Re} h$ está mayorada en $\mathbb{C}$ como queríamos probar.

Supongamos ahora que f tiene una singularidad aislada en a. Acabamos de probar que $\operatorname{Re} f$ no puede estar mayorada ni minorada en ningún entorno reducido de a, lo que implica que hay sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ de puntos de $\Omega\setminus\{a\}$ tales que $\{z_n\}\to a$, $\{w_n\}\to a$ y $\operatorname{Re} f(z_n)\to+\infty$, $\operatorname{Re} f(w_n)\to-\infty$. Por tanto $|\exp(f(z_n))|\to+\infty$ y $|\exp(f(w_n))|\to 0$ lo que implica que la función $\exp(f)$ no tiene límite finito ni infinito en a y, en consecuencia, tiene una singularidad esencial en a. ☺

Ejercicio resuelto 99 Sea Ω abierto en $\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ una sucesión de puntos distintos de Ω que converge a un punto $a \in \Omega$. Sea f una función holomorfa en el abierto $U = \Omega \backslash (\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\})$ y que tiene un polo en cada punto a_n. Prueba que, para cada $\rho > 0$, el conjunto $f(D(a,\rho) \cap U)$ es denso en $\mathbb{C}$.

Solución.
Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\rho > 0$ tal que el conjunto $f(D(a,\rho) \cap U)$ no es denso en $\mathbb{C}$, es decir, existen $r > 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z) - \alpha| \geqslant r$ para todo $z \in D(a,\rho) \cap U$. Definamos

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha} \qquad \forall z \in D(a,\rho) \cap U$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a_n \in D(a,\rho) \subset \Omega$. Claramente, g es una función holomorfa en $D(a,\rho) \cap U$. Como $\lim_{z \to a_n} g(z) = 0$ se tiene que g es regular en a_n; por lo que definiendo $g(a_n) = 0$, obtenemos que la función g así extendida es holomorfa en $D(a,\rho)$. Evidentemente el punto a es un punto de acumulación de ceros de g por lo que, en virtud del principio de identidad, g debe ser idénticamente nula en $D(a,\rho)$ lo cual es contradictorio pues, por su definición, $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\rho) \cap U$. ☺

Ejercicio resuelto 100 Sea $R > 0$, $a \in D(0,R) \backslash \{0\}$, y f una función holomorfa en $D(0,R) \backslash \{a\}$ que tiene un polo simple en a. Sea $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Prueba que $\lim \left\{ \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right\} = a$.

Solución.
Sea $\alpha = \operatorname{Res}(f(z), a)$. La función $f(z) - \alpha/(z-a)$ es holomorfa en $D(0,R)$ por lo que

$$f(z) - \frac{\alpha}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n \qquad \forall z \in D(0,R)$$

Como f es holomorfa en $D(0,|a|)$ tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \forall z \in D(0,|a|)$$

Tenemos por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{\alpha}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = -\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n - \frac{\alpha}{a^{n+1}} \right) z^n \qquad \forall z \in D(0,|a|)$$

Deducimos que

$$c_n = \alpha_n - \frac{\alpha}{a^{n+1}} = \frac{\alpha_n a^{n+1} - \alpha}{a^{n+1}}$$

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n a^n$ es convergente tenemos que $\alpha_n a^n \to 0$. Deducimos así que a partir de un cierto término en adelante $c_n \neq 0$ y

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\alpha_n a^{n+1} - \alpha}{\alpha_{n+1} a^{n+2} - \alpha}\, a \longrightarrow a.$$

☺

Ejercicio resuelto 101 Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de puntos que son polos de f. Supongamos, además, que f o bien es regular o tiene un polo en infinito. Prueba que f es una función racional.

Solución.

Sea $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ el conjunto de los polos de f en $\mathbb{C}$. Sea $h_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right)$ la parte principal del desarrollo de Laurent de f en a_j. Sabemos, por el corolario 4.24, que $f(z) - h_j\left(\dfrac{1}{z-a_j}\right)$ es regular en a_j. Deducimos que la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right) \qquad z\in\mathbb{C}\setminus S \qquad (*)$$

es regular en $\mathbb{C}$. Definiendo $g(a_j) = \lim_{z\to a_j} g(z)$ resulta que la función g así extendida es una función entera. La hipótesis de que f o bien es regular o tiene un polo en infinito implica, en virtud de la igualdad $(*)$, que a g le ocurre igual y, como g es una función entera, concluimos, en virtud de la proposición 4.34, que g es una función polinómica. Además, como todas las singularidades a_j son polos, las funciones h_j son también polinómicas. La igualdad $(*)$ nos dice ahora que f es una función racional.

Observa que la igualdad

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{n} h_j\left(\frac{1}{z-a_j}\right)$$

es la descomposición de f en fracciones simples con coeficientes complejos. ☺

Ejercicio resuelto 102 Sea $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Justifica que las funciones f y h definidas en Ω por:

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi z}, \quad h(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} \qquad (z\in\Omega)$$

son holomorfas en Ω y tienen la misma parte principal en cada entero $n\in\mathbb{Z}$.

Dedúzcase que la función $g(z) = f(z) - h(z)$, $(z\in\Omega)$, puede extenderse a una función entera y acotada y que, por tanto, g es i dénticamente nula.

Ejercicio resuelto $\boxed{103}$ Sea f una función holomorfa que no se anula en el anillo $A(0;1,2)$. Pruébese que hay un entero $n\in\mathbb{Z}$, y una función g holomorfa en dicho anillo, tal que $f(z)=z^n\exp(g(z))$ para todo $z\in A(0;1,2)$.

4.5.4. Ejercicios propuestos

149. Calcula el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}\quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$$

en cada uno de los anillos siguientes: $A(1;0,2)$ y $A(1;2,+\infty)$.

150. Clasifica las singularidades de las siguientes funciones y calcula los residuos correspondientes (incluyendo el punto ∞ cuando tenga sentido).

$$\text{a)}\ \frac{1-\cos z}{z^n}\qquad \text{b)}\ z^n\operatorname{sen}(1/z)\qquad \text{c)}\ \frac{1}{z(1-e^{2\pi i z})}\qquad \text{d)}\ \frac{z}{\operatorname{tg}\pi z}\quad \text{e)}\ \frac{e^{1/z}}{z-1}$$

151. Prueba que una función entera e inyectiva es una función polinómica de grado uno.

152. Supongamos que f y g son holomorfas en un entorno de un punto a; que $f(a)\neq 0$ y que g tiene un cero de orden 2 en a. Prueba que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{g(z)};a\right)=2\frac{f'(a)}{g''(a)}-\frac{2}{3}\frac{f(a)g'''(a)}{\left(g''(a)\right)^2}$$

153. Sea Ω un abierto en el plano, $a\in\Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\setminus\{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y f'?

154. Sea f una función holomorfa en un entorno reducido de un punto a que no se anula en dicho entorno. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades en a de las funciones f y $1/f$?

155. Sean f y g funciones holomorfas en un entorno reducido de un punto a. Estúdiese el comportamiento en a de las funciones $f+g$ y fg, supuesto conocido el de f y g.

156. La función f es holomorfa en un entorno del punto a y la función g tiene un polo de orden m en el punto $f(a)$. ¿Cómo se comporta en el punto a la función compuesta $g\circ f$? ¿Qué ocurre si g tiene una singularidad esencial en a?

157. Justifica que la suma de los residuos de una función racional, incluyendo el residuo en ∞, es igual a 0.

158. Sea Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ que tiene un polo de orden n en a. Prueba que para $|w|$ suficientemente grande la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente n soluciones.

159. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en $D(a,R) \setminus \{a\}$ que converge uniformemente en compactos de $D(a,R) \setminus \{a\}$ a una función f. Justifica la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si las funciones f_n tienen un polo en a también f tiene un polo en a.

b) Si las funciones f_n tienen una singularidad esencial en a también f tiene una singularidad esencial en a.

c) Si las funciones f_n son regulares en a también f es regular en a.

4.6. Teorema de los residuos

4.35 Teorema de los residuos. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $S \subset \Omega$ un conjunto de puntos aislados en Ω, es decir, $S' \cap \Omega = \emptyset$ y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Si Γ es un ciclo en $\Omega \setminus \{S\}$ nulhomólogo respecto de Ω entonces*

(a) El conjunto $\{a \in S : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es finito.

(b) $$\boxed{\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{a\in S} \operatorname{Res}(f(z),a)\operatorname{Ind}_\Gamma(a)}$$

Demostración. La demostración del teorema consiste en construir otro ciclo Σ formado por circunferencias centradas en los puntos singulares de f de forma que $\Gamma - \Sigma$ sea un ciclo nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus S$ y en esta situación aplicar el teorema general de Cauchy.

En primer lugar veamos que la suma anterior es finita, es decir, $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ salvo para un número finito de puntos $a \in S$. Consideremos el abierto (unión de componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$) $\Omega_0 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$. Por la hipótesis de que Γ es nulhomólogo respecto de Ω tenemos que $\Omega_0 \supseteq \mathbb{C} \setminus \Omega$. Sea

$$K = \mathbb{C} \setminus \Omega_0 = \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\}$$

Tenemos que $K \subset \Omega$ y K es cerrado (como complemento de un abierto) y acotado (porque no corta a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$) luego es compacto. Con lo cual $S \cap K$ es un conjunto finito, ya que en otro caso tendría un punto de acumulación que, por compacidad, debería quedarse en K lo que implicaría que $S' \cap \Omega \neq \emptyset$ en contradicción con la hipótesis.

Lo anterior nos asegura que el conjunto $\{a \in S : \operatorname{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\} = S \cap K$ es finito luego podemos enumerarlo $S \cap K = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ lo que justifica que la suma en el enunciado es una suma con un número finito de términos distintos de cero.

Centremos en cada uno de los puntos a_k un disco contenido en Ω y que no contenga a otros puntos de S. Para ello sea $\rho > 0$ de forma que $\overline{D}(a_k, \rho) \subseteq \Omega$ y $\overline{D}(a_k, \rho) \cap S = \{a_k\}$ para $k = 1, \ldots, q$. Para cada k sea $m_k = \operatorname{Ind}_\Gamma(a_k)$ y $\gamma_k = m_k C(a_k, \rho)$. Consideremos el ciclo $\Sigma = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j$. A continuación probaremos que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus S$, esto es, para $z \notin \Omega \setminus S$ se verifica que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$. Distinguimos varios casos:

- Si $z \notin \Omega$ entonces $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ por hipótesis y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1 \leqslant k \leqslant q$ luego $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant q$, de donde $\operatorname{Ind}_\Sigma(z) = 0$. Concluimos que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$.
- $z \in S$ tenemos dos posibilidades:
  - $z \neq a_k$ para $1 \leqslant k \leqslant q$, en cuyo caso $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ y además $z \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $1 \leqslant k \leqslant q$ por construcción, luego también $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ para cada k. Concluimos de nuevo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = 0$.
  - $z = a_j$ para cierto j. Entonces $\operatorname{Ind}_\Gamma(a_j) = m_j$ y, por definición, $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = m_j$ y $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(a_j) = 0$ para $k \neq j$ ya que $a_j \notin \overline{D}(a_k, \rho)$ para $k \neq j$. Luego tenemos

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma-\Sigma}(z) = \operatorname{Ind}_\Gamma(z) - \operatorname{Ind}_\Sigma(z) = m_j - \operatorname{Ind}_{\gamma_j}(a_j) = m_j - m_j = 0$$

Hemos justificado así que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto del abierto $\Omega \setminus S$. Aplicamos ahora el teorema general de Cauchy a dicho abierto para el ciclo $\Gamma - \Sigma$ y a la función $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus S)$ y obtenemos que

$$0 = \int_{\Gamma-\Sigma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \int_\Sigma f(z)\,\mathrm{d}z$$

despejando resulta

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\Sigma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{q} m_j \int_{C(a_j,\rho)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Ind}_\Gamma(a_j) \operatorname{Res}(f(z), a_j)$$

como queríamos probar. ✓

4.7. Aplicaciones del teorema de los residuos para calcular integrales reales

4.7.1. Integrales del tipo $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$

Suponemos que R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad. La idea para calcular esta integral por el método de residuos es convertirla en una integral sobre $C(0,1)$ de una función compleja que también va a ser racional. Para ello recordemos que

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{e^{2it} - 1}{2ie^{it}} \qquad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}}$$

Por tanto, se verifica que

$$\int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt\,.$$

En consecuencia, si notamos $f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}$. Tenemos que $f(z)$ es una función racional por lo que sus únicas posibles singularidades son polos. Para calcular la integral sólo nos interesan los polos que están dentro del disco unidad. Supongamos que estos son $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}, z_j\right)}$$

4.7.2. Ejercicios resueltos

Ejercicio resuelto 104 Calcular la integral $\mathrm{I} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\,dt\,.$

Solución.

$$\mathrm{I} = \int_{C(0,1)} \frac{1}{5+2\frac{z^2+1}{z}}\frac{1}{iz}\,dz = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{1}{2z^2+5z+2}\,dz = \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z+1)(z+2)}\,dz$$

Por tanto

$$\mathrm{I} = \frac{1}{i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, \frac{-1}{2}\right) = 2\pi \lim_{z\to -1/2} (z+1/2)\frac{1}{(2z+1)(z+2)} = \frac{2}{3}\pi$$

☺

Ejercicio resuelto 105 Calcular la integral $\mathrm{I} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ donde $a > 0$ y $b > 0$.

Solución.

$$\mathrm{I} = \int\limits_{C(0,1)} \frac{1}{a^2\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2 + b^2\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{i}\int\limits_{C(0,1)} \frac{4z}{b^2(z^2+1)^2 - a^2(z^2-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

Como

$$b^2(z^2+1)^2 - a^2(z^2-1)^2 = \big(b(z^2+1)+a(z^2-1)\big)\big(b(z^2+1)-a(z^2-1)\big)$$

obtenemos fácilmente las raíces del denominador

$b(z^2+1)+a(z^2-1) = (a+b)z^2+b-a = 0$ cuyas raíces son $z_1 = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$, $z_2 = -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$

$b(z^2+1)-a(z^2-1) = (b-a)z^2+b+a = 0$ cuyas raíces son $z_3 = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, $z_4 = -\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

Como $|z_1| = |z_2| < 1$ y $|z_3| = |z_4| > 1$, calcularemos los residuos en z_1 y z_2 que son polos simples de la función que integramos. Pongamos

$$f(z) = \frac{4z}{b^2(z^2+1)^2 - a^2(z^2-1)^2} = \frac{4z}{\big(b(z^2+1)+a(z^2-1)\big)\big(b(z^2+1)-a(z^2-1)\big)} =$$
$$= \frac{4z}{(a+b)(z-z_1)(z-z_2)\big(b(z^2+1)-a(z^2-1)\big)}$$

Como para $j = 1,2$ es $b(z_j^2+1)+a(z_j^2-1) = 0$ deducimos que

$$b(z_j^2+1)-a(z_j^2-1) = 2b(z_j^2+1) = 2b\frac{2a}{a+b} \qquad (j=1,2)$$

Obtenemos ahora fácilmente los residuos.

$$\operatorname{Res}(f(z),z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{4z_1}{(a+b)(z_1-z_2)2b(z_1^2+1)} = \frac{2}{(a+b)2b(z_1^2+1)} = \frac{1}{2ab}$$

Y también $\operatorname{Res}(f(z),z_2) = \frac{1}{2ab}$. Por tanto

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\operatorname{sen}^2 x + b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{i}2\pi i\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{2ab}\right) = \frac{2\pi}{ab}$$

☺

4.7.3. Ejercicios propuestos

Usando el teorema de los residuos calcula las siguientes integrales.

160. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

161. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{5-4\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$

162. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x}{5-3\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

163. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5\cos^2 t+4}\,\mathrm{d}t$

164. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{15\operatorname{sen}^2 t+1}\,\mathrm{d}t$

165. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a\operatorname{sen} x+b\cos x+c}\,\mathrm{d}x \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ a^2+b^2<c^2)$

166. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{3\cos^2 t+2\operatorname{sen}^2 t}{9\cos^2 t+4\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$

167. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x\,\mathrm{d}x$

Usando el teorema de los residuos prueba las siguientes igualdades.

168. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (0<b<a)$

169. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a+b\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{b^2}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right) \quad (0<b<a)$

170. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{1-2a\cos\vartheta+a^2} = \frac{2\pi}{|a^2-1|} \quad |a|\neq 1$

171. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{(1+a\cos\vartheta)^2} = \frac{2\pi}{(1-a^2)^{3/2}} \qquad |a|<1$

172. $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta}{1+a^2-2a\cos(\vartheta-\varphi)}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1+a^2\cos 2\varphi}{2(1-a^2)} \qquad (a\in\mathbb{R}, |a|<1)$

173. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{1+r^2-2r\cos t}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi r^n}{1-r^2} \qquad |r|<1$

174. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1+a^2-2a\cos 2t}\,dt = \pi\frac{a^2-a+1}{1-a} \qquad (0<a<1)$

175. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5+3\cos x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{\pi}{2\,3^n} \qquad (n\in\mathbb{N})$

176. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos t)^n\cos nt}{3+2\cos t}\,dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(3-\sqrt{5})^n \qquad (n\in\mathbb{N})$

177. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(nt-\operatorname{sen} t)\exp(\cos t)\,dt = \frac{2\pi}{n!}$

4.7.4. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+2$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)}$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

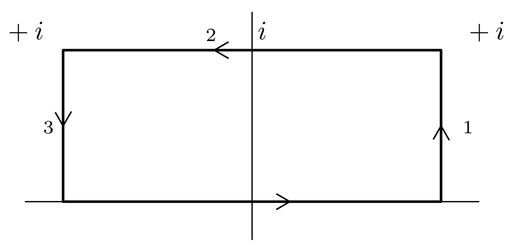


Figura 4.3: $\Gamma(\alpha, \beta, \rho)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ. Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K>0$ y $M>0$ tales que

$$|z| \geqslant K \Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|^2} \tag{4.7}$$

En lo que sigue, suponemos que α, β y ρ son mayores que K.

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 4.3) y notamos $I_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) = \int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{d}z = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{4.8}$$

Acotamos ahora I_1. Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geqslant K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 4.7, se tiene que

$$|f(z)| = |f(\beta + it)| \leqslant \frac{M}{\beta^2 + t^2}$$

Por tanto,

$$|I_1| = \left|\int_0^{\rho} f(\beta + it)\, i\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\rho} |f(\beta + it)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\rho} \frac{M}{\beta^2 + t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{\beta}\left[\arctan\frac{t}{\beta}\right]_{t=0}^{t=\rho} \leqslant \frac{M}{\beta}\frac{\pi}{2}$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leqslant \dfrac{M}{\alpha}\dfrac{\pi}{2}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geqslant K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 4.7, se tiene que $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{|z|^2}$. Por tanto

$$|I_2| = \left|\int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M}{t^2 + \rho^2}\,\mathrm{d}t \leqslant (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho^2}$$

En vista de 4.8 y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M}{\beta}\frac{\pi}{2} + \frac{M}{\alpha}\frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho^2}$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho \to +\infty$ con lo que obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha}\right) \tag{4.9}$$

Tomando ahora límite para $\alpha \to +\infty$ y $\beta \to +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$ y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Observa que la acotación 4.9 proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ por una "integral parcial" $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

4.36 Ejemplo. Queremos calcular la integral

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x$$

donde suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ son distintos. La función que integramos tiene dos polos simples en el semiplano superior en los puntos ia, ib. Según acabamos de ver

$$\mathrm{I} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia\right) + 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib\right)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ia\right) &= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z^2+b^2)} \\ &= \lim_{z\to ia}\frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)}\end{aligned}$$

Análogamente

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ib\right) = \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}$$

Luego

$$\mathrm{I} = 2\pi i\left(\frac{1}{2ia(b^2-a^2)} + \frac{1}{2ib(a^2-b^2)}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)}$$

□

4.7.5. Ejercicios propuestos

Calcula por el método de residuos las siguientes integrales.

178. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

179. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} \quad (a,b,c\in\mathbb{R},\ b^2<4ac)$

180. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}x$

181. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

182. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x$

183. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$

184. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$

Usa el método de los residuos para probar las igualdades siguientes.

185. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\frac{1}{(x-c)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{(a+b)^2+c^2} \quad (a>0, b>0, c\neq 0)$

186. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}(n-1)!} \quad (a>0, n\geqslant 2)$

187. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2} \quad (a>0, b>0)$

188. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4+a^4)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a} \quad (a>0)$

4.7.6. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, \mathrm{e}^{i\lambda x}\, \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right)}$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\, \mathrm{e}^{i\lambda z}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Consideremos la poligonal $\Gamma(\alpha,\beta,\rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

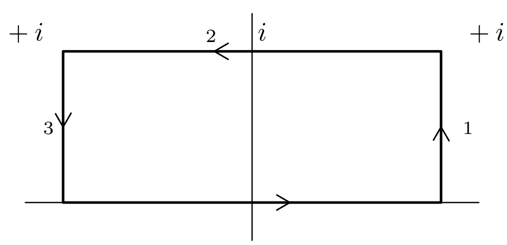


Figura 4.4: $\Gamma(\alpha,\beta,\rho)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{P(z)}{Q(z)}\, \mathrm{e}^{i\lambda z}\, \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, \mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ. Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}\, dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K>0$ y $M>0$ tales que

$$|z| \geqslant K \Rightarrow \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|} \tag{4.10}$$

En lo que sigue, suponemos que α, β y ρ son mayores que K.

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 4.4) y notamos $I_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)\, dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right) = \int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)}\, dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)}\, dx \right| \leqslant |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{4.11}$$

Acotamos ahora I_1. Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geqslant K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 4.10, se tiene que

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| = \left|\frac{P(\beta + it)}{Q(\beta + it)}\right| \leqslant \frac{M}{|\beta + it|} \leqslant \frac{M}{\beta}$$

Además $\left|e^{i\lambda(\beta + it)}\right| = e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$|I_1| = \left|\int_0^{\rho} f(\beta + it) i\, dt\right| \leqslant \int_0^{\rho} |f(\beta + it)|\, dt \leqslant \int_0^{\rho} \frac{M e^{-\lambda t}}{\beta}\, dt = \frac{M}{\beta}\left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_{t=0}^{t=\rho} = \frac{M}{\beta}\frac{1 - e^{-\lambda\rho}}{\lambda} \leqslant \frac{M}{\beta\lambda}$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leqslant \dfrac{M}{\alpha\lambda}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geqslant K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 4.10, se tiene que $|f(z)| \leqslant \dfrac{M}{|z|} \leqslant \dfrac{M}{\rho}$. Además, para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ es $\operatorname{Im} z = \rho$. Por tanto $\left|e^{i\lambda z}\right| = e^{-\lambda\rho}$. Deducimos que

$$|I_2| = \left|\int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z)\, dz\right| \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)|\, dt \leqslant \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M e^{-\lambda\rho}}{\rho}\, dt = (\alpha + \beta)\frac{M}{\rho} e^{-\lambda\rho}$$

En vista de 4.11 y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left|2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{e}^{i\lambda z},z_j\right)-\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{\beta\lambda}+\frac{M}{\alpha\lambda}+(\alpha+\beta)\frac{M}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\lambda,\rho}$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho\to+\infty$ con lo que, teniendo en cuenta que $\lambda>0$, obtenemos

$$\left|2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{e}^{i\lambda z},z_j\right)-\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(\frac{M}{\beta}+\frac{M}{\alpha}\right)\tag{4.12}$$

Tomando ahora límite para $\alpha\to+\infty$ y $\beta\to+\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\dfrac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}$ es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$ y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\,\mathrm{e}^{i\lambda z},z_j\right)$$

Observa que la acotación 4.12 proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ por una "integral parcial" $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

4.37 Ejemplo. Queremos calcular la integral $\mathrm{I}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\lambda x)}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$. Suponemos que $a>0$ y $\lambda>0$. Como

$$\mathrm{I}=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

Calcularemos $\mathrm{J}=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$. Según acabamos de ver, teniendo en cuenta que la función $\dfrac{1}{a^2+z^2}$ solamente tiene un polo simple en el semiplano superior en el punto ai, se sigue que

$$\mathrm{J}=2\pi i\operatorname{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\lambda z}}{a^2+z^2},a\,i\right)=2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{\mathrm{e}^{i\lambda z}}{a^2+z^2}=2\pi i\lim_{z\to ai}(z-ai)\frac{\mathrm{e}^{i\lambda z}}{(z-a\,i)(z+a\,i)}=\pi\frac{\mathrm{e}^{-\lambda a}}{a}$$

Luego $\mathrm{I}=\pi\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda a}}{a}$. □

4.7.7. Ejercicios propuestos

Utilizando el método de residuos calcula las integrales.

189. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,3x}{x^2+9}\,\mathrm{d}x$

190. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

191. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 4x}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$

192. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

193. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

194. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Utilizando el método de residuos prueba las siguientes igualdades.

195. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)\,\mathrm{e}^{-at} \quad (a>0, t>0)$

196. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-a}}{a}-\frac{\mathrm{e}^{-b}}{b}\right) \quad (a\neq b, a>0, b>0)$

4.7.8. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas con coeficientes reales sin factores comunes y $\lambda > 0$.

2. $\mathrm{grado}(Q) \geqslant \mathrm{grado}(P) + 1$.

3. $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje real que coinciden con ceros de la función $\operatorname{sen}(\lambda x)$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{e}^{i\lambda z}, x_j\right)\right)}$$

Para aprender el procedimiento que se sigue con este tipo de integrales es suficiente considerar el caso en que $x = 0$ es el único cero que Q tiene en el eje real. Supondremos, pues, en lo que sigue que Q tiene un cero simple en $x = 0$ y $Q(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. La forma de proceder es muy parecida a la anterior con una pequeña diferencia y es que ahora consideraremos el camino de integración $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)$ que puedes ver en la figura 4.5 (si Q tuviera más ceros en el eje real habría que rodear cada uno de ellos con una semicircunferencia al igual que se ha hecho con $x = 0$).

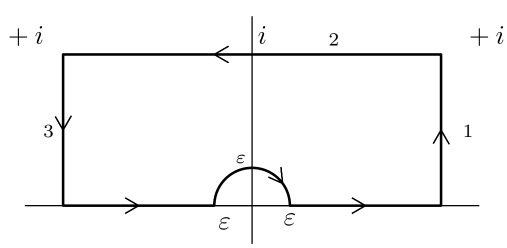


Figura 4.5: $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \varepsilon)$

Procediendo como en el caso anterior, considerando la función $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}$, y teniendo en cuenta que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho,\varepsilon)}(0) = 0$, el teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha,\beta,\rho,\varepsilon)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, z_j\right)$$

Las acotaciones que hemos obtenido antes en los segmentos γ_1, γ_2 y γ_3 siguen siendo válidas por lo que obtenemos fácilmente la siguiente acotación análoga a la acotación 4.12 del caso anterior:

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j) - \int_{-\alpha}^{-\varepsilon} f(x)\, dx - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz - \int_{\varepsilon}^{\beta} f(x)\, dx \right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha}\right)$$

Tomando en esta desigualdad límites para $\alpha \to +\infty$ y $\beta \to +\infty$ se deduce que

$$2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j) - \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \tag{4.13}$$

Sea $w = \operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} z f(z)$. Teniendo en cuenta el sentido de recorrido de γ_ε tenemos que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz + \pi i w = -\int_{0}^{\pi} \left(f(\varepsilon e^{it}) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}} \right) i\varepsilon e^{it}\, dt$$

Como

$$\left| f(\varepsilon e^{it}) - \frac{w}{\varepsilon e^{it}} \right| = \frac{1}{\varepsilon} \left| \varepsilon e^{it} f(\varepsilon e^{it}) - w \right|$$

deducimos que

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz + \pi i w \right| \leqslant \int_{0}^{\pi} \left| \varepsilon e^{it} f(\varepsilon e^{it}) - w \right| dt \leqslant \pi \max\{ |z f(z) - w| : |z| = \varepsilon \}$$

y como $\lim\limits_{z\to 0}(z f(z) - w) = 0$, se sigue que $\max\{|z f(z) - w| : |z| = \varepsilon\} \longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Hemos probado así que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = -\pi i w = -\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$. Teniendo en cuenta la igualdad 4.13 deducimos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \tag{4.14}$$

Tomando ahora partes imaginarias y teniendo en cuenta que P y Q tienen coeficientes reales

$$\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \right) = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx$$

y teniendo en cuenta también que la función $x \mapsto \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x)P(x)}{Q(x)}$ es continua en $x = 0$ sin más que definirla en 0 igual a $\operatorname{Res}(f(z), 0)$ por lo que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx$$

concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\, dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \right)$$

4.38 Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \operatorname{Im} \left(\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right) = \operatorname{Im} \left(\pi i \lim_{z \to 0} z \frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi$$

□

4.7.9. Integrales del tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\, dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas con coeficientes reales sin factores comunes y $\lambda > 0$.
2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 1$.
3. $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje real que coinciden con ceros de la función $\cos(\lambda x)$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\, dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, z_j \right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\lambda z}, x_j \right) \right)}$$

La justificación de esta igualdad es totalmente análoga a la anterior.

4.7.10. Ejercicios propuestos

Usando el método de residuos calcula las integrales siguientes.

197. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x \quad (\lambda > 0, a > 0)$

198. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi/2)(x-\pi)}\,\mathrm{d}x$

199. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\pi/2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

200. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

201. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x}\,\frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x \quad (a > 0, b^2-4ac < 0)$

202. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2-\pi^2)}\,\mathrm{d}x$

203. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x(x-1)(x-2)(x-3)}\,\mathrm{d}x$

4.7.11. Integrales con polos simples en el eje real

Integrales del tipo $\displaystyle V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{e}^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P) + 1$.

3. $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje real.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}, x_j\right)} \tag{4.15}$$

Las letras "*V.P.*" se leen *valor principal de Cauchy*. Expliquemos lo que esto significa. Supongamos, por comodidad, que Q tiene un cero simple en $x = 0$ y $Q(x) \neq 0$ para $x \neq 0$. El método que hemos usado anteriormente se aplica exactamente igual hasta llegar a la igualdad 4.14. La dificultad ahora es que la función $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}\, e^{i\lambda z}$ no es continua en los ceros reales de Q y la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\lambda x}\, dx$ no existe. Todo lo que podemos obtener en este caso es lo que afirma la igualdad 4.14:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\,(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

El valor de límite de la izquierda de esta igualdad se llama valor principal de Cauchy de la integral impropia y se representa por $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\lambda x}\, dx$. En consecuencia, podemos afirmar que

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\,(f(z), z_j) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

Naturalmente, si Q tuviera dos ceros simples reales $a < b$ el valor principal de la integral vendría dado por el límite siguiente

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{b+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\,(f(z), z_j) + \pi i \big(\operatorname{Res}(f(z), a) + \operatorname{Res}(f(z), b)\big)$$

Observa que tomando parte real o imaginaria en la igualdad 4.15 obtenemos respectivamente, en la hipótesis de que los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ tengan coeficientes reales, las integrales $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x$ y $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x$. Ten en cuenta que alguna de estas integrales puede ser convergente si los ceros de $Q(z)$ en el eje real coinciden con ceros de $\cos(\lambda x)$ o con ceros de $\operatorname{sen}(\lambda x)$.

No olvides que en las hipótesis hechas la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{e}^{i\lambda x}\,\mathrm{d}x$ no existe como integral de Lebesgue. Pero puede ocurrir que alguna de las integrales $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x$ y $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \operatorname{sen}(\lambda x)\,\mathrm{d}x$ exista como integral impropia de Riemann.

Integrales del tipo $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. grado$(Q) \geqslant$ grado$(P) + 2$.
3. $Q(x)$ tiene ceros simples en puntos del eje real.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior y $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el eje real, se verifica que

$$\boxed{V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j\right)}$$

El valor principal de Cauchy está definido como el límite

$$V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_{-\infty}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{j=1}^{p-1} \int\limits_{x_j+\varepsilon}^{x_{j+1}-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x_p+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right)$$

No olvides que en las hipótesis hechas la integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$ no existe como integral de Lebesgue ni como integral impropia de Riemann.

4.7.12. Ejercicios propuestos

Calcula el valor principal de Cauchy de las siguientes integrales por el método de residuos.

204. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x-1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$

205. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3-8}\,\mathrm{d}x$

206. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$

207. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

208. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$

209. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

210. $V.P. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x$

4.7.13. Integrales del tipo $\int\limits_{a}^{b} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}, z_j\right)}$$

Para ello, teniendo en cuenta que la función $\log\dfrac{z-b}{z-a}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ (ver ejercicios 1, ejercicio 15 y ejercicio 2, ejercicio 68), vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}$$

en el abierto $\Omega = \mathbb{C}\setminus[a,b]$. Consideramos un ciclo formado por dos poligonales (rectángulos) recorridos en sentidos opuestos (ver figura 4.6).

$$\begin{aligned}\Gamma(R,\varepsilon) =& [b+R+iR, a-R+iR, a-R-iR, b+R-iR, b+R+iR] \dot{-}\\ &\dot{-}\,[b+\varepsilon+i\varepsilon, a-\varepsilon+i\varepsilon, a-\varepsilon-i\varepsilon, b+\varepsilon-i\varepsilon, b+\varepsilon+i\varepsilon]\end{aligned}$$

donde R, ε son números positivos que tomamos de forma que todos los ceros del polinomio Q queden en el interior del rectángulo grande y fuera del pequeño de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

Observa que el ciclo $\Gamma(R,\varepsilon)$ es nulhomólogo respecto de $\Omega = \mathbb{C}\setminus[a,b]$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}, z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando $R \to +\infty$ y $\varepsilon \to 0$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)}\log\frac{z-b}{z-a}\,\mathrm{d}z \longrightarrow 2\pi i \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

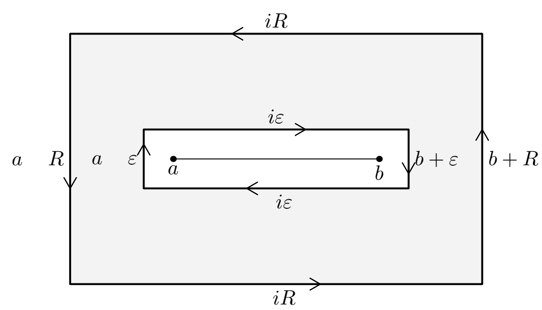


Figura 4.6: $\Gamma(R,\varepsilon)$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K>0$ y $M>0$ tales que

$$|z| \geqslant K \Rightarrow \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leqslant \frac{M}{|z|} \tag{4.16}$$

En lo que sigue suponemos que $R>K$.

Como la función $Q(z)$ no se anula en $[a,b]^*$ podemos fijar un número $0<\rho<1$ tal que en el rectángulo cerrado

$$\mathcal{R}=\{x+iy\in\mathbb{C} : a-\rho\leqslant x\leqslant b+\rho,\ -\rho\leqslant y\leqslant\rho\}$$

la función $Q(z)$ no se anule. Por continuidad y compacidad, la función $\dfrac{|P(z)|}{|Q(z)|}$ alcanzará un valor máximo en $\mathcal{R}$. Sea

$$L=\text{máx}\left\{\frac{|P(z)|}{|Q(z)|} : z\in\mathcal{R}\right\} \tag{4.17}$$

En lo que sigue suponemos que $\varepsilon<\rho/2$.

Probaremos en primer lugar que las integrales sobre los lados verticales de los rectángulos tienden a 0. Consideremos para ello un segmento de la forma

$$J(\lambda)=[b+\lambda-i\lambda, b+\lambda+i\lambda]^* \qquad (\lambda>0)$$

Usando la acotación básica para integrales, tenemos que

$$\left|\int\limits_{[b+\lambda-i\lambda,b+\lambda+i\lambda]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\lambda\,\text{máx}\left\{\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|\left|\log\frac{z-b}{z-a}\right| : z\in J(\lambda)\right\} \tag{4.18}$$

Naturalmente

$$\log\frac{z-b}{z-a}=\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|+i\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$$

por lo que

$$\left|\log\frac{z-b}{z-a}\right| \leqslant \left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| + \left|\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right|$$

Vamos a calcular el máximo de la función $\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right|$ cuando $z\in J(\lambda)$. Es evidente que para $z\in J(\lambda)$ se tiene que $\left|\frac{z-b}{z-a}\right| < 1$, por lo que $\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| = -\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|$. En consecuencia

$$\text{máx}\left\{\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| : z\in J(\lambda)\right\} = -\,\text{mín}\left\{\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right| : z\in J(\lambda)\right\}$$

Teniendo en cuenta que el logaritmo es estrictamente creciente, será suficiente calcular el mínimo de $\left|\frac{z-b}{z-a}\right|$ en $J(\lambda)$. Los puntos de $J(\lambda)$ son de la forma $b+\lambda+it$ donde $|t| \leqslant \lambda$. Tenemos que

$$\left|\frac{b+\lambda+it-b}{b+\lambda+it-a}\right| = \frac{|\lambda+it|}{|b-a+\lambda+it|} = \sqrt{\frac{\lambda^2+t^2}{(b-a+\lambda)^2+t^2}}$$

Para calcular el mínimo podemos prescindir de la raíz. Hemos reducido nuestro problema a calcular el mínimo de $\dfrac{\lambda^2+t^2}{(b-a+\lambda)^2+t^2}$ en $[-\lambda,\lambda]$. Derivando se comprueba enseguida que el mínimo valor se alcanza para $t=0$. Por tanto

$$\text{máx}\left\{\left|\log\left|\frac{z-b}{z-a}\right|\right| : z\in J(\lambda)\right\} = -\frac{1}{2}\log\frac{\lambda^2}{(b-a+\lambda)^2} \tag{4.19}$$

Acotamos ahora $\left|\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)\right|$ en $J(\lambda)$. Interesa acotar de forma diferente según que sea $\lambda=\varepsilon$ o $\lambda=R$.

Como el número complejo

$$\frac{b+\lambda+it-b}{b+\lambda+it-a} = \frac{\lambda+it}{b+\lambda+it-a} = \frac{\lambda(b-a)+\lambda^2+t^2+it(b-a)}{(b-a+\lambda)^2+t^2}$$

tiene parte real positiva, tenemos que

$$\left|\arg\left(\frac{\lambda+it}{b+\lambda+it-a}\right)\right| = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|t(b-a)|}{\lambda(b-a)+\lambda^2+t^2}\right) \leqslant \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{\varepsilon(b-a)}{\varepsilon(b-a)} = \dfrac{\pi}{4} & (\lambda=\varepsilon) \\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{R(b-a)}{R^2} = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{(b-a)}{R} & (\lambda=R) \end{cases}$$

Haciendo en la desigualdad 4.18 $\lambda=\varepsilon$ y teniendo en cuenta 4.17 y 4.19, obtenemos

$$\left|\int\limits_{[b+\varepsilon-i\varepsilon,\,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\varepsilon L\left(-\frac{1}{2}\log\frac{\varepsilon^2}{(b-a+\varepsilon)^2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

y como $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log(\varepsilon)=0$, se sigue que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\displaystyle\int\limits_{[b+\varepsilon-i\varepsilon,\,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

Análogamente, haciendo en la desigualdad 4.18 $\lambda=R$ y teniendo en cuenta 4.16 y 4.19, obtenemos

$$\left|\int\limits_{[b+R-iR,\,b+R+iR]} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2R\frac{M}{R}\left(-\frac{1}{2}\log\frac{R^2}{(b-a+R)^2}+\operatorname{arctg}\frac{(b-a)}{R}\right)$$

Como la última expresión en esta desigualdad tiende a 0 para $R\to+\infty$, hemos probado que $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int\limits_{[b+R-iR,\,b+R+iR]} f(z)\,\mathrm{d}z=0$.

Análogamente se prueba que las integrales sobre los otros dos segmentos verticales también tienden a 0.

Consideremos ahora los segmentos horizontales. Es muy fácil probar que las integrales sobre los segmentos horizontales del rectángulo grande tienden a cero para $R\to+\infty$.

Nos queda considerar las integrales sobre los segmentos horizontales del rectángulo pequeño.

$$\int\limits_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,\,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{P(t+i\varepsilon)}{Q(t+i\varepsilon)}\log\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)\mathrm{d}t$$

Tenemos que

$$\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}=\frac{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2+i\varepsilon(b-a)}{(t-a)^2+\varepsilon^2}$$

Para $a+\varepsilon<t<b-\varepsilon$ se tiene que $(t-b)(t-a)+\varepsilon^2<0$ por lo que

$$\arg\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon(b-a)}{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2}+\pi \qquad (a+\varepsilon<t<b-\varepsilon)$$

A partir de aquí se prueba con facilidad que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,\,b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\mathrm{d}x$$

Análogamente

$$\int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,\,b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon}\frac{P(t-i\varepsilon)}{Q(t-i\varepsilon)}\log\left(\frac{t-i\varepsilon-b}{t-i\varepsilon-a}\right)\mathrm{d}t$$

Tenemos que

$$\frac{t-i\varepsilon-b}{t-i\varepsilon-a}=\frac{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2-i\varepsilon(b-a)}{(t-a)^2+\varepsilon^2}$$

por lo que

$$\arg\left(\frac{t+i\varepsilon-b}{t+i\varepsilon-a}\right)=\operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon(b-a)}{(t-b)(t-a)+\varepsilon^2}-\pi \qquad (a+\varepsilon<t<b-\varepsilon)$$

A partir de aquí se prueba con facilidad que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z=\int\limits_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\mathrm{d}x$$

Teniendo en cuenta la orientación de los segmentos, hemos probado que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z=\int\limits_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\mathrm{d}x=2\pi i\int\limits_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

La figura siguiente muestra claramente que cuando z se acerca desde el semiplano superior a un punto x del segmento $]a,b[$ entonces se tiene que $\vartheta\to\pi$ y $\varphi\to 0$ por lo que

$$\log\frac{z-b}{z-a}\to\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi$$

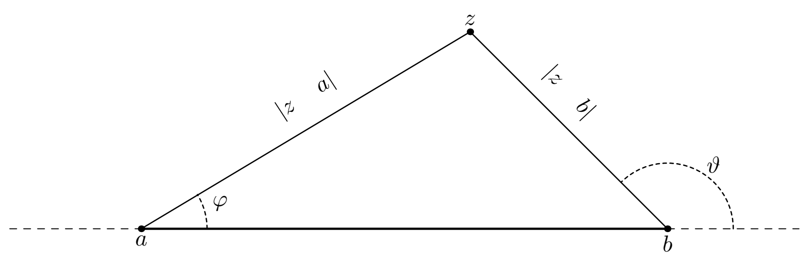


Figura 4.7: $\log\dfrac{z-b}{z-a}=\log\dfrac{|z-b|}{|z-a|}+i(\vartheta-\varphi)$

Y cuando z se acerca desde el semiplano inferior a un punto x del segmento $]a,b[$ entonces se tiene $\vartheta\to-\pi$ y $\varphi\to 0$ por lo que

$$\log\frac{z-b}{z-a}\to\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi$$

Observa que es precisamente la discontinuidad del argumento principal lo que permite calcular la integral.

4.39 Ejemplo. Calculemos $\mathrm{I}=\displaystyle\int\limits_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\lambda+1}$ donde $0<\lambda<\pi$.

Tenemos que $z^2-2z\cos\lambda+1=(z-\cos\lambda)^2+\operatorname{sen}^2\lambda$ por lo que la función $\dfrac{1}{z^2-2z\cos\lambda+1}$ tiene polos simples en los puntos $z_1=\mathrm{e}^{i\lambda}$ y $z_2=\mathrm{e}^{-i\lambda}$. Por tanto

$$\mathrm{I}=\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z},z_1\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z},z_2\right)$$

Calculemos los residuos.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z},z_1\right)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z}=\frac{1}{z_1-z_2}\log\frac{z_1-1}{z_1}$$

Tenemos que $z_1-z_2=\mathrm{e}^{i\lambda}-\mathrm{e}^{-i\lambda}=2\,i\operatorname{sen}\lambda$. Y

$$\begin{aligned}\log\frac{z_1-1}{z_1}&=\log\big(\mathrm{e}^{-i\lambda}(\mathrm{e}^{i\lambda}-1)\big)=\log\big(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}(\mathrm{e}^{i\lambda}/2-\mathrm{e}^{-i\lambda}/2)\big)=\log\big(\mathrm{e}^{-i\lambda/2}\,2\,i\operatorname{sen}(\lambda/2)\big)=\\&=\log\big(\mathrm{e}^{i(\pi-\lambda)/2}\,2\operatorname{sen}(\lambda/2)\big)=\log\big(2\operatorname{sen}\lambda/2)\big)+i(\pi-\lambda)/2\end{aligned}$$

Donde hemos tenido en cuenta que $0<\lambda<\pi$ por lo que $\operatorname{sen}(\lambda/2)>0$. Por tanto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z},z_1\right)=\frac{1}{2\,i\operatorname{sen}\lambda}\big(\log\big(2\operatorname{sen}(\lambda/2)\big)+i(\pi-\lambda)/2\big)$$

Análogamente, observando que $\dfrac{z_2-1}{z_2}$ es el complejo conjugado de $\dfrac{z_1-1}{z_1}$, se obtiene

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\log\frac{z-1}{z},z_2\right)=\frac{1}{z_2-z_1}\log\frac{z_2-1}{z_2}=\frac{-1}{2\,i\operatorname{sen}\lambda}\big(\log\big(2\operatorname{sen}(\lambda/2)\big)-i(\pi-\lambda)/2\big)$$

Deducimos que

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\lambda+1}=\frac{\pi-\lambda}{2\operatorname{sen}\lambda}$$

$\square$

4.7.14. Integrales del tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+2$.
3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geqslant a$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log_0(z-a), z_j\right)}$$

donde $\log_0$ es el logaritmo de z definido por

$$\boxed{\log_0(z) = \log|z| + i\,\vartheta(z) \qquad \vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(z) \cap [0, 2\pi[}$$

Para ello, teniendo en cuenta que la función $\log_0(z-a)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [a, +\infty[$, se aplica el teorema de los residuos a la función $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \log(z-a)$ en el abierto simplemente conexo $\Omega = \mathbb{C} \setminus [a, +\infty[$. Consideramos un ciclo formado por la poligonal (ver figura 4.8).

$$\Gamma(R,\varepsilon) = [a+R+i\varepsilon, a+R+iR, a-R+iR, a-R-iR, a+R-iR, a+R-i\varepsilon, a-\varepsilon-i\varepsilon, a-\varepsilon+i\varepsilon, a+R+i\varepsilon]$$

donde R, ε son números positivos que tomamos de forma que todos los ceros del polinomio Q queden en el interior de la poligonal de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)} \log(z-a)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log_0(z-a), z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, es suficiente para nuestros propósitos probar que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)} \log(z-a)\,\mathrm{d}z = -2\pi i \int_a^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x \tag{4.20}$$

lo que se hace de forma análoga al caso antes estudiado teniendo en cuenta que ahora las integrales sobre todos los segmentos tienden a cero cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ con

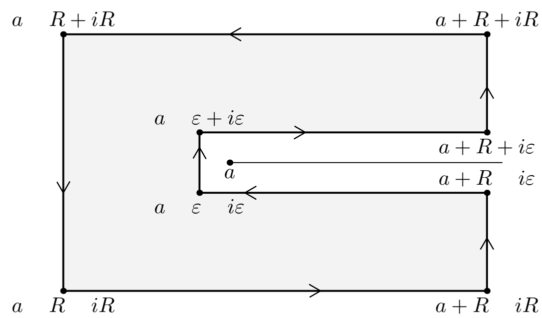


Figura 4.8: $\Gamma(R,\varepsilon)$

la excepción de las integrales sobre los segmentos $[a-\varepsilon \pm i\varepsilon,\, a+R\pm i\varepsilon]$ en los cuales se verifica que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,a+R+i\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)}\log(z-a)\,dz = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+R} \frac{P(x+i\varepsilon)}{Q(x+i\varepsilon)}\log(x-a+i\varepsilon)\,dx = $$
$$= \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\log(x-a)\,dx$$

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,a+R-i\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)}\log(z-a)\,dz = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+R} \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)}\log(x-a-i\varepsilon)\,dx = $$
$$= \int\limits_{a}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\big(\log(x-a)+2\pi i\big)\,dx$$

Lo que, teniendo en cuenta el sentido de recorrido de estos segmentos justifica la igualdad 4.20. Observa que de nuevo es la discontinuidad del argumento lo que nos permite calcular la integral.

4.7.15. Ejercicios propuestos

Usando el método de residuos calcula las siguientes integrales.

211. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+a^3} \quad (a>0)$

212. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)(x+1)}$

213. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(8x^2+3)(3x^2+2)}$

214. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+b}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \quad (a>0, b>0)$

215. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+b}\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+a^2} \quad (a>0, b>0)$

216. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x\cos\lambda+1)^2} \quad (0<\lambda<\pi)$

4.7.16. Integrales del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y λ no es un número entero.

2. $\lambda > -1$ y $\operatorname{grado}(Q) > \operatorname{grado}(P)+\lambda+1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \geqslant 0$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2i\pi\lambda}} \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\exp(\lambda \log_0 z), z_j\right)} \tag{4.21}$$

donde $\log_0$ es el logaritmo de z definido por

$$\boxed{\log_0(z) = \log|z| + i\,\vartheta(z) \qquad \vartheta(z) \in \operatorname{Arg}(z) \cap [0, 2\pi[}$$

Observa que $\exp(\lambda \log_0 z) \in [z^\lambda]$. Para ello, teniendo en cuenta que la función $\log_0 z$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, se aplica el teorema de los residuos a la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z)$$

en el abierto simplemente conexo $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Consideramos un ciclo formado por la poligonal (ver figura 4.9).

$$\Gamma(R, \varepsilon) = [R + i\varepsilon, R + iR, -R + iR, -R - iR, R - iR, R - i\varepsilon, -\varepsilon - i\varepsilon, -\varepsilon + i\varepsilon, R + i\varepsilon]$$

donde R, ε son números positivos que tomamos de forma que todos los ceros del polinomio Q queden en el interior de la poligonal de modo que $\operatorname{Ind}_{\Gamma(R,\varepsilon)}(z_j) = 1$ para $1 \leqslant j \leqslant q$. El teorema de los residuos nos dice que

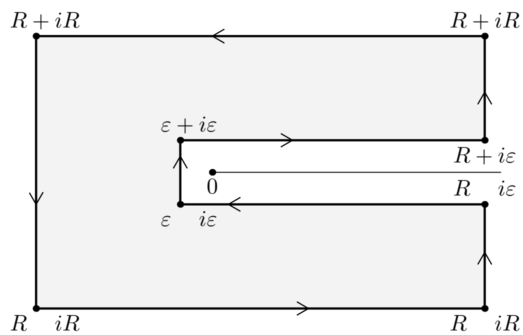


Figura 4.9: $\Gamma(R, \varepsilon)$

$$\int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z), z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, es suficiente para nuestros propósitos probar que

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int\limits_{\Gamma(R,\varepsilon)} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z)\, dz = (1 - e^{2i\pi\lambda}) \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \tag{4.22}$$

lo que se hace de forma análoga al caso antes estudiado teniendo en cuenta que ahora las integrales sobre todos los segmentos tienden a cero cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to +\infty$ con la excepción de las integrales sobre los segmentos $[-\varepsilon \pm i\varepsilon, R \pm i\varepsilon]$ en los cuales se verifica que

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int\limits_{[-\varepsilon + i\varepsilon, R + i\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(\lambda \log_0 z)\, dz = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{-\varepsilon}^{R} \frac{P(x + i\varepsilon)}{Q(x + i\varepsilon)} \exp\big(\lambda \log_0(x + i\varepsilon)\big)\, dx = \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{[-\varepsilon-i\varepsilon, R-i\varepsilon]} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp\big(\lambda \log_0 z\big)\,\mathrm{d}z = \lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{-\varepsilon}^{R} \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)} \exp\big(\lambda \log_0(x-i\varepsilon)\big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \exp\big(\lambda(\log x + 2\pi i)\big)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{2i\pi\lambda} \int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Lo que, teniendo en cuenta el sentido de recorrido de estos segmentos justifica la igualdad 4.22 y con ello la fórmula 4.21. Observa que de nuevo es la discontinuidad del argumento lo que nos permite calcular la integral.

4.40 Ejemplo. Calculemos la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x$ donde $0<\lambda<1$. Tenemos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda}} \operatorname{Res}\left(\frac{\exp(-\lambda\log_0 z)}{z+1}, -1\right) = \frac{2\pi i\,\mathrm{e}^{-i\pi\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi\lambda}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}$$

□

4.7.17. Integrales del tipo $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\lambda \frac{P(x)}{Q(x)} (\log x)^m \,\mathrm{d}x$

Se suponen las mismas hipótesis del caso precedente. Estas integrales se obtienen de las anteriores derivando respecto al parámetro λ.

4.41 Ejemplo.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1} \log x\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\pi}{\operatorname{sen}(\lambda\pi)}\right) = \frac{\pi^2\cos(\lambda\pi)}{\operatorname{sen}^2(\lambda\pi)}$$

□

4.7.18. Ejercicios propuestos

Usando el método de residuos calcula las integrales siguientes.

217. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda}}{ax+b}\,\mathrm{d}x \quad (0<\lambda<1, a>0, b>0)$

218. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{-\lambda \log x}}{ax+b}\,\mathrm{d}x \quad (0<\lambda<1, a>0, b>0)$

219. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

220. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}(x+a)^2}\,\mathrm{d}x \quad (a>0)$

221. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+2ax\cos\vartheta+a^2}\,\mathrm{d}x \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

222. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+a}\,\mathrm{d}x \quad (-1<\lambda<1, a>0)$

223. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda}}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \quad (-1<\lambda<1)$

4.7.19. Integrales del tipo $\displaystyle\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\alpha,\beta \in]-1,1[$ y $\alpha+\beta=1$ o $\alpha+\beta=-1$.

3. $Q(x)\neq 0$ para todo $a\leqslant x\leqslant b$.

En estas condiciones si $\{z_1,z_2,\dots,z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\int_a^b (x-a)^\alpha (b-x)^\beta \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\beta\pi)}\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}, z_j\right) - \\ -\frac{1}{2\,i\operatorname{sen}(\beta\pi)}\lim_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)}\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}z \tag{4.23}$$

Se entiende que si el polinomio Q es constante la suma anterior es igual a cero.

La función potencia que se integra es el valor principal

$$\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} = \exp\left(\beta\log\frac{z-b}{z-a}\right)$$

Recuerda que la función $\log\dfrac{z-b}{z-a}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Aplicamos el teorema de los residuos a la función

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}$$

en el abierto $\Omega=\mathbb{C}\setminus[a,b]$ en el ciclo $\Gamma(R,\varepsilon)$ que se representa en la figura 4.10.

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}, z_j\right)$$

Como en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de R y ε, es suficiente para nuestros propósitos probar que

$$\lim_{\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\Gamma(R,\varepsilon)} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\,i\operatorname{sen}(\beta\pi)\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x + \lim_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)}\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}\mathrm{d}z \tag{4.24}$$

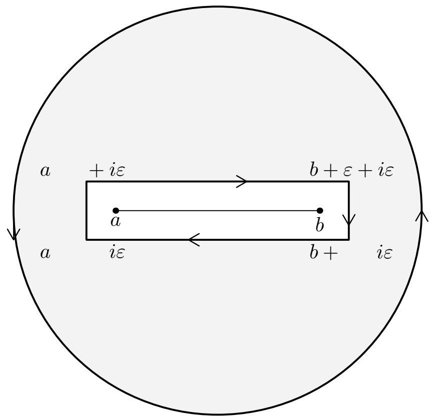


Figura 4.10: $\Gamma(R,\varepsilon)$

Se comprueba que las integrales sobre los segmentos verticales tienden a cero. Sobre los segmentos horizontales $[a-\varepsilon \pm i\varepsilon,\, b+\varepsilon \pm i\varepsilon]$ se verifica que

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{[a-\varepsilon+i\varepsilon,\, b+\varepsilon+i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x+i\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \exp\left(\beta\left(\log\frac{b-x}{x-a}+i\pi\right)\right)(x-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{i\pi\beta}\int\limits_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0}} \int\limits_{[a-\varepsilon-i\varepsilon,\, b+\varepsilon-i\varepsilon]} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a-\varepsilon}^{b+\varepsilon} f(x-i\varepsilon)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \exp\left(\beta\left(\log\frac{b-x}{x-a}-i\pi\right)\right)(x-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \mathrm{e}^{-i\pi\beta}\int\limits_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Lo que, teniendo en cuenta el sentido de recorrido de estos segmentos justifica la igualdad 4.24.

El siguiente resultado es útil para calcular este tipo de integrales.

4.42 Proposición.

(a) Supongamos que $\lim\limits_{z\to\infty} z h(z)=1$. *Entonces* $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i$.

(b) Supongamos que $\lim\limits_{z\to\infty} z h(z)=0$. *Entonces* $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

(c) Si $\lim\limits_{z\to\infty} z\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha+\beta}\right)=L\in\mathbb{C}$ *entonces*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)}\frac{P(z)}{Q(z)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}(z-a)^{\alpha+\beta}\,\mathrm{d}z = 2L\pi i$$

Demostración.

(a). Puesto que $\lim\limits_{z\to\infty} z h(z)=1$, podemos escribir $zh(z)=1+g(z)$ con $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=0$. Tenemos

$$\int_{C(0,R)} h(z)\,\mathrm{d}z=\int_{C(0,R)}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z+\int_{C(0,R)}\frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i+\int_{C(0,R)}\frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z$$

Y como

$$\left|\int_{C(0,R)}\frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant 2\pi R\,\text{máx}\left\{\frac{|g(z)|}{|z|}:|z|=R\right\}=2\pi\,\text{máx}\left\{|g(z)|:|z|=R\right\}$$

deducimos que $\lim\limits_{R\to+\infty}\displaystyle\int_{C(0,R)}\frac{g(z)}{z}\,\mathrm{d}z=0$. Lo que prueba *(a)*.

El punto *(b)* se prueba de forma análoga y *(c)* es consecuencia inmediata de *(a)* y *(b)*. ✓

4.43 Ejemplo.

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=-\frac{1}{2i\,\text{sen}(-\pi/2)}\lim_{R\to+\infty}\int_{C(0,R)}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{-1/2}\frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z=\pi$$

Donde hemos aplicado la proposición anterior para calcular el límite pues poniendo $h(z)=\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right)^{-1/2}\dfrac{1}{z-a}$ es claro que $\lim\limits_{z\to\infty} zh(z)=1$. □

Observación

Si $\lim\limits_{z\to\infty} z\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha+\beta}\right)=\infty$, el cálculo del límite en la fórmula 4.23 puede ser complicado. Una forma de proceder en estos casos consiste en elegir un entero $k\geqslant 1$ de manera que $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-k+1}\left(\dfrac{P(z)}{Q(z)}z^{\alpha+\beta}\right)=L\in\mathbb{C}$, y tener en cuenta que

$$\int_a^b (x-a)^\alpha(b-x)^\beta\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\int_a^b\frac{(x-a)^\alpha(b-x)^\beta}{(1-\delta x)^k}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

4.7.20. Ejercicios propuestos

Calcula las siguientes integrales usando el método de residuos.

224. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$

225. $\displaystyle\int_1^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(1-x)}}$

226. $\displaystyle\int_{-a}^a\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0)$

227. $\displaystyle\int_{-a}^a\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+b^2)\sqrt{a^2-x^2}}\quad(a>0,b>0)$

228. $\displaystyle\int_a^b\frac{1}{x-c}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(a<b<c)$

229. $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(cx+d)\sqrt{(x-a)(b-x)}}\quad(ac+d>0,bc+d>0)$

230. $\displaystyle\int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$

231. $\displaystyle\int_a^b\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{x-c}\quad(a<b<c)$

La técnica de calcular integrales usando el teorema de los residuos es más amplia que los casos estudiados. En los ejercicios que siguen puedes comprobarlo. En estos ejercicios se indica por lo general la función que debes integrar y el camino de integración y tú debes realizar las acotaciones apropiadas para calcular las integrales. No se trata de que apliques una fórmula sino de que en cada caso justifiques los cálculos necesarios.

4.7.21. Ejercicios propuestos

232. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon, R)$ formado por la frontera del sector circular (ver figura 4.11)

$$\left\{z\in\mathbb{C}^* : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n}\right\}$$

con $0<\varepsilon<1<R$, calcula la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

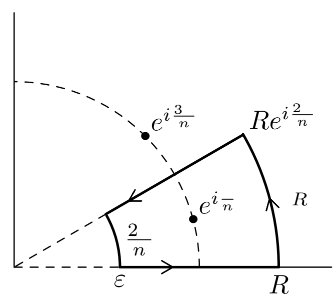


Figura 4.11: Camino $\Gamma(\varepsilon, R)$

Donde $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$, $\alpha\in\mathbb{R}$ y $n>1+\alpha>0$. Para $n=1$ y $n=2$ esta integral ya ha sido propuesta por otro método en los ejercicios 217 y 222. Pero como ese método requiere calcular los residuos en todos los polos de la función no es útil para valores grandes de n. El camino que se propone en este ejercicio tiene la ventaja de que sólo se precisa calcular el residuo en un polo. La elección del camino se hace además de forma que el denominador de la función que se integra se repita en los dos segmentos y es precisamente eso lo que permite calcular la integral.

233. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ $(R>0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real y $0<\alpha<1$.

Observa que la poligonal se ha elegido de forma que el denominador de la función que se integra se repita. Comprueba, con un cambio de variable, que esta integral puede reducirse a la del ejercicio **217**.

234. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ $(R > 0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\left(e^x+1\right)^2}\, dx = \frac{\pi(1-\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real tal que $0 < \alpha < 2$ y $\alpha \neq 1$.

Nota: Para calcular el residuo puedes usar la igualdad

$$e^z+1 = -\left(e^{z-i\pi}-1\right) = (z-i\pi)\varphi(z)$$

donde $\varphi(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(z-i\pi)^n$.

235. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R, R, R+\pi i, -R+\pi i, -R]$ $(R > 0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x+e^{-x}}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

236. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R, R, R+\pi i, -R+\pi i, -R]$ $(R > 0)$, que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{\alpha x}}{e^x+e^{-x}}\, dx = \frac{\pi^2}{4}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)}$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$. ¿Puedes deducir este resultado del ejercicio anterior?.

237. Integrando la función $z \to \dfrac{1-e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, Prueba que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

238. Integrando la función $f(z) = \dfrac{e^{3iz}-3e^{iz}+2}{z^3}$ a lo largo de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ deducir que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$$

239. Integrando la función
$$f(z) = \frac{z + i\,\mathrm{e}^{iz} - i}{z^3}$$
a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, prueba que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

240. Sea $a > 1$. Integrando a lo largo de la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ $(n \in \mathbb{N})$ la función $z \to \dfrac{z}{a - \mathrm{e}^{-iz}}$, Prueba que:
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{a} \log\left(\frac{1+a}{a}\right).$$

241. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$ $(0 < \varepsilon < R)$, que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$
donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

242. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0,\varepsilon,R)$, Prueba que, para $-1 < \alpha < 3$, $\alpha \neq 1$, se verifica:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1 + x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}(1 - \alpha)\sec\frac{\pi\alpha}{2}.$$

243. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0 < \varepsilon < 1, 2 < R$, calcula la integral:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}\,\mathrm{d}x$$

244. Prueba que, para $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, se verifica:
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1 + t + t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{1 + \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}(1 - \alpha)}{\operatorname{sen}\pi\alpha}.$$

245. Prueba, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$ $(R > 0)$, que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}} \operatorname{sen} 2x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-\pi/2}}{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}$$

246. Integrando la función

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{2iz}}{z^2(z^2+a^2)}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<a<R$, que está contenida en el semiplano superior, calcular la integral:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(x^2+a^2)}\,\mathrm{d}x$$

247. Integrando la función $f(z)=\dfrac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0;\varepsilon,\mathrm{R})$, $0<\varepsilon<1<\mathrm{R}$, prueba que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\pi\log 2.$$

248. Definamos, para cada $z\in\mathbb{C}^*$, $h(z)=\log(-iz)+i\dfrac{\pi}{2}$. Dado $\alpha\in]-1,1[$, integra la función

$$f(z)=\frac{\exp(\alpha h(z))h(z)}{1+z^2}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0;\varepsilon,R)$, $0<\varepsilon<1<R$, que está contenida en el semiplano superior para obtener el valor de las integrales

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\log(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

249. Sea n un número natural mayor o igual que 3. Integrando la función $z\mapsto\dfrac{\log z}{1+z^n}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon<|z|<R,\,0<\arg(z)<2\pi/n\},\quad(0<\varepsilon<1<R)$$

calcula las integrales

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

250. Integrando la función $z\mapsto\dfrac{z^2\log(z)}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z\in\mathbb{C}:\varepsilon<|z|<R,\,0<\arg(z)<\pi/2\},\quad(0<\varepsilon<1<R)$$

calcula las integrales

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\log(x)}{1+x^4}\,\mathrm{d}x,\qquad \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$$

251. Sea $\alpha = e^{i\pi/4}$ y $R > 0$. Integra la función $f(z) = \operatorname{cosec}(\pi z)\exp(i\pi z^2)$ a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(R) = [-1/2 - R\alpha, 1/2 - R\alpha, 1/2 + R\alpha, -1/2 + R\alpha, -1/2 - R\alpha]$ para calcular el valor de la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

252. Integrando $z \mapsto e^{-ax^2}$ a lo largo de la poligonal $\Gamma(R) = [-R, R, R + i\frac{2b}{a}, -R + i\frac{2b}{a}, -R]$ $(R > 0)$, calcula las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\operatorname{sen}(bx)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx \quad (a > 0, b > 0)$$

253. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon, R)$ que se indica en la figura 4.12, calcula la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{e^{2\pi x} - 1}\,dx$$

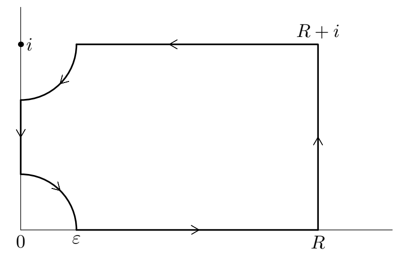


Figura 4.12: Camino $\Gamma(\varepsilon, R)$

254. Integrando una conveniente función compleja a lo largo del camino $\Gamma(\varepsilon, R)$ que se indica en la figura 4.13, calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh}(ax)}{\operatorname{senh}(\pi x)}\,dx \quad (a > 0, a \neq \pi)$$

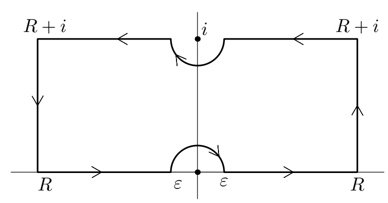


Figura 4.13: Camino $\Gamma(\varepsilon, R)$

255. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(n) = [-n, n, n + 2in, -n + 2in, -n]$, calcula la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)\cosh(\pi x/2)}$$

256. Calcula, haciendo uso del teorema de los residuos, la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x + 1)(e^x + 2)}\,dx \quad (0 < a < 2)$$

257. Calcula las integrales

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\lambda \log x}{1-x}\,\mathrm{d}x \quad (-1<\lambda<0)$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh bx}\cos cx\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{\cosh bx}\operatorname{sen} cx\,\mathrm{d}x \quad (0<a<b)$

258. Naturalmente, el teorema de los residuos sirve para calcular integrales complejas.

a) Calcula el límite $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{[1-iR,1+iR]} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+2)^3}\,\mathrm{d}z$.

b) Calcula la integral $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{6z^2-5z+1}}$.

259. Sea Ω un dominio simplemente conexo, $\mathcal{S}$ un conjunto de puntos aislados en Ω y $f\in\mathcal{H}(\Omega\setminus\mathcal{S})$. Justifica que f tiene una primitiva en $\Omega\setminus\mathcal{S}$ si, y sólo si, $\operatorname{Res}(f(z),w)=0$ para todo $w\in\mathcal{S}$.

260. Sea

$$\operatorname{cotg}(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

el desarrollo de Laurent de $\operatorname{cotg}(\pi z)$ en el anillo $A(0;1,2)$. Calcula los coeficientes a_n para n entero negativo.

261. Prueba que la función

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

tiene n ceros distintos $z_1, z_2, \dots, z_n$ que verifican la igualdad

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_j^q} = 0 \quad (2\leqslant q\leqslant n)$$

Sugerencia: considera la integral $\displaystyle\int_{C(0,R)} \frac{z^k}{f(z)}\,\mathrm{d}z \quad (0\leqslant k\leqslant n-2)$.

262. a) Prueba que hay una única función $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\overline{D(0,1)})$ tal que $f(z)^2=z^2+z+1$ para $|z|>1$ y $f(x)>0$ para $x>1$.

b) Calcula la integral
$$\int\limits_{C(0,R)}\frac{1}{f(z)}\,\mathrm{d}z \quad (R>1)$$
donde $f(z)$ es la función obtenida en el apartado anterior.

263. Sea f una función holomorfa e inyectiva en $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ verificando que $f(z)\neq 0$ para todo $z\in\mathbb{C}^*$. Pruébese que hay un número complejo $\alpha\neq 0$ tal que o bien $f(z)=\alpha z$ $\forall z\in\mathbb{C}^*$, o bien $f(z)=\dfrac{\alpha}{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}^*$.

4.8. Aplicación del teorema de los residuos para sumar series

Las aplicaciones del teorema de los residuos para sumar series se basan en la siguiente idea. Supongamos que f es una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus P(f)$ donde $P(f)$ es un conjunto finito de puntos que son polos de f. Admitiremos la posibilidad de que algún polo de f sea un número entero. Sea g una función holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ que en cada número entero tiene un polo simple. Sea Γ_n un camino cerrado que rodee a los enteros $\{-n,-n+1,\dots,-1,0,1,\dots,n-1,n\}$ y a los polos de f una sola vez dejando fuera a los demás enteros. Teniendo en cuenta que si k es un entero que no es un polo de f se verifica que $\operatorname{Res}(f(z)g(z),k)=f(k)\operatorname{Res}(g(z),k)$, el teorema de los residuos nos dice que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_n} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\notin P(f)}}\operatorname{Res}(f(z)g(z),k)\operatorname{Ind}_{\Gamma_n}(k)+2\pi i\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}(f(z)g(z),w)=\\ &=2\pi i\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k)\operatorname{Res}(g(z),k)+2\pi i\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}(f(z)g(z),w)\end{aligned}$$

Supongamos que
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma_n} f(z)g(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{4.25}$$
entonces obtenemos
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k)\operatorname{Res}(g(z),k)=-\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}(f(z)g(z),w) \tag{4.26}$$

Las elecciones usuales para la función g son

$$g(z)=\frac{\pi}{\cos\pi z}\operatorname{sen}\pi z=\pi\operatorname{cotg}\pi z; \quad g(z)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z}=\pi\operatorname{cosec}\pi z$$

funciones que tienen polos simples en los enteros siendo

$$\operatorname{Res}(\pi\operatorname{cotg}\pi z,k)=1, \quad \operatorname{Res}(\pi\operatorname{cosec}\pi z,k)=(-1)^k \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Particularizando para estos casos la igualdad 4.26, supuesto que se cumpla la condición 4.25, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} f(k) = -\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}\big(\pi f(z)\operatorname{cotg}\pi z,w\big) \tag{4.27}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ k\notin P(f)}}^{n} (-1)^k f(k) = -\sum_{w\in P(f)}\operatorname{Res}\big(\pi f(z)\operatorname{cosec}\pi z,w\big) \tag{4.28}$$

A continuación vamos a imponer a la función f condiciones suficientes para que se cumpla la condición 4.25 para dichas elecciones de la función g.

Como camino de integración Γ_n vamos a tomar la poligonal (es un cuadrado)

$$\Gamma_n=[(n+\frac{1}{2})(-1-i),(n+\frac{1}{2})(1-i),(n+\frac{1}{2})(1+i),(n+\frac{1}{2})(-1+i),(n+\frac{1}{2})(-1-i)].$$

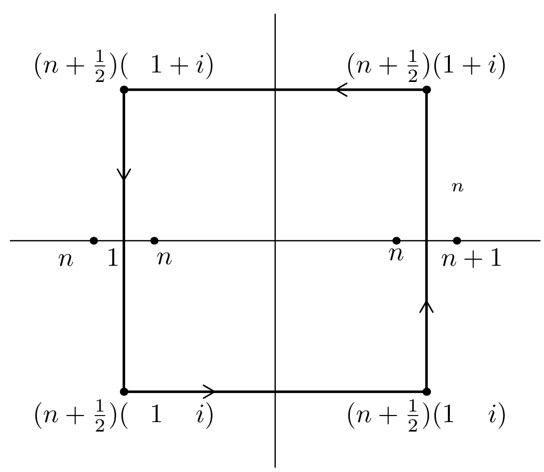


Figura 4.14: Camino Γ_n

4.44 Proposición. *Para todo* $z \in \Gamma_n^*$ *se verifica que* $|\operatorname{cotg} \pi z| < 2$ *y* $|\operatorname{cosec} \pi z| < 2$.

Demostración. Supongamos que $z = n + \frac{1}{2} + iy$. Entonces

$$\operatorname{cotg}(\pi z) = i\frac{e^{2\pi i z}+1}{e^{2\pi i z}-1} = i\frac{e^{\pi i - 2\pi y}+1}{e^{\pi i - 2\pi y}-1}$$
$$\operatorname{cosec}(\pi z) = \frac{2i}{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}} = \frac{2i\,e^{i\pi z}}{e^{2i\pi z}-1} = \frac{2i\,e^{in(\pi+1/2)-\pi y}}{e^{i\pi-2\pi y}-1}$$

por lo que

$$|\operatorname{cotg}(\pi z)| = \frac{1-e^{-2\pi y}}{1+e^{-2\pi y}} < 1$$
$$|\operatorname{cosec}(\pi z)| = \frac{2\,e^{-\pi y}}{1+e^{-\pi y}} < 2$$

Análogamente, si $z = x + i(n + \frac{1}{2})$ se obtiene que

$$|\operatorname{cotg}(\pi z)| \leqslant \frac{1+e^{-\pi(2n+1)}}{1-e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} < 2$$
$$|\operatorname{cosec}(\pi z)| \leqslant \frac{2\,e^{-\pi(n+1/2)}}{1-e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{2\,e^{-\pi/2}}{1-e^{-\pi}} < 1$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{cosec} z$ son funciones impares, estas cotas también son válidas para los otros dos lados de Γ_n. ✓

4.45 Proposición. *Se verifica que*

$$\int_{\Gamma_n} \frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}\,dz = \int_{\Gamma_n} \frac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}\,dz = 0$$

Demostración. En efecto, como las funciones $\dfrac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}$ y $\dfrac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}$ son pares y tienen un polo de orden dos en cero, deducimos que su residuo en cero es igual a 0. Los residuos en los demás polos se anulan dos a dos porque

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{1}{k}, \qquad \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{cosec}(\pi z)}{z}, k\right) = \frac{(-1)^k}{k}$$

y en consecuencia sus integrales en Γ_n son nulas en virtud del teorema de los residuos. ☑

4.46 Proposición. *Supongamos que hay números $M>0$ y $R>0$ tales que para $|z|\geqslant R$ se verifica que $|zf(z)|\leqslant M$. Entonces se verifica que*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} f(z)\operatorname{cotg}(\pi z)\,\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma_n} f(z)\operatorname{cosec}(\pi z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Demostración. Pongamos $h(z)=\dfrac{f(1/z)}{z}$. La hipótesis hecha implica que h está acotada en el disco $D(0,1/R)$ y, por tanto, h es regular en 0. Definiendo $h(0)=\lim_{z\to 0}h(z)$, se tiene que h es holomorfa en el disco $D(0,1/R)$ por lo que podemos escribir

$$h(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n \qquad z\in D(0,1/R)$$

Deducimos que

$$f(1/z)-c_0 z = z^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{n-1} \qquad z\in D(0,1/R)\setminus\{0\}$$

Como la función $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{n-1}$ es continua en $D(0,1/R)$ deducimos que está acotada en compactos. Por tanto existe $K>0$ tal que $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^{n-1}\right|\leqslant K$ para todo $z\in\overline{D}(0,1/2R)$. Deducimos que

$$\left|f(z)-\frac{c_0}{z}\right|\leqslant\frac{K}{|z|^2} \qquad |z|\geqslant 2R \tag{4.29}$$

Tenemos, en virtud de la proposición 4.45, que

$$\int_{\Gamma_n}\operatorname{cotg}(\pi z)\,f(z)dfz=\int_{\Gamma_n}\operatorname{cotg}(\pi z)\left(f(z)-\frac{c_0}{z}\right)\mathrm{d}z+c_0\int_{\Gamma_n}\frac{\operatorname{cotg}(\pi z)}{z}\,\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_n}\operatorname{cotg}(\pi z)\left(f(z)-\frac{c_0}{z}\right)\mathrm{d}z$$

Por la proposición 4.44 y la desigualdad 4.29, deducimos que para $n>2R$ se verifica que

$$\left|\int_{\Gamma_n}\operatorname{cotg}(\pi z)\,f(z)dfz\right|=\left|\int_{\Gamma_n}\operatorname{cotg}(\pi z)\left(f(z)-\frac{c_0}{z}\right)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{2K}{(n+1/2)^2}8(n+1/2)$$

La misma acotación es válida cambiando $\operatorname{cotg}(\pi z)$ por $\operatorname{cosec}(\pi z)$. De estas acotaciones se sigue enseguida la afirmación del enunciado. ☑

4.8.1. Series del tipo $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+1$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=-n\\ Q(k)\neq 0}}^{n} \frac{P(k)}{Q(k)} = -\sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg}(\pi z)\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)} \tag{4.30}$$

Esto es consecuencia directa de los resultados anteriores pues en las hipótesis hechas se verifica que $\lim\limits_{z\to\infty} z\dfrac{P(z)}{Q(z)} = L \in \mathbb{C}$ y, por tanto, se satisface la hipótesis de la proposición 4.46.

Es interesante observar que la existencia del límite en 4.30 no implica que la serie sea convergente. Naturalmente, que la serie $\displaystyle\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ Q(k)\neq 0}} \frac{P(k)}{Q(k)}$ sea convergente quiere decir que existe el límite

$$\lim_{\substack{q\to\infty\\ p\to\infty}} \sum_{\substack{k=-p\\ Q(k)\neq 0}}^{q} \frac{P(k)}{Q(k)}$$

Por otra parte, la condición $\operatorname{grado}(Q) \geqslant \operatorname{grado}(P)+2$ garantiza la convergencia absoluta de la serie.

4.47 Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{k^2+\alpha^2} = -\operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg} \pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, i\alpha\right) - \operatorname{Res}\left(\pi \operatorname{cotg} \pi z \frac{1}{z^2+\alpha^2}, -i\alpha\right) =$$
$$= \frac{\pi}{\alpha}\, \frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}$$

Como la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{k^2+\alpha^2}$ es convergente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{k^2+\alpha^2}=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^2}$$

de donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{\alpha\pi}+\mathrm{e}^{-\alpha\pi}}{\mathrm{e}^{\alpha\pi}-\mathrm{e}^{-\alpha\pi}}-\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

En virtud del criterio de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2+\alpha^2}$ es uniformemente convergente para $\alpha\in\mathbb{R}$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{\alpha\pi}+\mathrm{e}^{-\alpha\pi}}{\mathrm{e}^{\alpha\pi}-\mathrm{e}^{-\alpha\pi}}-\frac{1}{\alpha^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

donde el último límite puede calcularse por la regla de L'Hôpital. □

4.8.2. Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.

2. $\operatorname{grado}(Q)\geqslant\operatorname{grado}(P)+1$.

En estas condiciones si $\{z_1,z_2,\dots,z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\ Q(k)\neq 0}}^{n}(-1)^k\frac{P(k)}{Q(k)}=-\sum_{j=1}^{q}\operatorname{Res}\left(\pi\operatorname{cosec}(\pi z)\frac{P(z)}{Q(z)},z_j\right)}\tag{4.31}$$

Es interesante observar que en este caso las hipótesis hechas garantizan, por el criterio de Dirichlet, la convergencia de la serie aunque no necesariamente la convergencia absoluta.

4.48 Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\operatorname{Res}\left(\pi\operatorname{cosec}(\pi z)\frac{1}{z^2},0\right)=-\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}z^3\left(\pi\operatorname{cosec}(\pi z)\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{\pi^2}{6}$$

De donde se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

□

4.8.3. Ejercicios propuestos

264. Justifica que, excepto para ciertos valores de a (que se precisarán en cada caso), se verifican las siguientes igualdades.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\coth\pi a-\frac{1}{a^2}\right);$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4-a^4}=\frac{1}{2a^4}-\frac{\pi}{4a^3}(\operatorname{cotg}\pi a+\coth\pi a);$

c) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n-a)^2}=\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2\pi a};$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{2a\operatorname{senh}\pi a};$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4-a^4}=\frac{1}{2a^4}-\frac{\pi}{4a^3}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\pi a}+\frac{1}{\operatorname{senh}\pi a}\right).$

265. Integrando la función $z\to\dfrac{\pi\operatorname{sen}az}{z^3\operatorname{sen}\pi z}$ a lo largo de la frontera del cuadrado cuyos vértices son $(\pm 1\pm i)(n+\frac{1}{2})$, donde $n\in\mathbb{N}$, calcula la suma de las series

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen}an}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$

4.9. Principio del argumento. Teorema de Rouché

En esta sección vamos a obtener dos importantes consecuencias del teorema de los residuos que proporcionan herramientas útiles para el estudio de los ceros de una función holomorfa. En lo que sigue vamos a considerar funciones cuyas únicas singularidades son polos.

4.49 Definición. Diremos que una función f es *meromorfa* en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si las únicas posibles singularidades de f en Ω son polos, es decir, existe un conjunto $P \subset \Omega$ de puntos aislados en Ω tal que f es holomorfa en $\Omega \setminus P$ y f tiene un polo en cada punto de P. Notaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ el conjunto de las funciones meromorfas en Ω.

La palabra "meromorfa" significa "de forma racional" porque las funciones meromorfas se comportan de forma parecida a las funciones racionales. De hecho, los ejemplos más inmediatos de funciones meromorfas son las funciones racionales las cuales son funciones meromorfas en $\mathbb{C}$. Naturalmente, toda función holomorfa es también una función meromorfa. Más aún, el cociente f/g de dos funciones holomorfas en un abierto Ω, supuesto que g no es idénticamente nula en ninguna componente conexa de Ω, es una función meromorfa en Ω.

4.50 Principio de identidad para funciones meromorfas. *Una función meromorfa en un dominio cuyos ceros tienen algún punto de acumulación en el dominio es idénticamente nula.*

Demostración. Sea Ω un dominio y f una función meromorfa en Ω. Notemos $Z(f)$ el conjunto de las ceros y $P(f)$ el conjunto de los polos de f en Ω. Como $P(f)$ es un conjunto de puntos aislados en Ω, el conjunto $\Omega_1 = \Omega \setminus P(f)$ es abierto. Supongamos que $Z(f)$ tiene algún punto de acumulación en Ω. Es evidente que un punto de acumulación de ceros también es un cero de f por lo que, en la hipótesis hecha, deberá ser $Z(f)' \cap \Omega_1 \neq \emptyset$. Como f es holomorfa en Ω_1, si probamos que dicho conjunto es un dominio, el principio de identidad para funciones holomorfas implicará que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega_1$, pero entonces es claro que tiene que ser $P(f) = \emptyset$ y, por tanto, habremos probado que f es idénticamente nula en Ω.

Supongamos que $\Omega_1 = A \cup B$ siendo A y B conjuntos abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$. La idea es extender esta partición de Ω_1 a una partición por abiertos de Ω. Para ello, definimos los conjuntos

$$\widehat{A} = A \cup \{z \in P(f) : \exists r > 0, D(z,r) \setminus \{z\} \subset A\}, \quad \widehat{B} = B \cup \{z \in P(f) : \exists r > 0, D(z,r) \setminus \{z\} \subset B\}$$

es inmediato que ambos conjuntos son abiertos. Además, si $z \in P(f)$, por ser $P(f)$ un conjunto de puntos aislados en Ω, hay algún $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y $D(a,r) \cap P(f) = \{z\}$. El conjunto $D(z,r) \setminus \{z\}$ está contenido en Ω_1 y, como dicho conjunto es conexo, deberá ocurrir que o bien está contenido en A o bien está contenido en B. En consecuencia $\widehat{A} \cup \widehat{B} = \Omega$ y $\widehat{A} \cap \widehat{B} = \emptyset$. Como Ω es un dominio alguno de ellos debe ser vacío y, por tanto, alguno de los conjuntos A o B tiene que ser vacío. $\boxed{\checkmark}$

Este resultado permite extender para funciones meromorfas las propiedades de los ceros de las funciones holomorfas. En particular, *los ceros de una función meromorfa y no idénticamente nula, f, en un dominio, Ω, son un conjunto de puntos aislados en* Ω. En consecuencia, si a es un cero de f existe un disco $D(a,r) \subset \Omega$ tal que f es holomorfa en $D(a,r)$ y, por tanto, *el concepto de orden de un cero para funciones holomorfas (que es un concepto local) se aplica con igual significado para funciones meromorfas.* En particular, se verifica el siguiente resultado.

4.51 Corolario. *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y supongamos que f tiene en $a \in \Omega$ un cero de orden m. Entonces existe una función g meromorfa en Ω cuyos polos son los mismos de f tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$ que no sea polo de f.*

4.52 Principio del argumento generalizado. *Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y g una función holomorfa en Ω. Sea $P(f)$ el conjunto de los polos y $Z(f)$ el conjunto de los ceros de f en Ω.*
Para $b\in P(f)$ notaremos $n(b)$ el orden del polo de f en b, y para $a\in Z(f)$ notaremos $m(a)$ el orden del cero de f en a. Si Γ es un ciclo en $\Omega\setminus(P(f)\cup Z(f))$ que es nulhomólogo con respecto a Ω se verifica que:

- *El conjunto $\{w\in Z(f)\cup P(f):\operatorname{Ind}_\Gamma(w)\neq 0\}$ es finito.*
- $$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(a)m(a)g(a)-\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(b)n(b)g(b)} \tag{4.32}$$

Demostración. Pongamos $S=Z(f)\cup P(f)$ que es un conjunto de puntos aislados en Ω. Aplicamos el Teorema de los residuos a la función

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)\qquad(z\in\Omega\setminus S)$$

que es holomorfa en $\Omega\setminus S$. Dicho teorema nos dice que el conjunto $\{w\in S:\operatorname{Ind}_\Gamma(w)\neq 0\}$ es finito y además

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma h(z)\,\mathrm{d}z&=\sum_{w\in S}\operatorname{Ind}_\Gamma(w)\operatorname{Res}(h(z),w)=\\&=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(a)\operatorname{Res}(h(z),a)+\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(b)\operatorname{Res}(h(z),b)\end{aligned}$$

Calculemos los residuos. Si $a\in Z(f)$ hay un disco $D(a,r)\subset\Omega$ tal que $D(a,r)\cap S=\{a\}$. Por tanto, existe una función $\varphi\in\mathcal{H}(D(a,r))$ tal que $\varphi(a)\neq 0$ y $f(z)=(z-a)^{m(a)}\varphi(z)$ para todo $z\in D(a,r)$. Por tanto

$$f'(z)=m(a)(z-a)^{m(a)-1}\varphi(z)+(z-a)^{m(a)}\varphi'(z)\quad z\in D(a,r).$$

y en consecuencia

$$h(z)=\frac{m(a)}{(z-a)}g(z)+\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}g(z)\qquad z\in D(a,r)\setminus\{a\}$$

Deducimos que $\lim\limits_{z\to a}(z-a)h(z)=m(a)g(a)$ lo que implica que $\operatorname{Res}(h(z),a)=m(a)g(a)$.

Si $b\in P$, entonces existe un disco $D(b,r)\subset\Omega$ tal que $D(b,r)\cap S=\{b\}$. Por la caracterización de los polos sabemos que hay una función ψ holomorfa en $D(b,r)$ con $\psi(b)\neq 0$ tal que $f(z)=\dfrac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)}}$ para todo $z\in D(b,r)\setminus\{b\}$. Tomando r suficientemente pequeño podemos suponer que $\psi(z)\neq 0$ para todo $z\in D(b,r)$. Tenemos que

$$f'(z)=-n(b)\frac{\psi(z)}{(z-b)^{n(b)+1}}+\frac{\psi'(z)}{(z-b)^{n(b)}}$$

por tanto,

$$h(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}g(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}g(z)+\frac{-n(b)}{z-b}g(z)$$

y deducimos que $\lim\limits_{z\to b}(z-b)h(z)=-n(b)g(b)$, lo que implica que $\operatorname{Res}(h(z),b)=-n(b)g(b)$. ☑

Si particularizamos la igualdad 4.32 tomando como g la función constante $g(z)=1$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in Z(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(a)m(a)-\sum_{b\in P(f)}\operatorname{Ind}_\Gamma(b)n(b)$$

Si ahora suponemos que para todo $z\in\Omega$ es $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=0$ o $\operatorname{Ind}_\Gamma=1$ y definimos el conjunto $U=\{z\in\Omega\setminus\Gamma^*:\operatorname{Ind}_\Gamma(z)=1\}$, podemos escribir la igualdad anterior en la forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\sum_{a\in Z(f)\cap U}m(a)-\sum_{b\in P(f)\cap U}n(b)=$$
$$=\text{número de ceros de } f \text{ en } U \text{ - número de polos de } f \text{ en } U$$

donde cada cero y cada polo se cuenta tantas veces como indica su orden.

Veamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)$$

Es suficiente probar esta igualdad para un camino cerrado $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$. Por la definición de integral a lo largo de un camino tenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\operatorname{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$$

Hemos probado así el siguiente teorema.

4.53 Principio del argumento. *Sea Ω un dominio, f una función meromorfa no idénticamente nula en Ω y Γ un ciclo en Ω nulhomólogo con respecto a Ω y que no pasa por ningún polo ni por ningún cero de f. Supongamos, además, que para todo $z\in\Omega\setminus\Gamma^*$ se verifica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)\in\{0,1\}$ y definamos $U=\{z\in\Omega\setminus\Gamma^* : \operatorname{Ind}_\Gamma(z)=1\}$. Entonces*

$$\boxed{\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N_0-N_p} \tag{4.33}$$

donde N_0 es el número de ceros de f en U y N_p es el número de polos de f en U contando cada cero y cada polo tantas veces como su orden.
En particular, si f es holomorfa en Ω y Γ es un camino cerrado, se tiene que

$$\boxed{\operatorname{Ind}_{f\circ\Gamma}(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N_0} \tag{4.34}$$

Es decir, el número de ceros (contando cada cero tantas veces como su orden) de f en U (el “interior” de Γ) es igual al número de veces que el camino $f\circ\Gamma$ rodea al origen.

Ceros de un polinomio en una región angular

4.54 Proposición. *Sea P una función polinómica con coeficientes complejos de grado $n\geqslant 2$, y sea U la región angular*

$$U=\{z\in\mathbb{C}^* : \alpha<\arg z<\beta\}.$$

donde $-\pi\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$, y supongamos que el polinomio P no se anula en la frontera de U. Entonces el número de ceros de P en U, contando cada cero tantas veces como su orden, viene dado por

$$\boxed{N_0(U)=\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(\lim_{t\to+\infty}\vartheta(t)-\lim_{t\to-\infty}\vartheta(t)\right)} \tag{4.35}$$

donde $\vartheta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es un argumento continuo de la función $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por

$$\varphi(t) = \begin{cases} P\left(-t\,\mathrm{e}^{i\beta}\right) & \text{para} \quad t \leqslant 0 \\ P\left(t\,\mathrm{e}^{i\alpha}\right) & \text{para} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Demostración. Sea $K > 0$ tal que $P(z) \neq 0$ para $|z| \geqslant K$. Consideremos, para $R > K$, el camino cerrado (ver figura 4.15) $\Gamma_R = \gamma_R \dot{+} \sigma_R$ donde

$$\gamma_R : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad \gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it},$$

$$\sigma_R : [-R, R] \to \mathbb{C}, \quad \sigma_R(t) = \begin{cases} -t\,\mathrm{e}^{i\beta} & \text{para} \quad -R \leqslant t \leqslant 0 \\ t\,\mathrm{e}^{i\alpha} & \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant R \end{cases}$$

Observa que, por ser $R > K$, los ceros de P en U están todos en $U_R = U \cap D(0, R)$. Por el

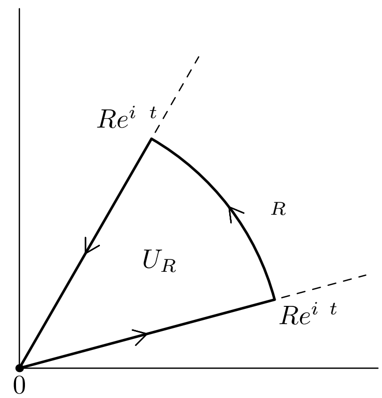


Figura 4.15: Camino Γ_R

principio del Argumento tenemos que

$$N_0(U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z \tag{4.36}$$

Calcularemos el límite para $R \to +\infty$ de las dos últimas integrales en esta igualdad. Teniendo en cuenta que P es un polinomio de grado n, podemos escribir

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{n}{z} + \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}$$

donde P_0 y Q_0 son polinomios verificando que grado Q_0 - grado $P_0 \geqslant 2$.

Por tanto, existen números $M > 0$, $R_0 > 0$ tales que

$$\left| \frac{P_0(z)}{Q_0(z)} \right| \leqslant \frac{M}{|z|^2} \quad \text{siempre que} \quad |z| \geqslant R_0$$

Por tanto, para $R \geqslant R_0$ se tiene que

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} \frac{P_0(z)}{Q_0(z)}\,\mathrm{d}z \right| \leqslant R(\beta-\alpha)\frac{M}{R^2}$$

Además, para todo $R>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{n}{z}\,\mathrm{d}z = \frac{n}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{iR\,\mathrm{e}^{it}}{R\,\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{d}t = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}$$

Deducimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}$$

Calcularemos ahora el límite para $R\to+\infty$ de la última integral de la igualdad 4.36. Observa que para $t\in[-R,R]$ se tiene que $\varphi(t) = P\big(\sigma_R(t)\big)$, por lo que la función

$$L(t) = \log|P(\sigma_R(t))| + i\vartheta(t) \quad t\in[-R,R]$$

es un logaritmo continuo (y, por tanto, derivable) de $P\circ\sigma_R$. Tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R} \frac{P'(\sigma_R(t))\sigma_R'(t)}{P\big(\sigma_R(t)\big)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R} L'_R(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}[L(R)-L(-R)] =$$
$$= \log\left|\frac{P\big(\sigma_R(R)\big)}{P\big(\sigma_R(-R)\big)}\right| + i(\vartheta_R(R)-\vartheta_R(-R)) = \log\left|\frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)}\right| + i(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

Evaluando P en los puntos $R\,\mathrm{e}^{i\alpha}$, $R\,\mathrm{e}^{i\beta}$ se tiene

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)} = \mathrm{e}^{in(\alpha-\beta)} \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \log\left|\frac{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\alpha}\big)}{P\big(R\,\mathrm{e}^{i\beta}\big)}\right| = 0$$

Deducimos que

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

Por tanto, tomando límites en la igualdad 4.36, deducimos que el número de ceros de P en U viene dado por

$$N_0 = \frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}(\vartheta(R)-\vartheta(-R))$$

$\boxed{\checkmark}$

4.55 Ciclo que rodea a un compacto. *Sea Ω un abierto y K un subconjunto compacto de Ω, entonces existe un ciclo Γ verificando:*
(a) $\Gamma^* \subset \Omega \setminus K$.
(b) Γ *es nulhomólogo con respecto a* Ω.
(c) $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \{0,1\}$ *para todo* $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$.
(d) $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$ *para todo* $z \in K$.

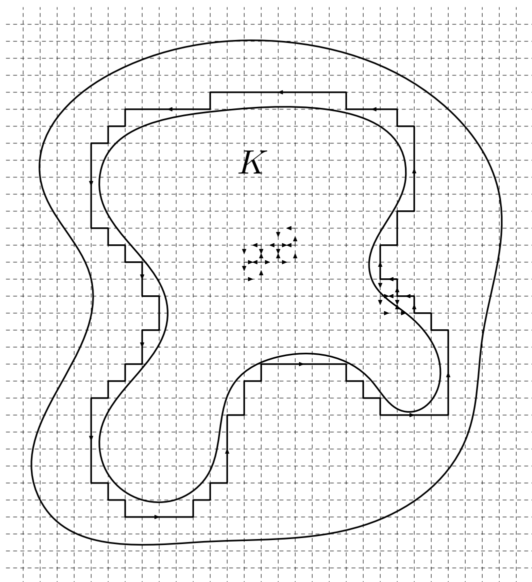


Figura 4.16: Ciclo que rodea un compacto

Demostración. Si $\Omega = \mathbb{C}$ podemos tomar R suficientemente grande para que $K \subset D(0,R)$ con lo cual $\Gamma = C(0,R)$ verifica las cuatro propiedades del enunciado. Supondremos, pues, que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\sqrt{2}\delta$ sea menor que la distancia de K al complemento de Ω. Consideremos las familias de rectas verticales $x = m\delta$, y horizontales $y = n\delta$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, y la cuadrícula en el plano formada por los cuadrados de lado δ obtenidos como intersección de dichas familias de rectas (ver la figura 4.16). Notaremos $Q_{(m,n)}$ al cuadrado (cerrado) cuyo vértice inferior izquierdo es $m\delta + in\delta$.

$$Q_{(m,n)} = \{z \in \mathbb{C} : m\delta \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant (m+1)\delta,\ n\delta \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant (n+1)\delta\}$$

Si $Q_{(m,n)} \cap K \neq \emptyset$ entonces, como el diámetro de $Q_{(m,n)}$ es igual a $\sqrt{2}\delta$ se tiene, por la elección hecha de δ, que $Q_{(m,n)} \subset \Omega$. Como K es compacto sólo hay un número finito de cuadrados $Q_{(m,n)}$ cuya intersección con K no es vacía. Sean éstos $Q_1, Q_2, \dots, Q_p$ donde $Q_j = Q_{(m_j,n_j)}$. Es claro que dos cuadrados o bien son disjuntos o bien se cortan en la frontera porque tienen un lado común o un vértice común. Pongamos

$$\begin{aligned}
\gamma_{j,1} &= [m_j\delta + i n_j\delta, (m_j+1)\delta + i n_j\delta] \\
\gamma_{j,2} &= [(m_j+1)\delta + i n_j\delta, (m_j+1)\delta + i(n_j+1)\delta] \\
\gamma_{j,3} &= [(m_j+1)\delta + i(n_j+1)\delta, m_j\delta + i(n_j+1)\delta] \\
\gamma_{j,4} &= [m_j\delta + i(n_j+1)\delta, m_j\delta + i n_j\delta] \\
\gamma_j &= \gamma_{j,1} \dotplus \gamma_{j,2} \dotplus \gamma_{j,3} \dotplus \gamma_{j,4}
\end{aligned}$$

Observa que γ_j es la poligonal formada por la frontera de Q_j. Pongamos $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j$.

Usaremos en lo que sigue que $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = 1$ si z está en el interior de Q_j y $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$ si z no pertenece a Q_j (ver ejercicio **91**). El ciclo Γ_0 tiene las propiedades siguientes.

(a') $\Gamma_0^* \subset \Omega$.

(b') Γ_0 es nulhomólogo respecto de Ω. Pues si $z \notin \Omega$ se tiene que $z \notin \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$. Por lo que $\operatorname{Ind}_{\gamma_j}(z) = 0$ para todo $j = 1, 2 \dots, p$ lo que implica que $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$.

(c') Si $z \in \Omega \setminus \Gamma_0^*$ entonces si $z \notin \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$ se tiene que $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$; y si $z \in \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$ se tiene que z está en el interior de un único Q_j en cuyo caso es $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 1$. Por tanto se verifica que $\operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) \in \{0, 1\}$ para todo $z \in \Omega \setminus \Gamma_0$.

Observa que si dos cuadrados tienen un lado común, el segmento formado por dicho lado está recorrido en un sentido en un cuadrado y en sentido opuesto en el otro.

Podemos escribir $\Gamma_0 = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{4} \gamma_{j,k}$. Eliminemos de Γ_0 aquellos intervalos $\gamma_{j,k}$ cuyos opuestos también pertenecen a Γ_0 y sea Γ el ciclo así obtenido. Observa que los ciclos Γ_0 y Γ son equivalentes en el sentido de la definición 4.6. Comprobemos que Γ verifica las cuatro propiedades del enunciado.

(a) Tenemos que $\Gamma^* \subset \Gamma_0^* \subset \Omega$. Además, si un segmento de Γ_0 corta a K dicho segmento pertenece a dos cuadrados que cortan a K por lo que dicho segmento y su opuesto pertenecen a Γ_0 por lo que se han eliminado y no pertenecen a Γ. Es decir $\Gamma^* \cap K = \emptyset$. Por tanto $\Gamma^* \subset \Omega \setminus K$.

(b) Si $z \notin \Omega$ tenemos, por ser Γ y Γ_0 ciclos equivalentes, que $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$. Luego Γ es nulhomólogo respecto de Ω.

(c) Sea $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$. Probaremos que $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) \in \{0, 1\}$. Consideremos varios casos.

I) $z \notin \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$. Entonces $z \in \Omega \setminus \Gamma_0^*$ y $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 0$.

II) z está en el interior de uno de los cuadrados Q_j. Entonces $z \in \Omega \setminus \Gamma_0^*$ y $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_0}(z) = 1$.

III) z está en la frontera de alguno de los cuadrados Q_j, es decir, z está en alguno de los segmentos que se han suprimido en Γ_0. Sea, por ejemplo $z \in \operatorname{Fr} Q_k$. Entonces como $\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 1$ para todo w en el interior de Q_k y el índice es una función continua, deducimos que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$.

(d) Finalmente, si $z \in K$ entonces $z \in \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$ por lo que no puede darse I) y, por tanto, $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1$. $\boxed{\checkmark}$

4.56 Teorema de Rouché *Sea Ω un dominio acotado, f y g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad (z \in \operatorname{Fr} \Omega) \tag{4.37}$$

para todo z en la frontera de Ω. Entonces, contando cada cero tantas veces como su orden, se verifica que f y g tienen el mismo número de ceros en Ω.

Demostración. Observa que la desigualdad 4.37 implica que ni f ni g pueden anularse en la frontera de Ω. Dicha desigualdad, y la continuidad de f y g en $\overline{\Omega}$, implican que ni f ni g pueden ser idénticamente nulas en Ω. Por el principio de identidad y por ser $\overline{\Omega}$ compacto, deducimos que el número de ceros de f y de g en Ω es finito.

Sea K el conjunto

$$K = \{z \in \overline{\Omega} : |f(z) - g(z)| = |f(z)| + |g(z)|\}$$

Observa que K es un conjunto cerrado y acotado y por tanto es compacto. Además, en virtud de la desigualdad 4.37, se tiene que $K \subset \Omega$. Es evidente que los ceros de f y de g están en K. Sea Γ el ciclo que nos proporciona el lema anterior para el compacto K en el abierto Ω.

Sea $U=\{z\in\Omega\setminus\Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z)=1\}$. Sabemos que $K\subset U$ por lo que los ceros de f y de g en Ω están todos en U. Por el principio del argumento deducimos que

$$N_0(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(número de ceros de } f \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

$$N_0(g)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,\mathrm{d}z \qquad \text{(número de ceros de } g \text{ en } \Omega \text{ contando multiplicidades)}$$

Para $z\in\Omega\setminus K$ se verifica que

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$$

lo que, según sabemos, en virtud de la desigualdad 1.4, equivale a que $\dfrac{f(z)}{g(z)}\notin\mathbb{R}_o^-$. En consecuencia la función $\varphi:\Omega\setminus K\to\mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z)=\log\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) \qquad z\in\Omega\setminus K.$$

es holomorfa en $\Omega\setminus K$. Puesto que

$$\varphi'(z)=\frac{(f'(z)g(z)-f(z)g'(z))g(z)}{g^2(z)f(z)}=\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)},$$

resulta que φ es una primitiva en $\Omega\setminus K$ de la función $\dfrac{f'(z)}{f(z)}-\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ y, por tanto, la integral de dicha función en cualquier ciclo en $\Omega\setminus K$ es cero. En particular

$$\int_\Gamma\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\frac{g'(z)}{g(z)}\right)\mathrm{d}z=0$$

es decir, $N_0(f)=N_0(g)$. $\boxed{\checkmark}$

Observación

Es frecuente en las aplicaciones del teorema de Rouché que se verifique la desigualdad siguiente

$$|f(z)-g(z)|<|g(z)| \qquad \text{para todo } z\in\operatorname{Fr}\Omega \tag{4.38}$$

Naturalmente si se verifica la desigualdad 4.38 también se verifica la desigualdad 4.37. Con frecuencia es fácil comprobar la desigualdad 4.38 lo que permite aplicar dicho teorema. No obstante, puede ocurrir que la desigualdad 4.38 no se verifique y sí se verifique la desigualdad 4.37.

El teorema de Rouché permite dar otra demostración sencilla del Teorema Fundamental del Álgebra.

4.57 Teorema Fundamental del Álgebra. *Todo polinomio, P, de grado n con coeficientes complejos tiene n ceros en $\mathbb{C}$.*

Demostración. Podemos suponer que el coeficiente del término z^n es 1. Sea

$$P(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$$

Aplicaremos el Teorema de Rouché con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = z^n$. Debemos elegir un dominio Ω apropiado para comprobar la desigualdad 4.38. Observa que para $R > 1$ y $|z| = R$ se verifica que

$$|P(z) - g(z)| \leqslant MR^{n-1}$$

donde $M = |c_{n-1}| + \cdots + |c_1| + |c_0|$. Sea $\Omega = D(0,R)$ donde $R > M$. Entonces

$$|P(z) - g(z)| \leqslant MR^{n-1} < R^n = |g(z)| \qquad \text{para todo } z \in C(0,R)^*$$

El teorema de Rouché nos dice que, contando cada cero tantas veces como su orden, P tiene en el disco $D(0,R)$ tantos ceros como la función $g(z) = z^n$, esto es, n ceros. ✓

4.58 Corolario. *Sea Ω un dominio acotado y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ que además son holomorfas en Ω. Supongamos que la sucesión converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función f y que*

$$f(z) \neq 0, \qquad \textit{para todo } z \in \operatorname{Fr}\Omega$$

entonces existe un natural m tal que para $n \geqslant m$ se verifica que f_n y f tienen el mismo número finito de ceros en Ω (o en $\overline{\Omega}$).

Demostración. En virtud de las hipótesis, $\operatorname{Fr}\Omega$ es un compacto y f es una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Sea

$$\rho = \min\{|f(z)| : z \in \operatorname{Fr}\Omega\}$$

Como $f(z) \neq 0$ para $z \in \operatorname{Fr}\Omega$, tenemos que $\rho > 0$. Por definición de convergencia uniforme, existe un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ es $|f_n(z) - f(z)| < \rho$ para todo $z \in \overline{\Omega}$. En particular, para todo $z \in \mathrm{Fr}\,\Omega$ y todo $n \geqslant m$ tenemos

$$|f_n(z) - f(z)| < \rho \leqslant |f(z)| \leqslant |f(z)| + |f_n(z)|$$

por tanto, en vista del Teorema de Rouché, las funciones f_n y f tienen el mismo número finito de ceros en Ω. Además la desigualdad anterior implica que f_n y f no se anulan en la frontera de Ω, por tanto, también tienen el mismo número de ceros en $\overline{\Omega}$. $\boxed{\checkmark}$

4.59 Teorema de Hurwitz. *Sea Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω que no se anulan en ningún punto de Ω, es decir, $f_n(z) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \Omega$. Suponemos además que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función f. Entonces se verifica que o bien f es idénticamente nula en Ω, o bien f no se anula en ningún punto de Ω.*

Demostración. Por el Teorema de convergencia de Weierstrass, sabemos que f es holomorfa en Ω. Supongamos que f no es idénticamente nula en Ω. Entonces, si $f(a) = 0$ en algún punto $a \in \Omega$, como los ceros de f son puntos aislados en Ω, existirá un disco $\overline{D}(a,\delta) \subset \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D}(a,\delta) \setminus \{a\}$. El corolario anterior aplicado a la sucesión $\{f_n\}$ en el dominio formado por el disco $D(a,\delta)$ nos dice que para n suficientemente grande, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,\delta)$. Deducimos así que f_n tiene al menos un cero en Ω, lo cual contradice las hipótesis hechas. Hemos probado, pues, que si f no es idénticamente nula en Ω entonces f no se puede anular en ningún punto de Ω. $\boxed{\checkmark}$

4.60 Corolario. *Sea Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función f. Entonces f es inyectiva o f es constante en Ω.*

Demostración. Supongamos que f no es inyectiva y probemos que es constante. Sean, pues, $a, b \in \Omega$ con $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b)$. Consideramos el dominio $\Omega \setminus \{a\}$. Definimos las funciones

$$g_n(z) = f_n(z) - f_n(a) \qquad \text{para todo } z \in \Omega \setminus \{a\}$$

Como suponemos que cada f_n es inyectiva, entonces $g_n(z)$ no se anula en $\Omega\setminus\{a\}$. Como $\{f_n\}$ converge uniformemente en compactos de Ω a f, la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre compactos de $\Omega\setminus\{a\}$ a la función g dada por

$$g(z)=f(z)-f(a) \qquad \text{para todo } z\in\Omega\setminus\{a\}$$

Sabemos, por el Teorema de Hurwitz, que g es idénticamante cero o no se anula en ningún punto de $\Omega\setminus\{a\}$. Como $g(b)=0$, concluimos que g idénticamente nula y, por tanto, $f(z)=f(a)$ para todo $z\in\Omega\setminus\{a\}$, esto es, f es constante en Ω, como queríamos probar. $\boxed{\checkmark}$

4.9.1. Ejercicios propuestos

266. Calcula el número de ceros en el semiplano de la derecha de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $P(z)=z^4+2z^3-2z+10$;

b) $P(z)=z^4+2z^3-2z-10$;

c) $P(z)=z^6-z^3-4z+6$;

d) $P(z)=z^5+5z^3+11z^2+4z+1$;

e) $P(z)=z^6+z^5+6z^4+5z^3+8z^2+4z+1$;

f) $P(z)=z^6-3z^5+2z^2+5$.

267. Sea f una función continua en $\overline{D}(0,1)$ y holomorfa en $D(0,1)$ tal que $|f(z)|<1$ siempre que $|z|=1$. Prueba que f tiene exactamente un punto fijo en $D(0,1)$.

268. Calcula la distribución por cuadrantes de los ceros del polinomio
$$P(z)=z^8+z^5-z^4+3z^3+6z^2+2z+5.$$

269. Dados un número natural n y dos números reales distintos de cero a y b, determínese el número de ceros del polinomio $z^{2n}+a\,z^{2n-1}+b^2$ situados en el semiplano de la derecha.

270. Calcula el número de ceros del polinomio $P(z)=z^6+z^3+4z^2+2$ en cada uno de los discos $D(0,\frac{1}{2})$, $D(0,1)$ y $D(0,2)$.

271. Justifica que para $a\in\mathbb{R}$, $a>e$, la ecuación $e^z=az^n$, tiene n soluciones distintas en $D(0,1)$.

272. Prueba que la ecuación $(z+1)e^{-z}=2z-2$ tiene solución única en el semiplano de la derecha.

273. Sea $0<|a|<1$ y $p\in\mathbb{N}$. Prueba que la ecuación $(z-1)^p = a\,\mathrm{e}^{-z}$ tiene exactamente p ceros simples en $D(1,1)$ y si $|a|\leqslant 1/2^p$ dichos ceros están en $D(1,1/2)$.

274. Prueba que los ceros del polinomio z^4+iz^3+1 pertenecen al disco $D(0,\frac{3}{2})$ y determina cuántos de ellos se hallan en el primer cuadrante.

275. Prueba que todos los ceros del polinomio z^8+3z^3+7z+5 se hallan situados en el anillo $A(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ y que exactamente dos de ellos están en el primer cuadrante.

276. Prueba que todos los ceros del polinomio $P(z)=z^6-3z^5+2z^2+6$ pertenecen al anillo $A(0;1,\frac{7}{2})$ y determinar cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

277. Determina el número de ceros del polinomio $P(z)=2z^6-z^3+4z+1$ en el semiplano de la derecha.

278. Determina el número de ceros del polinomio $z^5+5z^3+11z^2+4z+1$ en el semiplano de la derecha y en el disco unidad.

279. Determina el número de ceros del polinomio $z^8-4z^5+z^2-2$.

a) En el anillo $A(0;1,2)$.

b) En el semiplano de la derecha.

280. Determina el número de ceros del polinomio $P(z)=2z^5+4z-1$.

a) en el anillo $A(0;1,2)$;

b) en el semiplano de la derecha.

281. Determina el número de ceros del polinomio $P(z)=z^4-z^2+2z+4$.

a) en el disco unidad;

b) en el primer cuadrante.

282. Prueba que todos los ceros del polinomio $P(z)=z^6-z^3-4z+6$ pertenecen al anillo $A(0;1,2)$ y determínese cuántos de ellos se hallan en el semiplano de la derecha.

283. Dado $0<\rho<1$, prueba que, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, el polinomio

$$P_n(z)=1+2z+3z^2+\cdots+nz^{n-1}$$

no se anula en el disco $D(0,\rho)$.

284. Dado $\rho>0$, prueba que, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande, todos los ceros de la función

$$f_n(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}$$

se hallan en el disco $D(0,\rho)$.

285. Sea Ω un dominio y f una función holomorfa e inyectiva en Ω. Sea $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Justifica que para todo $w \in f(D(a,r))$ se verifica que

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)-w} z \,\mathrm{d}z = f^{-1}(w)$$

286. Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las integrales

$$\int\limits_{C(0,1)} z\,\mathrm{e}^z \operatorname{tg}(\pi z)\,\mathrm{d}z \qquad \int\limits_{C(0,1)} \frac{\cosh z}{\operatorname{tg} z}\,\mathrm{d}z \qquad \int\limits_{C(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(\pi z/2)(3z^2-4z-1)}{z^3-2z^2-z+2}\,\mathrm{d}z$$

287. Calcula, usando el principio de argumento generalizado, las integrales

$$\int\limits_{C(0,2)} \frac{\mathrm{d}z}{z^3+1} \qquad \int\limits_{C(1,1/5)} \frac{3(z-1)^2-1}{z^3-3z^2+4z-2}\,\mathrm{d}z$$

288. Demuestra el teorema de la aplicación abierta a partir del principio del argumento.

289. Demuestra el teorema del comportamiento local de una función holomorfa (teorema 3.34) a partir del principio del argumento.

290. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función f que no es idénticamente nula en Ω. Sea $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Prueba que hay una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de Ω tal que $\{z_n\} \to a$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_n(z_n) = 0$ para todo $n \geqslant m$.

291. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y regular en ∞ tal que $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ y las únicas singularidades de f son los puntos $z = -1$ donde f tiene un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f(z),-1) = 1$, y $z = 2$ donde f tiene un polo de orden 2 y $\operatorname{Res}(f(z),2) = -2$. Calcula f.

292. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyas únicas singularidades son $z = -1$ donde f tiene un polo de orden uno y $\operatorname{Res}(f(z),-1) = 1$, y $z = 2$ donde f tiene un polo de orden 2 y $\operatorname{Res}(f(z),2) = 2$. Además $f(0) = 7/4$ y $f(1) = 5/2$. Calcula f y su desarrollo de Laurent en $A(0;1,2)$.

Capítulo 5

Representación conforme

5.1. Introducción

Aunque no es posible visualizar la gráfica de una función compleja, ya que tal gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^4$, podemos conseguir información sobre la función considerándola como una transformación de un plano en otro plano. Estudiando la forma en que una función compleja transforma algunas regiones o curvas podemos obtener cierta intuición geométrica sobre el comportamiento de dicha función. Este punto de vista "geométrico" será importante en este capítulo. Veremos que las funciones holomorfas cuya derivada no se anula pueden caracterizarse como las aplicaciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que conservan ángulos orientados entre curvas. Por esta razón a tales funciones se les llama *conformes*. Las funciones holomorfas e inyectivas son, en este sentido, aplicaciones conformes; pues sabemos que si f es una función holomorfa e inyectiva en un abierto Ω, entonces su derivada f' no se anula en ningún punto de Ω. Además, la función inversa f^{-1} es holomorfa en el abierto $f(\Omega)$. Dos abiertos del plano entre los que existe una biyección holomorfa diremos que son *isomorfos*. Tales abiertos son esencialmente indistinguibles en la teoría de funciones holomorfas. Un resultado principal de este capítulo será la caracterización de los abiertos del plano que son isomorfos al disco unidad. De ello se ocupa el llamado "Teorema Fundamental de la representación conforme". La demostración de este resultado nos llevará a introducir una topología en el espacio de las funciones holomorfas $\mathcal{H}(\Omega)$ y a caracterizar los subconjuntos compactos en dicha topología. Previamente a ello estudiaremos la clase más elemental de transformaciones conformes en el plano: las transformaciones de Möbius.

Podrás apreciar en este capítulo que aunque los resultados puedan interpretarse geométricamente las técnicas de demostración son puramente analíticas. Este es, a mi parecer, uno de los aspectos más hermosos de la teoría de funciones holomorfas.

5.2. Aplicaciones conformes

En lo que sigue interpretaremos los elementos de $\mathbb{C}$ como números complejos o como vectores de $\mathbb{R}^2$ según convenga.

5.1 Definición. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva. Diremos que γ tiene tangente en un punto $z = \gamma(t)$ (en rigor habría que hacer referencia al valor t del parámetro) cuando es derivable en t y $\gamma'(t) \neq 0$. El vector (o el número complejo) $\gamma'(t)$ se llama *vector tangente* a γ en $z = \gamma(t)$.

Dadas dos curvas $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ que se cortan en un punto $z = \gamma(t) = \sigma(s)$ y que tienen tangente en dicho punto, se define el ángulo de la curva γ con la curva σ en el punto z como

$$\widehat{\gamma,\sigma}\,(z) = \operatorname{Arg} \frac{\gamma'(t)}{\sigma'(s)}$$

Observa que $\widehat{\gamma,\sigma}\,(z) \neq \widehat{\sigma,\gamma}\,(z)$.

5.2 Definición. Sean Ω un abierto en el plano y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua en Ω. Se dice que f es conforme en un punto z de Ω si f transforma curvas con tangente en z en curvas con tangente en $w = f(z)$ y conserva ángulos entre curvas que se cortan en z, es decir, si $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ son curvas en Ω que se cortan en z y que tienen tangente en z, entonces $f \circ \gamma$ y $f \circ \sigma$ tienen tangente en w y $\widehat{\gamma,\sigma}\,(z) = \widehat{f \circ \gamma, f \circ \sigma}\,(w)$. Se dice que f es conforme en Ω si es conforme en todo punto de Ω.

5.3 Proposición. *Sean Ω un abierto, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua y z_0 un punto de Ω. Supongamos que f es derivable en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces f es conforme en z_0.*

Demostración. Sean $\gamma, \sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ curvas en Ω que se cortan en el punto $\gamma(t_0) = z_0 = \sigma(s_0)$ y que tienen tangente en dicho punto. Pongamos $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, $\widetilde{\sigma} = f \circ \sigma$. Observa que $\widetilde{\gamma}(t_0) = \widetilde{\sigma}(s_0) = f(z_0)$. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\widetilde{\gamma}'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \qquad \widetilde{\sigma}'(s_0) = f'(z_0)\sigma'(s_0)$$

Deducimos que las curvas $\widetilde{\gamma}$ y $\widetilde{\sigma}$ tienen tangente en $f(z_0)$ y

$$\frac{\widetilde{\gamma}'(t_0)}{\widetilde{\sigma}'(s_0)} = \frac{f'(z_0)\gamma'(t_0)}{f'(z_0)\sigma'(s_0)} = \frac{\gamma'(t_0)}{\sigma'(s_0)}$$

lo que implica que $\widehat{\gamma,\sigma}\,(z_0) = \widehat{\widetilde{\gamma},\widetilde{\sigma}}\,(f(z_0))$, es decir, f es conforme en z_0.

5.4 Proposición. *Sean Ω un abierto, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función continua en Ω y z_0 un punto de Ω. Pongamos $u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+iy)$. Supongamos que f es conforme en z_0 y que u y v son diferenciables en z_0. Entonces f es derivable en z_0 y $f'(z_0)\neq 0$.*

Demostración. Sea $\gamma(t)=\gamma_1(t)+i\gamma_2(t)$ una curva en Ω con tangente en $z_0=\gamma(t_0)$. La curva $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$ es, en virtud de la regla de la cadena, derivable en t_0 y su derivada viene dada por

$$\widetilde{\gamma}'(t_0) = Df(z_0)\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

En lo que sigue notaremos $a=\dfrac{\partial u}{\partial x}(z_0)$, $b=\dfrac{\partial u}{\partial y}(z_0)$, $c=\dfrac{\partial v}{\partial x}(z_0)$ y $d=\dfrac{\partial v}{\partial y}(z_0)$. Para probar que f es derivable en z_0 probaremos que $a=d$ y $b=-c$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}'(t_0) = Df(z_0)\gamma'(t_0) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma'_1(t_0) \\ \gamma'_2(t_0) \end{pmatrix} = a\gamma'_1(t_0)+b\gamma'_2(t_0)+i\big(c\gamma'_1(t_0)+d\gamma'_2(t_0)\big) = \\
&= (a+ic)\gamma'_1(t_0)+(b+id)\gamma'_2(t_0) = \\
&= \frac{1}{2}\big(a+ic-i(b+id)\big)\big(\gamma'_1(t_0)+i\gamma'_2(t_0)\big)+\frac{1}{2}\big(a+ic+i(b+id)\big)\big(\gamma'_1(t_0)-i\gamma'_2(t_0)\big) = \\
&= \frac{1}{2}\big(a+ic-i(b+id)\big)\gamma'(t_0)+\frac{1}{2}\big(a+ic+i(b+id)\big)\overline{\gamma'(t_0)}
\end{aligned}$$

Sea $\sigma:[a,b]\to\mathbb{C}$ otra curva en Ω que pasa por el punto $z_0=\sigma(s_0)$ y que tiene tangente en dicho punto. Pongamos $\widetilde{\sigma}=f\circ\sigma$. De lo anterior se sigue que

$$\frac{\widetilde{\gamma}'(t_0)}{\widetilde{\sigma}'(s_0)} = \frac{\big(a+ic-i(b+id)\big)\gamma'(t_0)+\big(a+ic+i(b+id)\big)\overline{\gamma'(t_0)}}{\big(a+ic-i(b+id)\big)\sigma'(s_0)+\big(a+ic+i(b+id)\big)\overline{\sigma'(s_0)}} \tag{5.2}$$

Dado un vector $w\in\mathbb{R}^2$ con $\|w\|=1$, la curva dada por $\lambda(t)=z_0+tw$, donde $t\in[-r,r]$, está en Ω sin más que tomar r suficientemente pequeño. Puesto que $\lambda'(t)=w$ y, por hipótesis,

f es conforme en z_0, debe verificarse que $Df(z_0)(w) \neq 0$. Deducimos que el determinante jacobiano de f en z_0, $ad - bc \neq 0$. Además la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

debe conservar ángulos. Deducimos que los vectores $T(1,0) = (a,c)$ y $T(0,1) = (b,d)$ han de ser ortogonales. También han de ser ortogonales los vectores $T(1,1) = (a+b, c+d)$ y $T(1,-1) = (a-b, c-d)$. Resulta así que

$$ab + cd = 0, \quad a^2 - b^2 = c^2 - d^2$$

y deducimos que $(a+ib)^2 = (d-ic)^2$, lo que implica que $a+ib = \pm(d-ic)$.

La igualdad $a+ib = -(d-ic)$ implica que $a = -d$ y $b = c$ y, por tanto, $a+ic-i(b+id) = a+d+i(c-b) = 0$. Además, debe ser $a+ic+i(b+id) = 2(a+ic) \neq 0$. Deducimos por 5.2 que

$$\operatorname{Arg} \frac{\widetilde{\gamma}'(t_0)}{\widetilde{\sigma}'(s_0)} = \operatorname{Arg} \frac{\overline{\gamma'(t_0)}}{\overline{\sigma'(s_0)}} = -\operatorname{Arg} \frac{\gamma'(t_0)}{\sigma'(s_0)}$$

lo que contradice la hipótesis de que f es conforme en z_0.

Deducimos por tanto que debe verificarse que $a+ib = d-ic$ igualdad que equivale a las condiciones de Cauchy–Riemann para f en el punto z_0. Lo que implica que f es derivable en z_0 y $f'(z_0) = a+ic \neq 0$. $\boxed{\checkmark}$

5.5 Corolario. *Sean Ω un abierto y f una función de Ω en $\mathbb{C}$. Pongamos*

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy).$$

Equivalen las afirmaciones
(a) f es holomorfa en Ω y $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$.
(b) f es conforme en Ω y las funciones u y v son diferenciables en Ω.

5.6 Definición. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en $\mathbb{C}$. Se dice que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un *isomorfismo conforme* de Ω_1 sobre Ω_2 si f es holomorfa y biyectiva.

Se dice que dos dominios Ω_1 y Ω_2 son *isomorfos* si existe un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2. Representaremos por $\operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$ el conjunto de todos los isomorfismos conformes de Ω_1 sobre Ω_2.

Un isomorfismo conforme de un dominio Ω sobre sí mismo se llama un *automorfismo conforme* de Ω. Representaremos por $\mathrm{Aut}(\Omega)$ el conjunto de los automorfismos conformes de Ω.

Recuerda que la derivada de una función holomorfa e inyectiva no se anula nunca. En consecuencia, si f es una función holomorfa e inyectiva en un dominio Ω, entonces f es un isomorfismo conforme de Ω sobre $f(\Omega)$.

Si Ω_1 y Ω_2 son dominios isomorfos y $f \in \mathrm{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$, la aplicación $g \mapsto g \circ f$ es una biyección de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre $\mathcal{H}(\Omega_1)$. De hecho, dicha aplicación es un isomorfismo en sentido algebraico del álgebra de funciones $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre el álgebra de funciones $\mathcal{H}(\Omega_1)$. En este sentido, desde el punto de vista de la teoría de funciones holomorfas, dos dominios isomorfos son indistinguibles. Con frecuencia es posible trasladar la solución de un problema en un dominio a otro dominio isomorfo a él. Por eso es muy interesante conocer los dominios isomorfos a los dos más sencillos de todos, a saber, el plano complejo entero $\mathbb{C}$ y el disco unidad $D(0,1)$.

5.2.1. Automorfismos de $\mathbb{C}$

5.7 Teorema. *Las funciones enteras e inyectivas son las funciones polinómicas de grado uno.*

Demostración. Sea f una función entera e inyectiva. Si f tuviera una singularidad esencial en ∞, sabemos, por la proposición 4.33, que el conjunto $\{f(z) : |z| > 1\}$ sería denso en $\mathbb{C}$. Y como, en virtud del teorema de la aplicación abierta, el conjunto $\{f(z) : |z| < 1\}$ es abierto, se tendría que

$$\{f(z) : |z| > 1\} \cap \{f(z) : |z| < 1\} \neq \emptyset$$

lo cual contradice que f es inyectiva. La proposición 4.34 nos dice ahora que f es una función polinómica. Pero como f es inyectiva debe ser necesariamente una función polinómica de grado 1. $\boxed{\checkmark}$

5.8 Corolario. *No hay más dominios isomorfos a $\mathbb{C}$ que el propio $\mathbb{C}$. Los automorfismos de $\mathbb{C}$ son las funciones polinómicas de grado uno.*

5.2.2. Funciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$

El siguiente resultado es la versión para funciones meromorfas del teorema 3.34 sobre el comportamiento local de una función holomorfa.

5.9 Proposición. *Sean Ω un abierto, a un punto de Ω y f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ que tiene un polo de orden m en a. Entonces existen números $R > 0$, $\delta > 0$ tales que para todo $w \in \mathbb{C}$ con $|w| > R$ se verifica que hay m puntos distintos $z_j \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$ tales que $f(z_j) = w$.*

Demostración. Como se trata de un resultado local no es restrictivo suponer que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{a\}$. Definimos $g : \Omega \to \mathbb{C}$ por $g(z) = 1/f(z)$ y $g(a) = 0$. La función g es holomorfa en Ω y, por la caracterización de los polos, se deduce enseguida que g tiene un cero de orden m en a. El teorema 3.34 nos dice que hay números $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que para $0 < |w| < r$ la ecuación $g(z) = w$ tiene m soluciones distintas en $D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Equivalentemente, poniendo $R = 1/r$, para $|w| > R$ la ecuación $1/f(z) = 1/w$ tiene m soluciones distintas en $D(a, \delta) \setminus \{a\}$. $\boxed{\checkmark}$

5.10 Teorema. *Las funciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$ son las funciones de la forma*

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad y \quad ad - bc \neq 0 \tag{5.3}$$

Demostración. Sea φ una función meromorfa e inyectiva en $\mathbb{C}$. En el caso de que dicha función sea holomorfa en $\mathbb{C}$, sabemos que debe ser una función polinómica de grado uno. Estas funciones son las que se obtienen en 5.3 para $c = 0$. Descartado este caso, la función φ debe tener algún polo en $\mathbb{C}$. Pero como φ es inyectiva, por la proposición anterior, se deduce que solamente puede tener un único polo simple. Sea z_0 dicho polo y sea $\alpha = \operatorname{Res}(\varphi(z), z_0)$. En virtud de la proposición 4.23, sabemos que hay una función entera, g, tal que

$$\varphi(z) - \frac{\alpha}{z - z_0} = g(z) \qquad \text{para todo } z \neq z_0 \tag{5.4}$$

Razonando ahora como se hizo en el teorema 5.7, se deduce, por ser φ inyectiva, que dicha función no puede tener una singularidad esencial en ∞, lo que, teniendo en cuenta la igualdad 5.4, implica que g tampoco puede tener una singularidad esencial en ∞. Y, por ser g una función entera, deducimos que g es una función polinómica. Pero en tal caso, como

$$\varphi(z) = \frac{\alpha + (z - z_0)g(z)}{z - z_0}$$

y la función φ no puede tener más de un cero, se sigue que g debe ser constante. Hemos probado así que φ es de la forma $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Finalmente, como

$$\varphi'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2}$$

se sigue que $ad - bc \neq 0$. ☑

5.2.3. Esfera de Riemann

La consideración de las funciones meromorfas lleva de forma natural a ampliar el plano complejo añadiéndole un "punto del infinito", ∞, y a definir en dicho "plano complejo ampliado", $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, una topología que haga que dichas funciones sean continuas cuando se les asigna el valor ∞ en cada polo. Notaremos $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y le llamaremos el plano complejo ampliado.

En lo que sigue usaremos la siguiente notación

$$D(\infty, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$$

y llamaremos a $D(\infty, R)$ el disco abierto de centro ∞ y radio $R \geqslant 0$. En $\widehat{\mathbb{C}}$ definimos una topología por el siguiente convenio. Se dice que un conjunto $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es abierto (en $\widehat{\mathbb{C}}$) si es unión de discos abiertos de la forma $D(a, \rho)$ con $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Es inmediato que si un conjunto $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es abierto en $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces $U \cap \mathbb{C}$ es abierto en $\mathbb{C}$. Además, en el caso de que $\infty \in U$, se verifica que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ es compacto en $\mathbb{C}$. Se deduce fácilmente que $\widehat{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico compacto. Dicho espacio topológico recibe el nombre de *esfera de Riemann*. La razón de tan sonoro nombre es el siguiente artificio que permite visualizar $\widehat{\mathbb{C}}$ y que, al parecer, fue ideado por Riemann.

Consideremos el plano complejo $\mathbb{C}$ sumergido en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ de modo que

$$\mathbb{C} \equiv \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Sea $\mathbb{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$ la esfera unidad en $\mathbb{R}^3$. Notaremos $N = (0, 0, 1)$ y llamaremos a dicho punto el *polo norte* de la esfera. Dado un punto $z = x + iy \in \mathbb{C}$, calcu-

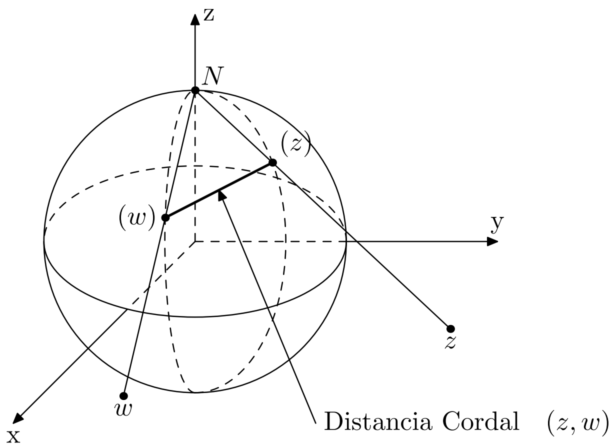


Figura 5.1: Proyección estereográfica

lemos la intersección con la esfera $\mathbb{S}$ de la recta que pasa por dicho punto y por el polo norte de la esfera.

Dicha recta es el conjunto de puntos de la forma

$$\lambda\big((x,y,0)-(0,0,1)\big)+(0,0,1)=(\lambda x,\lambda y,1-\lambda) \qquad \text{donde } \lambda\in\mathbb{R}$$

y para hallar su intersección con $\mathbb{S}$ debe ser $\lambda\neq 0$ y

$$\lambda^2x^2+\lambda^2y^2+(1-\lambda)^2=1 \Longleftrightarrow \lambda=\frac{2}{x^2+y^2+1}$$

por lo que la intersección buscada es el punto

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)=\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\frac{i(\overline{z}-z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

La aplicación $\pi:\widehat{\mathbb{C}}\to\mathbb{S}$ dada por

$$\boxed{\begin{aligned} \pi(z)&=\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\frac{i(\overline{z}-z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)\\ \pi(\infty)&=(0,0,1)\end{aligned}}$$

se llama *proyección estereográfica*. Dicha aplicación es una biyección. Es evidente que la restricción de π a $\mathbb{C}$ es continua y también es continua en ∞ pues $\lim\limits_{z\to\infty}\pi(z)=(0,0,1)$. Es fácil comprobar que la aplicación inversa también es continua, es decir, la proyección estereográfica es un homeomorfismo entre los espacios topológicos $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{S}$.

Podemos trasladar por π la distancia euclídea de la esfera al plano ampliado definiendo una distancia en $\widehat{\mathbb{C}}$ llamada, por razones evidentes (ver figura 5.1), *distancia cordal* que viene dada por:

$$\chi(z,w) = \|\pi(z) - \pi(w)\|_2 \qquad \text{para todos } z,w \in \widehat{\mathbb{C}}$$

donde $\|\cdot\|_2$ indica la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$. Un cálculo explícito proporciona

$$\chi(z,w) = \frac{2\,|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \qquad \chi(\infty,z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

Es evidente que π es una isometría del espacio métrico $(\widehat{\mathbb{C}},\chi)$ en la esfera con la distancia euclídea $\left(\mathbb{S},\|\cdot\|_2\right)$ y, por tanto, $(\widehat{\mathbb{C}},\chi)$ es un espacio métrico completo. Además, como π también era un homeomorfismo entre los espacios topológicos $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{S}$, se deduce que la topología definida en $\widehat{\mathbb{C}}$ por la distancia cordal coincide con la topología antes definida en $\widehat{\mathbb{C}}$.

Es claro que si f es una función meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, podemos considerar f como aplicación de Ω en $\widehat{\mathbb{C}}$ definiendo el valor de f en cada polo igual a ∞ y la función así obtenida es continua.

5.3. Transformaciones de Möbius

En el teorema 5.10 hemos descrito las transformaciones meromorfas e inyectivas en $\mathbb{C}$. Es natural extender tales aplicaciones a la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$. De hecho, como se prueba en el teorema referido (véase también el ejercicio 101) tales aplicaciones son las únicas funciones meromorfas e inyectivas en $\widehat{\mathbb{C}}$.

5.11 Definición. Dados cuatro números complejos a,b,c,d tales que $ad-bc \neq 0$, la aplicación $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $cz+d \neq 0$, con los convenios

- Si $c=0$, definimos $\varphi(\infty) = \infty$;
- Si $c \neq 0$, definimos $\varphi(\infty) = \dfrac{a}{c}$ y $\varphi\left(\dfrac{-d}{c}\right) = \infty$;

se llama *transformación de Möbius* de parámetros a,b,c,d. Notaremos $\mathcal{M}$ el conjunto de todas ellas.

5.3.1. Propiedades de las transformaciones de Möbius

(M 1) *Las transformaciones de Möbius son biyecciones de* $\widehat{\mathbb{C}}$ *sobre* $\widehat{\mathbb{C}}$.

Se comprueba fácilmente que la transformación de Möbius de parámetros $d, -b, -c$, a, es decir, la aplicación $\phi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$\phi(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

con los correspondientes convenios, es la inversa de φ.

(M 2) *Las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de* $\widehat{\mathbb{C}}$.

(M 3) *Si* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *es un dominio y* φ *es una transformación de Möbius que es holomorfa en* Ω*, es decir,* $\varphi^{-1}(\infty) \notin \Omega$*, entonces la restricción de* φ *a* Ω*, es decir la aplicación* $\varphi_{|\Omega}$ *es un isomorfismo conforme de* Ω *sobre* $\varphi(\Omega)$*. En particular, las transformaciones de Möbius conservan ángulos entre curvas.*

(M 4) $\mathcal{M}$ *tiene estructura de grupo con la composición de aplicaciones.*

Sean φ, ψ las transformaciones de Möbius dadas por

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad \psi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

Se comprueba fácilmente que

$$\psi(\varphi(z)) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

igualdad que tiene sentido para $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty, \varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\infty))\}$. Puesto que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

y el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, se sigue que la transformación de Möbius definida por

$$\chi(z) = \frac{(\alpha a + \beta c)z + (\alpha b + \beta d)}{(\gamma a + \delta c)z + (\gamma b + \delta d)}$$

coincide con $\psi \circ \varphi$ en el conjunto $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty, \varphi^{-1}(\infty), \varphi^{-1}(\psi^{-1}(\infty))\}$ y, como dicho conjunto es denso en $\widehat{\mathbb{C}}$, deducimos, por continuidad, que $\chi(z) = (\psi \circ \varphi)(z)$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

(M 5) Subgrupos importantes de $\mathcal{M}$ son:

- Los *giros* que son las transformaciones de Möbius de la forma $\varphi(z) = \lambda z$ donde $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$.
- Las *homotecias* que son las transformaciones de Möbius de la forma $\varphi(z) = \rho z$ donde $\rho \in \mathbb{R}^+$.
- Las *traslaciones* que son las transformaciones de Möbius de la forma $\varphi(z) = z + b$ donde $b \in \mathbb{C}$.
- El subgrupo formado por la identidad y la *inversión* que es la transformación de Möbius dada por $J(z) = 1/z$, $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$. Observa que $J^{-1} = J$.

(M 6) *Toda transformación de Möbius puede expresarse como composición de giros, homotecias, traslaciones y la inversión.*

Sea φ la transformación de Möbius de parámetros a, b, c, d.

- Si $c = 0$, entonces la igualdad $\varphi(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} = \rho\,\mathrm{e}\,i\theta z + \beta$ donde $\rho = |a/d|$, θ es un argumento de a/d y $\beta = b/d$, expresa φ como composición de un giro, una homotecia y una traslación.
- Si $c \neq 0$, entonces la igualdad

$$\varphi(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c}\right) + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c}$$

  expresa φ como composición de giros, homotecias, traslaciones y de la inversión.

(M 7) *La única transformación de Möbius que deja fijos* $0, 1, \infty$ *es la identidad.*

Pues si φ es la transformación de Möbius de parámetros a, b, c, d, la condición $\varphi(\infty) = \infty$ implica que $c = 0$. Luego $\varphi(z) = (a/d)z + b/d$. La condición $\varphi(0) = 0$ implica que $b = 0$. Luego $\varphi(z) = (a/d)z$. Finalmente, la condición $\varphi(1) = 1$ implica que $a/d = 1$, luego $\varphi(z) = z$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

5.3.2. Conservación de las rectas–circunferencias

Vamos a probar que las transformaciones de Möbius conservan el conjunto de las rectas y circunferencias del plano. En lo que sigue representaremos por $\mathscr{C}$ la familia de subconjuntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ cuyos elementos son las circunferencias en $\mathbb{C}$ y los conjuntos de la forma $L \cup \{\infty\}$ donde L es una recta en $\mathbb{C}$. Queremos probar que si $\Gamma \in \mathscr{C}$ y $\varphi \in \mathcal{M}$ entonces $\varphi(\Gamma) \in \mathscr{C}$. Teniendo en cuenta la propiedad 6 y que, como se comprueba fácilmente, los giros, homotecias y traslaciones conservan rectas y circunferencias, será suficiente probar que si $\Gamma \in \mathscr{C}$ entonces $J(\Gamma) \in \mathscr{C}$. Para ello es cómodo representar el conjunto de todos los elementos de $\mathscr{C}$ mediante una sola ecuación. La forma de hacerlo consiste en considerar los elementos de la familia $\mathscr{C}$ como proyecciones estereográficas de circunferencias sobre la esfera $\mathbb{S}$.

Una circunferencia en $\mathbb{S}$ viene dada como intersección de un plano

$$\Pi = \left\{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3 : Au+Bv+Cw+D=0\right\}$$

con $\mathbb{S}$. Para que dicha intersección no sea vacía debe verificarse que la distancia de Π al origen sea menor que 1, esto es

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}<1 \Longleftrightarrow A^2+B^2+C^2>D^2$$

Supongamos que esta condición se cumple, y sea $P=\pi^{-1}:\mathbb{S}\to\widehat{\mathbb{C}}$ la proyección estereográfica de la esfera sobre $\widehat{\mathbb{C}}$. Sabemos que $\pi(0,0,1)=\infty$ y para todo $z\in\mathbb{C}$

$$\pi(z)=\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1},\frac{i(\overline{z}-z)}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

Tenemos que

$$P(\Pi\cap\mathbb{S})=P\big(\left\{(u,v,w)\in\mathbb{S} : Au+bv+Cw+D=0\right\}\big)$$

Distinguiremos dos casos

- $(0,0,1)\in\Pi\cap\mathbb{S}$ lo que ocurre si, y sólo si, $C+D=0$. En tal caso $\infty\in P(\Pi\cap\mathbb{S})$, y para $z\in\mathbb{C}$ se tiene que $z\in P(\Pi\cap\mathbb{S})$ si, y sólo si, $\pi(z)\in\Pi$, es decir:

$$\begin{aligned}&A(z+\overline{z})+iB(\overline{z}-z)+C(|z|^2-1)+D(|z|^2+1)=0 \Longleftrightarrow\ (C+D=0) &\quad (5.5)\\ &A(z+\overline{z})+iB(\overline{z}-z)+D-C=0 \Longleftrightarrow\ (z=x+iy)\\ &2Ax+2By+D-C=0\end{aligned}$$

  Por tanto

$$P(\Pi\cap\mathbb{S})=\{z=x+iy\in\mathbb{C} : 2Ax+2By+D-C=0\}\cup\{\infty\}$$

  Observa que se trata de una recta en el plano a la que se ha agregado el punto del infinito.

- $(0,0,1)\notin\Pi\cap\mathbb{S}$. Razonando igual que antes, en este caso se tiene que $\infty\notin P(\Pi\cap\mathbb{S})$, por lo que $P(\Pi\cap\mathbb{S})$ es el conjunto de los $z\in\mathbb{C}$ que verifican

$$\begin{aligned}&A(z+\overline{z})+iB(\overline{z}-z)+C(|z|^2-1)+D(|z|^2+1)=0 \Longleftrightarrow\ (C+D\neq 0) &\quad (5.6)\\ &z\overline{z}+\frac{A-iB}{C+D}z+\frac{A+iB}{C+D}\overline{z}+\frac{D-C}{C+D}=0 \Longleftrightarrow |z-\alpha|=R\end{aligned}$$

  donde $\alpha=-\dfrac{A+iB}{C+D}$ y $R=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-D^2}}{|C+D|}$. Como puedes ver, en este caso, la proyección es una circunferencia.

Dados cuatro números reales A,B,C,D tales que $A^2+B^2+C^2-D^2>0$, definimos

$$\Gamma(A,B,C,D)=\left\{z\in\mathbb{C}:A(z+\overline{z})+iB(\overline{z}-z)+C(|z|^2-1)+D(|z|^2+1)=0\right\} \tag{5.7}$$

con el convenio de que si $C+D=0$ entonces $\infty\in\Gamma(A,B,C,D)$.

Hemos probado en 5.5 y en 5.6 que si $C+D=0$ entonces 5.7 representa una recta a la que se ha agregado el punto ∞; y si $C+D\neq 0$ entonces 5.7 representa una circunferencia. Recíprocamente, es muy fácil comprobar que la ecuación de cualquier recta o circunferencia en el plano puede escribirse como $\Gamma(A,B,C,D)$ para una conveniente elección de los parámetros A,B,C,D.

Probaremos ahora que $J(\Gamma(A,B,C,D))=\Gamma(A,-B,-C,D)$. En efecto, para $z\in\mathbb{C}^*$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
&z\in\Gamma(A,B,C,D)\Leftrightarrow A(z+\overline{z})+iB(\overline{z}-z)+C(|z|^2-1)+D(|z|^2+1)=0\Leftrightarrow\\
&\qquad\qquad\big(\text{ poniendo } w=J(z) \text{ y dividiendo por } z\overline{z}\big)\\
&\qquad\qquad A(\overline{w}+w)+iB(w-\overline{w})+C(1-w\overline{w})+D(1+w\overline{w})=0\Leftrightarrow w=J(z)\in\Gamma(A,-B,-C,D)
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
&0\in\Gamma(A,B,C,D)\Leftrightarrow D-C=0\Leftrightarrow D+(-C)=0\Leftrightarrow\ \infty=J(0)\in\Gamma(A,-B,-C,D)\\
&\infty\in\Gamma(A,B,C,D)\Leftrightarrow C+D=0\Leftrightarrow D-(-C)=0\Leftrightarrow 0=J(\infty)\in\Gamma(A,-B,-C,D)
\end{aligned}$$

Un último detalle, $A^2+B^2+C^2-D^2>0\Longleftrightarrow A^2+(-B)^2+(-C)^2-D^2>0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

(M 8) *Las transformaciones de Möbius conservan el conjunto de rectas y circunferencias. Es decir, si* $\Gamma\in\mathscr{C}$ *y* $\varphi\in\mathcal{M}$*, entonces* $\varphi(\Gamma)\in\mathscr{C}$.

Es claro que si φ es una transformación de Möbius, las imágenes por φ de las rectas y circunferencias que pasan por $\varphi^{-1}(\infty)$ han de contener a ∞, luego deben ser rectas, y las imágenes por φ de las rectas y circunferencias que no pasan por $\varphi^{-1}(\infty)$ no contienen a ∞ y, por tanto, son circunferencias.

Transformaciones de discos y semiplanos

Puesto que las transformaciones de Möbius son homeomorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$, las componentes conexas de la imagen $\varphi(\Omega)$ de un conjunto $\Omega\subset\widehat{\mathbb{C}}$ por $\varphi\in\mathcal{M}$ son justamente las imágenes por φ de las componentes conexas de Ω. Este resultado es de gran utilidad cuando $\Omega=\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ con $\Gamma\in\mathscr{C}$. Sea, pues, $\Gamma\in\mathscr{C}$ y consideremos los dos casos posibles:

- $\Gamma = \{z\in\mathbb{C} : |z-a| = R\}$. Definimos entonces

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \{z\in\mathbb{C} : |z-a| > R\}\cup\{\infty\} && \text{(el exterior del disco } D(a,R))\\ \Gamma^- &= \{z\in\mathbb{C} : |z-a| < R\} && \text{(el interior del disco } D(a,R))\end{aligned}$$

- $\Gamma = \left\{z\in\mathbb{C} : \dfrac{z-z_0}{z_1-z_0} = \lambda\in\mathbb{R}\right\}\cup\{\infty\}$, es decir, Γ es la recta que pasa por z_0 y z_1. Definimos entonces

$$\begin{aligned}\Gamma^+ &= \left\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}\frac{z-z_0}{z_1-z_0} > 0\right\} && \text{(el semiplano de la izquierda al avanzar sobre la recta desde } z_0 \text{ a } z_1)\\ \Gamma^- &= \left\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}\frac{z-z_0}{z_1-z_0} < 0\right\} && \text{(el semiplano de la derecha al avanzar sobre la recta desde } z_0 \text{ a } z_1)\end{aligned}$$

En cualquier caso tenemos que Γ^+ y Γ^- son abiertos conexos y disjuntos en $\widehat{\mathbb{C}}$ y $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Gamma = \Gamma^+\cup\Gamma^-$. Por tanto, Γ^+ y Γ^- son las componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$. En consecuencia, si $\varphi\in\mathcal{M}$ se tendrá que $\Sigma = \varphi(\Gamma)\in\mathscr{C}$ y deberá ocurrir una de las dos posibilidades siguientes

$$\varphi(\Gamma^+) = \Sigma^+ \quad \text{y} \quad \varphi(\Gamma^-) = \Sigma^-$$

o bien

$$\varphi(\Gamma^+) = \Sigma^- \quad \text{y} \quad \varphi(\Gamma^-) = \Sigma^+$$

Por ejemplo, consideremos la transformación de Möbius dada por

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Como $|\varphi(it)| = 1$ para todo $t\in\mathbb{R}$, resulta que φ aplica el eje imaginario $\Gamma = i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ en la circunferencia unidad $C(0,1)^*$. Como $\varphi(1) = 0$ deducimos que φ lleva el semiplano de la derecha, $H = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, al disco unidad $D(0,1)$. Como todo disco es isomorfo, mediante una homotecia y una traslación, al disco $D(0,1)$ y todo semiplano es isomorfo, mediante una traslación y un giro, al semiplano H, deducimos que todo semiplano y todo disco son isomorfos. Veremos más adelante que los únicos isomorfismos entre este tipo de dominios vienen dados por medio de transformaciones de Möbius.

5.3.3. Razón doble

(M 9) *Dados tres puntos distintos $z_2, z_3, z_4\in\widehat{\mathbb{C}}$, existe una única transformación de Möbius, φ, verificando que*

$$\varphi(z_2) = 0, \quad \varphi(z_3) = 1, \quad \varphi(z_4) = \infty.$$

En efecto, dicha transformación viene dada por

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{z-z_2}{z-z_4}\,\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2} && \text{si } z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}\\
\varphi(z) &= \frac{z_3-z_4}{z-z_4} && \text{si } z_2=\infty\\
\varphi(z) &= \frac{z-z_2}{z-z_4} && \text{si } z_3=\infty\\
\varphi(z) &= \frac{z-z_2}{z_3-z_2} && \text{si } z_4=\infty
\end{aligned}$$

La unicidad es inmediata pues si ϕ es otra transformación de Möbius cumpliendo lo anterior, $\varphi\circ\phi^{-1}$ dejaría fijos el cero, el uno y ∞ luego, por **(M 7)** sería la identidad, esto es, $\varphi=\phi$.

Notaremos por (z,z_2,z_3,z_4) a esta aplicación y la llamaremos *razón doble de* z,z_2,z_3,z_4, esto es:

$$\begin{aligned}
(z,z_2,z_3,z_4) &= \frac{z-z_2}{z-z_4}\,\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2} && z_2,z_3,z_4\in\mathbb{C}\\
(z,\infty,z_3,z_4) &= \frac{z_3-z_4}{z-z_4} && z_3,z_4\in\mathbb{C}\\
(z,z_2,\infty,z_4) &= \frac{z-z_2}{z-z_4} && z_2,z_4\in\mathbb{C}\\
(z,z_2,z_3,\infty) &= \frac{z-z_2}{z_3-z_2} && z_2,z_3\in\mathbb{C}
\end{aligned}$$

(M 10) *La razón doble se conserva por transformaciones de Möbius.*

En efecto, dados $z,z_2,z_3,z_4\in\widehat{\mathbb{C}}$ y $\psi\in\mathcal{M}$ debemos probar que

$$(z,z_2,z_3,z_4)=(\psi(z),\psi(z_2),\psi(z_3),\psi(z_4))$$

Pongamos $\varphi(z)=(z,z_2,z_3,z_4)$, y $\chi(z)=(\varphi\circ\psi^{-1})(z)$. Tenemos que:

$$\chi(\psi(z_2))=\varphi(z_2)=0,\quad \chi(\psi(z_3))=1,\quad \chi(\psi(z_4))=\infty$$

Deducimos que $\chi(z)=(z,\psi(z_2),\psi(z_3),\psi(z_4))$, y por tanto

$$\varphi(z)=\chi(\psi(z))=(\psi(z),\psi(z_2),\psi(z_3),\psi(z_4))$$

como queríamos probar.

(M 11) *Dadas dos ternas de puntos distintos en* $\widehat{\mathbb{C}}$, z_1,z_2,z_3 *y* w_1,w_2,w_3, *existe una única transformación de Möbius,* ψ, *que lleva la primera terna a la segunda de manera* *que* $\psi(z_j) = w_j$ *para* $j = 1,2,3$. *Además dicha transformación queda definida implícitamente por la igualdad:*

$$(z,z_1,z_2,z_3) = (\psi(z),w_1,w_2,w_3) \tag{5.8}$$

En efecto, sean $\varphi(z) = (z,z_1,z_2,z_3)$ y $\chi(z) = (z,w_1,w_2,w_3)$. La transformación $\psi = \chi^{-1} \circ \varphi$ verifica que $\psi(z_j) = w_j$ para $j = 1,2,3$. Dicha transformación es única como consecuencia de **(M 7)**. Finalmente, observa que la igualdad $\chi(\psi(z)) = \varphi(z)$ es precisamente la igualdad del enunciado.

(M 12) *Dados tres puntos distintos* $z_2,z_3,z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ *existe una única recta o circunferencia* Γ *que los contiene.*

En efecto, si $\varphi(z) = (z,z_2,z_3,z_4)$ se tiene que $z_j \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ para $j = 1,2,3$. Por tanto $\Gamma = \varphi^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$ es una recta o circunferencia que contiene a dichos puntos.

Si Γ' es otra recta o circunferencia conteniendo los tres puntos entonces

$$\varphi(\Gamma') = \mathbb{R}\cup\{\infty\} = \varphi(\Gamma)$$

Puesto que φ es una biyección tenemos $\Gamma' = \Gamma$, lo que prueba la unicidad.

(M 13) *Cuatro puntos distintos del plano ampliado son concíclicos (están sobre una misma recta o circunferencia) si, y sólo si, su razón doble es un número real.*

En efecto, sean $z_1,z_2,z_3,z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ puntos distintos tales que $(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{R}$. Sea $\varphi(z) = (z,z_2,z_3,z_4)$ y $\Gamma = \varphi^{-1}(\mathbb{R}\cup\{\infty\})$. Como, por hipótesis, $\varphi(z_1) \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, deducimos que $z_j \in \Gamma$ para $j = 1,2,3,4$. El recíproco es inmediato.

Puesto que un número complejo es real cuando coincide con su conjugado, deducimos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos z_2,z_3 viene dada por

$$(z,z_2,z_3,\infty) = \overline{(z,z_2,z_3,\infty)}$$

es decir

$$\frac{z-z_2}{z_3-z_2} = \frac{\overline{z}-\overline{z_2}}{\overline{z_3}-\overline{z_2}} \tag{5.9}$$

o, lo que es igual, $\dfrac{z-z_2}{z_3-z_2} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Análogamente, la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos z_2,z_3,z_4 viene dada por

$$(z,z_2,z_3,z_4) = (\overline{z},\overline{z_2},\overline{z_3},\overline{z_4})$$

Observa que si Γ es la recta o circunferencia determinada por los puntos z_2,z_3,z_4, las componentes conexas de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ que hemos definido anteriormente deben coincidir con los conjuntos

$$\left\{z\in\widehat{\mathbb{C}} : \operatorname{Im}(z,z_2,z_3,z_4) > 0\right\}, \qquad \left\{z\in\widehat{\mathbb{C}} : \operatorname{Im}(z,z_2,z_3,z_4) < 0\right\}$$

Esto proporciona el siguiente procedimiento para transformar semiplanos en discos. Elegimos tres puntos z_2, z_3, ∞ en la recta frontera del semiplano y un punto z_1 en el semiplano. Supongamos que $\operatorname{Im}(z_1,z_2,z_3,\infty) > 0$. Entonces elegimos un punto w_1 en el disco y tres puntos w_2, w_3, w_4 en la circunferencia frontera del disco de manera que $\operatorname{Im}(w_1,w_2,w_3,w_4) > 0$. La transformación de Möbius φ dada implícitamente por la igualdad

$$(z,z_2,z_3,\infty) = (\varphi(z),w_2,w_3,w_4)$$

aplica el semiplano dado en el disco.

5.3.4. Simetría respecto de una recta o circunferencia

Las transformaciones de Möbius permiten extender el concepto de simetría respecto de una recta a la simetría respecto de una circunferencia.

Dada $\Gamma \in \mathscr{C}$, diremos que dos puntos $z,w \in \widehat{\mathbb{C}}$ son *simétricos* respecto de Γ si existe una transformación de Möbius, φ, tal que $\varphi(\Gamma) = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y que transforma z,w en puntos simétricos respecto del eje real, esto es, $\overline{\varphi(z)} = \varphi(w)$.

5.12 Proposición. *Sea ψ una transformación de Möbius que deja invariante el eje real. Entonces ψ conserva la simetría respecto del eje real, esto es, $\overline{\psi(z)} = \psi(\overline{z})$.*

Demostración. Sea $x_2 = \psi^{-1}(0)$, $x_3 = \psi^{-1}(1)$ y $x_4 = \psi^{-1}(\infty)$. Deducimos, por **(M 11)**, que $\psi(z) = (z,x_2,x_3,x_4)$. Por hipótesis $x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{R}$. Tomando conjugados:

$$\overline{\psi(z)} = (\overline{z},\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4) = (\overline{z},x_2,x_3,x_4) = \psi(\overline{z})$$

como queríamos probar. ☑

5.13 Proposición. *Dados un punto $z\in\widehat{\mathbb{C}}$ y una recta o circunferencia $\Gamma\in\mathscr{C}$ existe un único punto $z^*\in\widehat{\mathbb{C}}$ que es simétrico de z respecto de Γ.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{M}$ con $\varphi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Definimos $z^* = \varphi^{-1}\left(\overline{\varphi(z)}\right)$. Es claro que z^* es simétrico de z respecto de Γ puesto que por la forma de definirlo $\varphi(z^*) = \overline{\varphi(z)}$.

Si w es simétrico de z respecto de Γ existirá $\chi \in \mathcal{M}$ de forma que $\chi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\chi(z) = \overline{\chi(w)}$. En dicho caso $\chi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{M}$ y deja invariante al eje real, en consecuencia deja invariante la simetría respecto al eje real como afirma la proposición anterior, esto es,

$$\chi(z^*) = \left(\chi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\overline{\varphi(z)}\right) = \overline{\left(\chi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi(z)\right)} = \overline{\chi(z)} = \chi(w)$$

Con lo cual $z^* = w$ por ser χ una biyección. ☑

5.14 Ecuación de la simetría. *Sea $\Gamma \in \mathscr{C}$, tomemos $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ tres puntos distintos. Entonces z, z^* son simétricos respecto de Γ si, y sólo si*

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4) \tag{5.10}$$

En particular, $z \in \Gamma$ si, y sólo si, $z = z^*$.

Demostración. Llamemos $\varphi(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. Tenemos que $\varphi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. En virtud de la unicidad del simétrico, sabemos que z^*, z son simétricos respecto de Γ si, y sólo si, $\varphi(z^*) = \overline{\varphi(z)}$. Escribiendo esta igualdad en términos de razón doble obtenemos la igualdad del enunciado. ☑

Observa que la igualdad 5.10 determina implícitamente z^* como función de z y que la relación que hay entre z y z^* es de la forma $z^* = \varphi(\overline{z})$ donde φ es una transformación de Möbius. En consecuencia, la simetría conserva ángulos en valor absoluto pero invierte su sentido: es una transformación *isogonal* aunque no es conforme. Observa también que, a diferencia de las transformaciones de Möbius, la simetría tiene siempre infinitos puntos fijos: los de Γ.

También es importante observar que, como consecuencia directa de las definiciones dadas y por ser las transformaciones de Möbius aplicaciones conformes, se tiene el siguiente resultado.

5.15 Proposición. *Si z, z^* son puntos simétricos respecto de una recta o circunferencia Γ, entonces cualquier recta o circunferencia Γ' que pase por z y z^* corta ortogonalmente a Γ.*

Simetría respecto de una recta

Veamos a continuación que el concepto de simetría respecto de una recta que acabamos de definir no es otro que el concepto de simetría de la geometría elemental. Sea Γ una recta. Pongamos $z_4 = \infty$ y sean $z_2, z_3 \in \Gamma \setminus \{\infty\}$ dos puntos cualesquiera distintos. La caracterización anterior nos dice que un punto z y su simétrico z^* respecto de Γ deben cumplir:

$$\frac{z^* - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{\overline{z} - \overline{z}_2}{\overline{z}_3 - \overline{z}_2} \tag{5.11}$$

Deducimos que $|z^* - z_2| = |z - z_2|$, donde z_2 es un punto cualquiera de Γ. Esto nos dice que dos puntos simétricos respecto una recta equidistan de cualquiera de sus puntos. Además, de la igualdad 5.11 obtenemos que

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z^* - z_2}{z_3 - z_2}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z - z_2}{z_3 - z_2}\right)$$

es decir, si un punto está en uno de los dos semiplanos definidos por la recta el simétrico se encuentra en el otro semiplano. Concluimos que la recta Γ es la mediatriz del segmento que une los puntos z, z^*.

Comparando la ecuación 5.11 con la 5.9, resulta que la ecuación de la simetría respecto de una recta se obtiene sin más que sustituir z por z^* en la ecuación de la recta.

Simetría respecto de una circunferencia

Supongamos ahora que Γ es una circunferencia que viene dada por

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$$

En este caso $\infty \notin \Gamma$. Tomemos $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ distintos. Teniendo en cuenta que la razón doble es invariante por transformaciones de Möbius, los puntos z y z^* son simétricos respecto de Γ si y, sólo si, se verifica que

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4) = (\overline{z} - \overline{a}, \overline{z}_2 - \overline{a}, \overline{z}_3 - \overline{a}, \overline{z}_4 - \overline{a}) = \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_2 - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_3 - \overline{a}}, \frac{R^2}{\overline{z}_4 - \overline{a}}\right) =$$
$$= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right) = \left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + a, z_2, z_3, z_4\right)$$

Como la razón doble es una biyección obtenemos

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}} + a$$

Observa que si $z = a$ entonces se obtiene que $a^* = \infty$. De forma equivalente

$$(z^* - a)(\overline{z} - \overline{a}) = R^2, \qquad a^* = \infty$$

Tomando módulos obtenemos $|z^* - a|\,|z - a| = R^2$, es decir, si un punto está dentro de la circunferencia el simétrico está fuera. Además ambos puntos z y z^* están en una misma semirrecta con origen en el centro de la circunferencia.

Al igual que antes, la ecuación de la simetría respecto de una circunferencia se obtiene sin más que sustituir z por z^* en la ecuación de la circunferencia.

Observa que la inversión respecto de una circunferencia $C(a,R)^*$ transforma rectas que no pasan por el centro de la circunferencia (que recibe el nombre de *centro de inversión*) en circunferencias que pasan por él (ya que ∞ pertenece a cualquier recta y es el simétrico respecto del centro); y las circunferencias que pasan por el centro las transforma en rectas que no pasan por el centro de inversión.

Construcción geométrica del simétrico de un punto respecto de una circunferencia

Consideremos una circunferencia $C(O,R)^*$. Distinguiremos dos casos: que el punto esté o no esté en el interior del disco $D(O,R)$.

El punto z está dentro del disco $D(O,R)$ En este caso dibujamos la recta que contiene al centro de la circunferencia y al punto z pues sabemos que el simétrico de z, z^*, se encuentra en dicha recta. A continuación trazamos la perpendicular a la recta Oz por el punto z. Esta recta nos da el punto A al cortar a la circunferencia. Por último trazamos la perpendicular a la recta OA por el punto A y calculamos el punto de corte con la recta Oz, este será z^* (ver figura 5.2).

Esto es cierto puesto que el teorema del cateto nos asegura que los dos puntos así construidos cumplen

$$\frac{R}{|Oz^*|} = \frac{|Oz|}{R}$$

de donde $R^2 = |Oz^*|\,|Oz|$. Puesto que el simétrico es único debe ser z^*

El punto z está fuera del disco $D(O,R)$ De nuevo dibujamos la recta que une el centro con el punto z. Encontramos el punto medio de $\overline{Oz}$, B, y trazamos un arco de centro B y radio $|OB|$ que corta a la circunferencia en A. Dibujamos la perpendicular a Oz de forma que corte a A. El pie de la perpendicular es el simétrico de z, z^*.

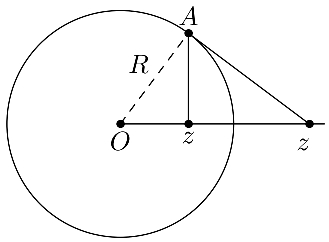


Figura 5.2: z es interior al disco $D(0,R)$

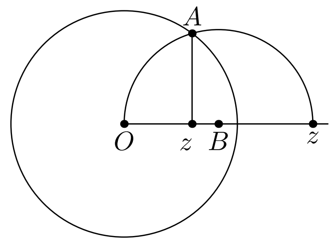


Figura 5.3: z es exterior al disco $D(0,R)$

5.16 Principio de simetría. *Las transformaciones de Möbius conservan la simetría. Es decir, si* $\Gamma\in\mathscr{C}$, $z,z^*\in\widehat{\mathbb{C}}$ *son simétricos respecto de* Γ *y* $\varphi\in\mathcal{M}$, *entonces* $\varphi(z)$ *y* $\varphi(z^*)$ *son simétricos respecto de* $\varphi(\Gamma)$.

Demostración. Puesto que z,z^* son simétricos respecto de Γ existe $\chi\in\mathcal{M}$ de forma que $\chi(\Gamma)=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ y $\chi(z)=\overline{\chi(z^*)}$. Consideremos la transformación de Möbius $\chi\circ\varphi^{-1}$ Tenemos que

$$\chi\circ\varphi^{-1}\big(\varphi(\Gamma)\big)=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$$

Además, $\left(\chi\circ\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(z)\right)=\chi(z)=\overline{\chi(z^*)}=\overline{\left(\chi\circ\varphi^{-1}\right)\left(\varphi(z^*)\right)}$. Luego, por definición, $\varphi(z)$ y $\varphi(z^*)$ son simétricos respecto de $\varphi(\Gamma)$. $\boxed{\checkmark}$

Transformaciones de Möbius que llevan el semiplano superior al disco unidad

Supongamos que $\varphi\in\mathcal{M}$ transforma el semiplano superior en el disco unidad. En primer lugar, por conexión, φ transforma el eje real en la circunferencia unidad. Sea α en el semiplano superior tal que $\varphi(\alpha)=0$. El simétrico de α respecto el eje real, es decir, $\overline{\alpha}$, debe transformarse en el simétrico de $\varphi(\alpha)=0$ respecto la circunferencia unidad, es decir, $\varphi(\overline{\alpha})=\infty$.

Si escribimos $\varphi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ las condiciones anteriores implican que

$$\varphi(\alpha)=0\Rightarrow a\alpha+b=0\Rightarrow b=-a\alpha$$
$$\varphi(\overline{\alpha})=\infty\Rightarrow c\overline{\alpha}+d=0\Rightarrow d=-c\overline{\alpha}$$

con lo cual $\varphi(z)=\dfrac{a}{c}\,\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$. Además debe ser $|\varphi(0)|=\left|\dfrac{a}{c}\right|=1$, es decir, $\dfrac{a}{c}=e^{i\theta}$ con lo cual deducimos que φ debe ser de la forma

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\,\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}, \qquad (\alpha\in\mathbb{C},\ \operatorname{Im}\alpha > 0,\ \theta\in\mathbb{R})$$

Recíprocamente, es fácil ver que cualquier transformación de la forma indicada aplica el semiplano superior en el disco unidad.

5.4. Lema de Schwarz. Automorfismos conformes del disco unidad

El siguiente resultado, a pesar de que sus hipótesis parecen muy restrictivas, es extraordinariamente útil como tendremos ocasión de ver en lo que sigue.

5.17 Lema de Schwarz. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad $D(0,1)$ verificando que $|f(z)|\leqslant 1$ para todo $z\in D(0,1)$, y $f(0)=0$. Entonces:*

(a) $|f(z)|\leqslant |z|$ *para todo* $z\in D(0,1)$

(b) $|f'(0)|\leqslant 1$

Además, si existe un punto del disco unidad no nulo para el cual se da la igualdad en (a) o bien si $|f'(0)|=1$, entonces f es un giro, es decir, existe $\lambda\in\mathbb{C}$ con $|\lambda|=1$ tal que $f(z)=\lambda z$ para todo $z\in D(0,1)$.

Demostración. Definimos $g : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \qquad z\neq 0$$
$$g(0) = f'(0)$$

Puesto que $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = \lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)}{z} = f'(0) = g(0)$, tenemos que g es continua en 0. El teorema de extensión de Riemann nos dice que g es holomorfa en el disco unidad.

Sea $z\in D(0,1)$ un punto cualquiera fijo. Tomemos $r>0$ de forma que $|z|<r<1$. Tenemos

$$\begin{aligned}|g(z)| &\leqslant \text{máx}\{|g(w)| : |w|\leqslant r\} = (\text{principio del módulo máximo})\\ &= \text{máx}\left\{\frac{|f(w)|}{|w|} : |w| = r\right\} = \left\{\frac{|f(w)|}{r} : |w| = r\right\} \leqslant (\text{por hipótesis}) \leqslant \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Haciendo $r\to 1$, obtenemos $|g(z)|\leqslant 1$ y esta desigualdad es válida para todo $z\in D(0,1)$. Hemos probado así las condiciones (a) y (b) del enunciado.

Si se da la igualdad en (a) para algún $z_0 \in D(0,1)\setminus\{0\}$ tenemos que $|f(z_0)| = |z_0|$, es decir, $|g(z_0)| = 1$ y $|g|$ alcanza el máximo en un punto interior luego, por el principio del módulo máximo, g es constante en $D(0,1)$ y deberá ser $g(z) = \lambda$ con $|\lambda| = 1$ y, por tanto, $f(z) = \lambda z$ para todo $z \in D(0,1)$ y f es un giro.

En el caso de que $|f'(0)| = 1$ tenemos $|g(0)| = 1$ y razonando igual que antes volvemos a obtener que f es un giro. ✓

Automorfismos conformes del disco unidad

Para cada $a \in D(0,1)$ definimos

$$\psi_a(z) = \frac{z-a}{1-z\overline{a}}$$

Entonces ψ_a es una transformación de Möbius y

$$|\psi_a(z)| < 1 \Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-z\overline{a}|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{a}) < 1 + |za|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{a}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 - 1 - |za|^2 < 0 \Leftrightarrow (|a|^2-1)(1-|z|^2) < 0 \Leftrightarrow 1-|z|^2 > 0 \Leftrightarrow |z| < 1$$

Deducimos que ψ_a es un automorfismo de $D(0,1)$. Es fácil comprobar que $\psi_a^{-1} = \psi_{-a}$.

5.18 Proposición. *Los automorfismos conformes del disco unidad son las transformaciones de Möbius de la forma*

$$\boxed{\lambda\psi_a(z) = \lambda\frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \qquad (\lambda, a \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1,\ |a| < 1)} \tag{5.12}$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{M}$ un automorfismo del disco unidad. Esto implica que ψ conserva la circunferencia unidad, $\psi\big(C(0,1)^*\big) = C(0,1)^*$.

Sea $a \in D(0,1)$ tal que $\psi(a) = 0$. Como el simétrico de a respecto a la circunferencia unidad es $1/\overline{a}$ deberá ser $\psi(1/\overline{a}) = \infty$. Puesto que ψ es de la forma $\psi(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, deducimos que

$$\psi(a) = 0 \Rightarrow \alpha a + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha a$$
$$\psi(1/\overline{a}) = \infty \Rightarrow \gamma\frac{1}{\overline{a}} + \delta = 0 \Rightarrow \gamma = -\delta\overline{a}$$

de donde $\psi(z)=\dfrac{\alpha}{\delta}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Además debe ocurrir que $1=|\psi(1)|=\left|\dfrac{\alpha}{\delta}\right|$. Hemos obtenido que ψ es de la forma indicada en 5.12. Veamos que son los únicos.

Sea $f\in \operatorname{Aut}\big(D(0,1)\big)$. Llamemos $a=f^{-1}(0)\in D(0,1)$ y consideremos el automorfismo del disco unidad $\chi=f\circ\psi_a^{-1}$. Como $\chi(0)=0$, estamos en condiciones de aplicar el lema de Schwarz a χ. Deducimos que

$$|\chi(z)|\leqslant|z| \qquad |z|<1$$

Por el mismo razonamiento para $\chi^{-1}=\psi_a\circ f^{-1}$ tenemos

$$\left|\chi^{-1}(z)\right|\leqslant|z| \qquad |z|<1$$

Obtenemos así que para todo $z\in D(0,1)$ es

$$|z|=\left|\chi^{-1}(\chi(z))\right|\leqslant|\chi(z)|\leqslant|z|$$

es decir $|\chi(z)|=|z|$ para todo $z\in D(0,1)$. El lema de Schwarz implica que χ es un giro, esto es, existe $\lambda\in\mathbb{C}$ con $|\lambda|=1$ de forma que $\chi(z)=\lambda z$. Luego $f(z)=\lambda\psi_a(z)$. ☑

5.19 Corolario. *Sean Ω_1 y Ω_2 dominios en $\mathbb{C}$ que son semiplanos o discos. Entonces dichos dominios son isomorfos y los isomorfismos de Ω_1 sobre Ω_2 son las transformaciones de Möbius que aplican Ω_1 sobre Ω_2.*

$$Iso(\Omega_1,\Omega_2)=\left\{\varphi_{|\Omega_1}:\varphi\in\mathcal{M},\ \varphi(\Omega_1)=\Omega_2\right\}$$

Demostración. Por lo visto al estudiar las transformaciones de discos y semiplanos, sabemos Ω_1 y Ω_2 son isomorfos y también sabemos que entre discos y semiplanos hay isomorfismos que vienen dados por transformaciones de Möbius. Sea $f\in \operatorname{Iso}(\Omega_1,\Omega_2)$. Sean $\varphi,\psi\in\mathcal{M}$ tales que $\varphi(D(0,1))=\Omega_1$ y $\psi(\Omega_2)=D(0,1)$. Entonces $\psi\circ f\circ\varphi\in\operatorname{Aut}(D(0,1))$, por tanto $\psi\circ f\circ\varphi\in\mathcal{M}$, lo que implica que f es una transformación de Möbius. ☑

Observaciones sobre el lema de Schwarz

El lema de Schwarz puede aplicarse en condiciones más generales que las consideradas hasta ahora. Supongamos que Ω_1 y Ω_2 son dominios isomorfos al disco unidad y sea $f\in\mathcal{H}(\Omega_1,\Omega_2)$. En estas condiciones el lema de Schwarz puede aplicarse para obtener información no trivial sobre f. Para ello tomamos un punto $a\in\Omega_1$ e isomorfismos $\psi\in\operatorname{Iso}(D(0,1),\Omega_1)$ y $\varphi\in\operatorname{Iso}(\Omega_2,D(0,1))$ tales que $\psi(0)=a$ y $\varphi(f(a))=0$.

$$\begin{tikzcd}
a\in\Omega_1 \arrow[r, "f"] & \Omega_2\ni f(a) \arrow[dl, "\varphi"] \\
0\in D(0,1) \arrow[u, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

La aplicación $g=\varphi\circ f\circ\psi$ verifica las hipótesis del lema de Schwarz y, por tanto $|g(z)|\leqslant|z|$ y $|g'(0)|\leqslant 1$ desigualdades que deben ser estrictas en todo punto del disco unidad $z\neq 0$ y, en caso contrario g es un giro. Si se da esta última condición tenemos prácticamente determinada a f. Un ejemplo de esta forma de proceder es el siguiente resultado.

5.20 Lema de Schwarz-Pick. *Sea $f\in\mathcal{H}(D(0,1))$ con $|f(z)|\leqslant 1$ para todo $z\in D(0,1)$. Entonces, para todo $z\in D(0,1)$ se verifica que*

$$|f(z)|\leqslant\frac{|z|+|f(0)|}{1-|z|\,|f(0)|},\qquad |f'(z)|\leqslant\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$$

Además, si en alguna de las desigualdades anteriores se verifica la igualdad para un punto $z\neq 0$, entonces f es un automorfismo del disco unidad.

Demostración. Sea $a\in D(0,1)$, $a\neq 0$, fijo en lo que sigue. Componiendo f con convenientes automorfismos del disco podemos obtener una función que fije el cero. Para ello consideramos los automorfismos del disco unidad dados por

$$\psi(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z},\qquad \varphi(z)=\frac{z-f(a)}{1-\overline{f(a)}z}$$

Podemos ahora aplicar el lema de Schwarz a la función $g=\varphi\circ f\circ\psi$ para obtener que $|g'(0)|\leqslant 1$. Por la regla de la cadena $g'(0)=\psi'(0)f'(a)\varphi'(f(a))$. Es inmediato que

$$\psi'(0)=1-|a|^2\qquad \varphi'(f(a))=\frac{1}{1-|f(a)|^2}$$

Por tanto

$$|f'(a)|\leqslant\frac{1-|f(a)|^2}{1-|a|^2}$$

Si se da la igualdad, entonces $|g'(0)| = 1$, por tanto, g es un giro y $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \psi^{-1}$ es un automorfismo del disco unidad.

Supongamos ahora que $a = 0$ en cuyo caso ψ es la identidad. De nuevo por el Lema de Schwarz tenemos $|g(z)| \leqslant |z|$ para todo $z \in D(0,1)$, esto es,

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{1 - \overline{f(0)} f(z)} \right| \leqslant |z|$$

de donde

$$|f(z)| - |f(0)| \leqslant |f(z) - f(0)| \leqslant |z| |1 - \overline{f(0)} f(z)| \leqslant |z| (1 + |f(0)|\, |f(z)|)$$

lo que implica que

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z| + |f(0)|}{1 - |z|\, |f(0)|}$$

Si se da la igualdad en un punto $z \neq 0$, entonces $|g(z)| = |z|$ por tanto g es un giro y $f = \varphi^{-1} \circ g \in \operatorname{Aut}(D(0,1))$. $\boxed{\checkmark}$

Otros ejemplos de isomorfismos conformes

La exponencial compleja restringida a una banda horizontal de amplitud menor que 2π es inyectiva, por tanto es un isomorfismo conforme de dicha banda sobre su imagen. Si α, β son reales verificando $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 2\pi$ y

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$$

entonces $\exp(\Omega_1) = \Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Arg}(z) \cap]\alpha, \beta[\neq \emptyset\}$. Es decir, la exponencial transforma bandas horizontales en sectores angulares.

Toda banda es isomorfa a $D(0,1)$. En efecto, mediante un giro, una traslación y una homotecia se puede transformar cualquier banda en la banda horizontal

$$\{z \in \mathbb{C} : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$

La exponencial transforma esta banda en el semiplano de la derecha, el cual sabemos que es isomorfo a $D(0,1)$.

Para establecer isomorfismos conformes entre sectores angulares de distinta amplitud, podemos usar potencias. Sea $-\pi \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$ y sea $\rho > 0$ tal que $-\pi \leqslant \rho\alpha < \rho\beta \leqslant \pi$. La función

$$f(z) = z^{\rho} = e^{\rho \log(z)}$$

es un isomorfismo conforme de

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < \arg(z) < \beta\}$$

sobre

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < \arg(z) < \rho\beta\}$$

Observa que aunque $f(z) = z^\rho$ no es (salvo si $\rho = 1$) conforme en 0 (porque, si $\rho \neq 1$, o bien f no es derivable en 0 o su derivada en 0 es nula) pero !$0 \notin \Omega_1$!. En Ω_1 f es derivable e inyectiva.

Por ejemplo, la aplicación $z \mapsto z^3$ es un isomorfismo del sector $\{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < \pi/3\}$ sobre el semiplano superior.

5.4.1. Ejercicios propuestos

293. Las circunferencias máximas de la esfera son los cortes de $\mathbb{S}$ con los planos que pasan por el origen. Prueba que la proyección estereográfica de una circunferencia $C(a,R)^* \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia máxima de $\mathbb{S}$ si, y sólo si, $R^2 = 1 + |a|^2$.

294. Calcula la circunferencia del plano cuya proyección estereográfica es la circunferencia máxima de la esfera que pasa por los puntos $(3/13, -4/13, 12/13)$ y $(-2/3, 2/3, 1/3)$.

295. Encuentra la relación entre las proyecciones en la esfera de los siguientes pares de puntos:

a) $z, -z$ **b)** $z, \overline{z}$ **c)** $z, 1/z$ **d)** $z, 1/\overline{z}$

296. Prueba que dos puntos $z, w \in \mathbb{C}$ se proyectan en puntos diametralmente opuestos de la esfera si, y sólo si, $z\overline{w} = -1$.

297. Dados dos puntos z_1 y z_2, halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya proyección estereográfica es el conjunto de puntos de la esfera que equidistan de las proyecciones de z_1 y z_2. Interpreta el resultado obtenido.

298. Sean Ω_i, $i = 1, 2, 3$ dominios isomorfos. Supongamos que conocemos un isomorfismo $\varphi \in \operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$. Prueba que

$$\operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_3) = \{f \circ \varphi : f \in \operatorname{Iso}(\Omega_2, \Omega_3)\}$$

En particular, puede ser $\Omega_2 = \Omega_3$. Es decir, si conocemos $\operatorname{Aut}(\Omega_2)$ y conocemos *un* isomorfismo particular $\varphi \in \operatorname{Iso}(\Omega_1, \Omega_2)$, entonces conocemos *todos* los isomorfismos de Ω_1 sobre Ω_2.

299. Prueba que toda transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene uno o dos puntos fijos en $\overline{\mathbb{C}}$. Determina todas las las transformaciones de Möbius que tienen:

a) ∞ como único punto fijo,

b) 0 e ∞ como puntos fijos.

300. Dados dos números complejos distintos a y b, halla la ecuación general de todas las circunferencias respecto de las cuales a y b son simétricos. Prueba que cualquier circunferencia que pase por a y b es ortogonal a cualquier circunferencia respecto de la cual a y b son simétricos.

301. Determina todos los isomorfismos conformes del primer cuadrante sobre el disco unidad.

302. Determina un isomorfismo conforme del primer cuadrante sobre la mitad superior del disco unidad.

303. Determina, en cada uno de los siguientes casos, la imagen del dominio Ω por la transformación φ.

a) $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}, \ \ \varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$

b) $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}, \ \ \varphi(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$

c) $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\}, \ \ \varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

d) $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \ \ \varphi(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$

e) $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}, \ \ \varphi(z) = \dfrac{z}{z-1}$

309. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad en una recta vertical, el punto 4 en 0 y la circunferencia de centro 0 y radio 2 en sí misma.

310. Encuéntrese una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad sobre la de centro 1 y radio 2, deje fijo el punto -1 y lleve el punto 0 al i.

311. Prueba que el dominio $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \ |z-2| > 1\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

312. Prueba que el dominio $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z| < 5, \ |z-2| > 2\}$ es isomorfo al anillo $A(0;\rho,1)$ para conveniente valor de ρ con $0 < \rho < 1$.

313. Sea φ una transformación de Möbius con dos puntos fijos $a, b \in \mathbb{C}$. Prueba que φ puede expresarse de la forma:

$$\frac{\varphi(z)-a}{\varphi(z)-b} = \lambda \frac{z-a}{z-b}$$

para conveniente valor de $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Dedúzcase que:

a) Toda recta o circunferencia que pase por a y b se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, λ es real.

b) Toda recta o circunferencia respecto de la cual a y b sean puntos simétricos se aplica por φ en sí misma si, y sólo si, $|\lambda| = 1$.

314. Halla una transformación de Möbius que deje invariante la circunferencia de centro 0 y radio 5 y tenga 5 como único punto fijo.

315. Construye un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2 en cada uno de los siguientes casos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg z| < \pi/4\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| < \sqrt{2}\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

e) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

f) $\Omega_1 = D(0,1) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z + i\sqrt{3}| > 2\}$, $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$

g) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

h) $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

i) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |2z-1| > 1\}$, $\Omega_2 = D(0,1)$

325. Sea f una función holomorfa en el disco unidad, verificando que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2i$ y $\operatorname{Re} f(z) \geqslant 0$ para todo z en $D(0,1)$. Prueba que $f(z) = \dfrac{1+iz}{1-iz}$ para todo $z \in D(0,1)$.

326. Sean $0 < r < R$, $0 < s < S$ y a, b dos números complejos. Prueba que para que exista una transformación de Möbius que aplique el anillo $A(a; r, R)$ sobre el anillo $A(b; s, S)$ es condición necesaria y suficiente que $R/r = S/s$.

327. ¿Puede existir un isomorfismo conforme entre los anillos $A(0; 0, 1)$ y $A(0; 1, 2)$? Justifica la respuesta.

328. Sean f y g transformaciones de Möbius ninguna de ellas igual a la identidad. Estudia la relación existente entre las afirmaciones siguientes:

a) f y g conmutan, es decir, $f(g(z)) = g(f(z))$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

b) f y g tienen los mismos puntos fijos.

329. Prueba que una función holomorfa del disco unidad en sí mismo que tiene dos puntos fijos es igual a la identidad.

330. Construye un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1,\ |z-i| < 1\}$$

sobre el disco unidad.

331. Prueba que, para conveniente valor de ρ con $0<\rho<1$, el dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| > \rho\}$$

es isomorfo al anillo $A(0;1,2)$ y describe todas las transformaciones de Möbius que aplican Ω sobre $A(0;1,2)$.

332. Construye un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2,\ |z-\sqrt{2}| < \sqrt{2}\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

333. Construye un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0,\ \left|z - \frac{1-i}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

sobre el disco unidad abierto.

334. Construye un isomorfismo conforme del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \left|z + \frac{5}{4}i\right| > \frac{3}{4}\right\}$$

sobre la mitad del disco unidad abierto que está contenida en el semiplano superior.

335. Construye un isomorfismo conforme, φ, del dominio

$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| < \frac{\pi}{4}\right\}$$

sobre el disco unidad, verificando que $\varphi(1)=0$ y $\varphi(2)=\frac{3}{5}$. Justifica que tal isomorfismo es único.

336. Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que $|f(z)| \leqslant 1$ para todo $z \in D(0,1)$. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ ceros de f en $D(0,1)$. Prueba que:

$$|f(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right| \quad (z \in D(0,1))$$

337. Sea $f:\overline{D}(0,1)\to\mathbb{C}$ una función meromorfa no constante en el disco $D(0,1)$, continua en $\overline{D}(0,1)\setminus\mathcal{P}$, donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de los polos de f, y tal que $|f(z)|=1$ si $|z|=1$. Describe cómo es f.

338. Sean $a_1,a_2,\dots,a_n$ y b puntos del disco $D(0,1)$. Prueba que la ecuación

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}z}=b$$

tiene n soluciones en $D(0,1)$.

5.5. Espacios de funciones holomorfas

5.5.1. Topología de la convergencia uniforme en compactos

Hasta ahora la única estructura que hemos considerado en $\mathcal{C}(\Omega)$ ha sido la algebraica. Queremos definir ahora una topología en $\mathcal{C}(\Omega)$ de forma que la convergencia de una sucesión en dicha topología sea lo mismo que la convergencia uniforme sobre compactos de Ω. De hecho, vamos a definir dicha topología en el conjunto $\mathcal{C}(\Omega)$ de las funciones complejas continuas en Ω. En lo que sigue Ω será un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$.

Dados $f\in\mathcal{C}(\Omega)$, $\varepsilon>0$ y un conjunto compacto $K\subset\Omega$, definimos el conjunto

$$U(f,K,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{C}(\Omega):|g(z)-f(z)|<\varepsilon,\ \forall z\in K\}$$

5.21 Proposición. *Existe una única topología $\mathcal{T}$ en $\mathcal{C}(\Omega)$ tal que para toda $f\in\mathcal{H}(\Omega)$, la familia de conjuntos*

$$\{U(f,K,\varepsilon):K\subset\Omega\ \text{compacto},\ \varepsilon>0\}$$

es una base de entornos abiertos de f.
Además, la convergencia de una sucesión en la topología $\mathcal{T}$ es lo mismo que la convergencia uniforme sobre compactos de Ω.
La topología $\mathcal{T}$ se llama topología de la convergencia uniforme en compactos.

Demostración. Diremos que un conjunto $A\subset\mathcal{C}(\Omega)$ es abierto, es decir $A\in\mathcal{T}$, si para toda $f\in A$ existe un conjunto $U(f,K,\varepsilon)\subset A$. Naturalmente, el compacto K y el número $\varepsilon>0$ pueden depender de f. Convenimos también en que $\emptyset\in\mathcal{T}$.

Es fácil comprobar que la familia $\mathscr{T}$ de subconjuntos de $\mathcal{C}(\Omega)$ que acabamos de definir es una topología. Puesto que los elementos de $\mathscr{T}$ son uniones de conjuntos de la forma $U(f,K,\varepsilon)$ es claro que $\mathscr{T}$ es estable por uniones arbitrarias. Sean $A_1,A_2\in\mathscr{T}$ y sea $f\in A_1\cap A_2$. Por definición, existen conjuntos compactos K_1,K_2 y números positivos $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ tales que $U(f,K_1,\varepsilon_1)\subset A_1$ y $U(f,K_2,\varepsilon_2)\subset A_2$. Tomando $K=K_1\cup K_2$ y $\varepsilon=\text{mín}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, tenemos que

$$U(f,K,\varepsilon)\subset U(f,K_i,\varepsilon_i)\ \ i=1,2\Rightarrow U(f,K,\varepsilon)\subset A_1\cap A_2$$

Falta ver que los conjuntos $U(f,K,\varepsilon)$ son abiertos. Para ello, sea $g\in U(f,K,\varepsilon)$, y definamos $\rho=\text{máx}\{|f(z)-g(z)|:z\in K\}$. Es claro que $0\leqslant\rho<\varepsilon$. Comprobemos que $U(g,K,\varepsilon-\rho)\subset U(f,K,\varepsilon)$. En efecto

$$\begin{aligned}h\in U(g,K,\varepsilon-\rho)&\Rightarrow|h(z)-g(z)|<\varepsilon-\rho,\ \text{ para todo } z\in K\\&\Rightarrow|h(z)-f(z)|\leqslant|h(z)-g(z)|+|g(z)-f(z)|<\varepsilon-\rho+\rho=\varepsilon,\ \text{ para todo } z\in K\\&\Rightarrow h\in U(f,K,\varepsilon)\end{aligned}$$

Por definición de convergencia de una sucesión de puntos en un espacio topológico, una sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas en Ω converge a $f\in\mathcal{C}(\Omega)$ en la topología $\mathscr{T}$, si para cada entorno $U(K,f,\varepsilon)$ existe n_0 tal que para todo $n\geqslant n_0$ se tiene que $f_n\in U(f,K,\varepsilon)$. Equivalentemente, para cada compacto $K\subset\Omega$ y para cada $\varepsilon>0$, existe n_0 tal que para todo $n\geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ para todo $z\in K$, esto es, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sobre compactos de Ω. $\boxed{\checkmark}$

5.22 Definición. Diremos que $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω si para cada $n\in\mathbb{N}$, $K_n\subset\Omega$ es un compacto, K_n está contenido en el interior de K_{n+1} y $\Omega=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}K_n$.

En todo abierto hay sucesiones exhaustivas de compactos. Por ejemplo, supuesto que $\Omega\neq\mathbb{C}$, la definida por $K_n=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant n,\operatorname{dist}(z,\mathbb{C}\setminus\Omega)\geqslant 1/n\}$. Si $\Omega=\mathbb{C}$ basta considerar $K_n=\overline{D}(0,n)$. Es claro que si $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω, entonces para cada compacto $K\subset\Omega$ se tiene que $K\subset K_n$ para algún $n\in\mathbb{N}$.

Si $\{K_n\}$ es una sucesión exhaustiva de compactos de Ω, es fácil ver que la familia $\{U(f,K_n,1/n):n\in\mathbb{N}\}$ es una base de entornos de f en la topología de la convergencia uniforme en compactos.

Vamos a probar que la topología de la convergencia uniforme sobre compactos puede definirse por medio de una distancia, es decir, se trata de una topología metrizable.

5.23 Proposición. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $\{K_n\}$ una sucesión exhaustiva de compactos de Ω. Para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $f\in\mathcal{C}(\Omega)$, definimos*

$$\varphi_n(f) = \text{máx}\{|f(z)| : z\in K_n\}$$

Entonces la aplicación $d : \mathcal{C}(\Omega)\times\mathcal{C}(\Omega)\to\mathbb{R}$ dada por

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\varphi_n(f-g)}{1+\varphi_n(f-g)}, \qquad (f,g\in\mathcal{C}(\Omega))$$

es una distancia en $\mathcal{C}(\Omega)$.

Demostración. Es inmediato que $d(f,g)=d(g,f)$ y que $d(f,g)=0$ si, y sólo si $f=g$. Probaremos la desigualdad triangular. Para ello, usaremos que la aplicación $x\mapsto\dfrac{x}{1+x}$ es creciente para $x\geqslant 0$. Si f,g,h son elementos en $\mathcal{C}(\Omega)$, es claro que

$$\varphi_n(f-g)\leqslant\varphi_n(f-h)+\varphi_n(f-g)$$

de donde

$$\frac{\varphi_n(f-g)}{1+\varphi_n(f-g)}\leqslant\frac{\varphi_n(f-h)+\varphi_n(h-g)}{1+\varphi_n(f-h)+\varphi_n(h-g)}\leqslant\frac{\varphi_n(f-h)}{1+\varphi_n(f-h)}+\frac{\varphi_n(h-g)}{1+\varphi_n(h-g)}$$

Multiplicando por $\dfrac{1}{2^n}$ y sumando la serie resulta que $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)$. ☑

5.24 Lema.

i) *Dados un compacto $K\subset\Omega$ y $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que*

$$f,\,g\in\mathcal{C}(\Omega),\; d(f,g)<\delta\Rightarrow g\in U(f,K,\varepsilon)$$

ii) *Dado $\delta>0$ existen un compacto $K\subset\Omega$ y $\varepsilon>0$ tales que*

$$f,g\in\mathcal{C}(\Omega),\; g\in U(f,K,\varepsilon)\Rightarrow d(f,g)<\delta$$

Como consecuencia, la topología de la convergencia uniforme sobre compactos coincide con la topología definida en $\mathcal{C}(\Omega)$ por la distancia d.

Demostración.

i) Dados el compacto K y $\varepsilon > 0$, elegimos m tal que $K \subset K_m$. Tomemos $\delta > 0$ verificando $0 < 1 - 2^m\delta$ y $\dfrac{2^m\delta}{1-2^m\delta} < \varepsilon$. Entonces si $d(f,g) < \delta$, se tiene que

$$\frac{\varphi_m(g-f)}{1+\varphi_m(g-f)} < 2^m d(f,g) < 2^m\delta$$

y por tanto

$$\varphi_m(f-g) < \frac{2^m\delta}{1-2^m\delta} < \varepsilon \Rightarrow g \in U(f,K,\varepsilon).$$

ii) Dado $\delta > 0$, elegimos m tal que $1/2^m < \delta/2$. Tomemos $K = K_m$ y $\varepsilon = \delta/2$. Entonces para $g \in U(f,K,\varepsilon)$, tenemos que $\varphi_m(f-g) < \delta/2$. Deducimos que

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}\frac{\varphi_n(f-g)}{1+\varphi_n(f-g)} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{\varphi_n(f-g)}{1+\varphi_n(f-g)} < \frac{\delta}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2^m} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Hemos probado que cada entorno básico de un punto en la topología de la convergencia uniforme en compactos contiene un entorno básico de dicho punto en la topología definida por la distancia y recíprocamente, por tanto ambas coinciden. ☑

El hecho de que la topología de la convergencia uniforme en compactos coincida con la definida por la distancia d nos dice que la convergencia de una sucesión en el espacio métrico $\big(\mathcal{C}(\Omega), d\big)$ es lo mismo que la convergencia de dicha sucesión en el espacio topológico $\big(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{T}\big)$. Como la condición de Cauchy con la distancia d es, como puede comprobarse fácilmente, la condición de Cauchy uniforme en compactos, lo cual, según sabemos, implica convergencia en $\big(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{T}\big)$, deducimos, por lo antes dicho, que la distancia d es completa.

La razón de introducir primero la topología y después la distancia es que la definición de la topología es *intrínseca*, mientras que la distancia depende de la sucesión exhaustiva de compactos que usemos para definirla. Por ello resulta más clarificador trabajar directamente con la topología en vez de hacerlo con la distancia. No obstante, el hecho de que la topología sea metrizable será usado más adelante para caracterizar los subconjuntos compactos de $\big(\mathcal{C}(\Omega), \mathcal{T}\big)$.

En el contexto actual, el teorema de convergencia de Weierstrass para sucesiones de funciones holomorfas puede enunciarse como sigue.

5.25 Teorema.

i) *$\mathcal{H}(\Omega)$ es un conjunto cerrado en $\mathcal{C}(\Omega)$.*

ii) *La aplicación $f \mapsto f'$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ es continua.*

5.5.2. Conjuntos compactos de funciones continuas. Teorema de Ascolí-Arzelá

Teniendo en cuenta que la topología de la convergencia uniforme en compactos es metrizable, podemos caracterizar la compacidad en dicha topología por sucesiones al igual que se hace en los espacios métricos.

5.26 Definición. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

a) Se dice que $\mathcal{F}$ es *relativamente compacto* si cualquier sucesión de puntos de $\mathcal{F}$ tiene una sucesión parcial convergente en $\mathcal{C}(\Omega)$; equivalentemente, $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto.

b) Se dice $\mathcal{F}$ está *puntualmente acotado* si para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

c) Se dice $\mathcal{F}$ está *acotado en compactos* si para cada compacto $K \subset \Omega$ hay un número $M_K > 0$ tal que para todo $z \in K$ y toda $f \in \mathcal{F}$ se verifica que $|f(z)| \leqslant M_K$.

d) Se dice que $\mathcal{F}$ es *puntualmente equicontinuo* si para cada $a \in \Omega$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y para todo $z \in D(a,\delta)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$ se verifica que $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$.

5.27 Proposición. *Supongamos que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\Omega)$. Entones $\mathcal{F}$ está acotado en compactos y es puntualmente equicontinuo.*

Demostración. Dado un compacto $K \subset \Omega$ la familia de abiertos $\left\{U(f,K,1) : f \in \overline{\mathcal{F}}\right\}$ es un recubrimiento por abiertos del compacto $\overline{\mathcal{F}}$, luego tiene que haber un número finito de funciones $f_j \in \overline{\mathcal{F}}$, $1 \leqslant j \leqslant p$ de manera que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^{p} U(f_j,K,1)$. Sea $M_j = \text{máx}\left\{\left|f_j(z)\right| : z \in K\right\}$

y $M = \text{máx}\left\{M_j : 1 \leqslant j \leqslant p\right\}$. Entonces, dada $f \in \mathcal{F}$ hay algún j tal que $f \in U(f_j, K, 1)$ y, por tanto, para todo $z \in K$ tenemos que

$$|f(z)| \leqslant \left|f(z) - f_j(z)\right| + \left|f_j(z)\right| \leqslant 1 + M_j \leqslant 1 + M$$

Lo que prueba que $\mathcal{F}$ está uniformemente acotado en compactos.

Fijemos ahora $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Pongamos $K = \overline{D}(a,r)$. Dado $\varepsilon > 0$, la familia $\{U(f,K,\varepsilon) : f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ es un recubrimiento por abiertos de $\overline{\mathcal{F}}$. Por la compacidad de $\overline{\mathcal{F}}$, existe un número finito de elementos $g_1, \cdots, g_n$ de $\overline{\mathcal{F}}$ tal que $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{j=1}^{n} U(g_j, K, \varepsilon)$. Por la continuidad de cada una de las funciones g_j podemos encontrar un número $0 < \delta < r$ tal que

$$|z - a| < \delta \Rightarrow |g_j(z) - g_j(a)| < \varepsilon \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Dada $f \in \mathcal{F}$, entonces para algún j se tiene que $f \in U(g_j, K, \varepsilon)$. Por tanto si $|z - a| < \delta$ obtenemos

$$|f(z) - f(a)| \leqslant |f(z) - g_j(z)| + |g_j(z) - g_j(a)| + |g_j(a) - g(a)| < 3\varepsilon$$

Hemos probado así que $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinuo. $\boxed{\checkmark}$

5.28 Teorema de Ascolí–Arzelá. *Un subconjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega)$ es relativamente compacto si, y sólo si, es puntualmente acotado y puntualmente equicontinuo.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotado y puntualmente equicontinuo. Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $\mathcal{F}$, por la acotación puntual de $\mathcal{F}$, se tiene que para cada $a \in \Omega$ la sucesión $\{f_n(a)\}$ es acotada y, por tanto, tiene una parcial convergente.

Fijamos un conjunto numerable $E = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ que sea denso en Ω. Empezamos probando que hay una parcial de $\{f_n\}$ que converge puntualmente en E. Para cada $j \in \mathbb{N}$ la sucesión $\left\{f_n(a_j)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. Sea $\{f_{\sigma_1(n)}(a_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una parcial convergente de $\{f_n(a_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como la sucesión $\{f_{\sigma_1(n)}(a_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada tiene una parcial $\{f_{\sigma_1 \circ \sigma_2(n)}(a_2)\}$ convergente. Naturalmente, la sucesión $\{f_{\sigma_1 \circ \sigma_2(n)}(a_1)\}$ también converge por ser parcial de una sucesión convergente. De esta forma, por inducción, obtenemos que hay una sucesión, $\{\sigma_n\}$, de aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente crecientes de manera que, definiendo $\tau_k = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k$ se verifica que $\{f_{\tau_k(n)}(a_j)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $1 \leqslant j \leqslant k$.

La aplicación dada por $\sigma(n) = \tau_n(n)$ es estrictamente creciente. Veamos que la sucesión $\{f_{\sigma(n)}\}$ converge puntualmente en E. Pongamos, por comodidad de notación $g_n = f_{\sigma(n)}$.

Para k fijo, tenemos que

$$g_{n+k}(a_k) = f_{\sigma(n+k)}(a_k) = f_{\tau_{n+k}(n+k)}(a_k) = f_{\sigma_1\circ\sigma_2\circ\cdots\circ\sigma_{n+k}(n+k)}(a_k) = f_{\tau_k\circ(\sigma_{k+1}\circ\cdots\circ\sigma_{n+k})(n+k)}(a_k),$$

lo que nos dice que $\{g_{n+k}(a_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una parcial de $\{f_{\tau_k(n)}(a_k)\}_n$, y por tanto converge, lo que, evidentemente, implica que $\{g_n(a_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Usando la densidad de E y la equicontinuidad de $\mathcal{F}$, probaremos que $\{g_n\}$ converge uniformemente en compactos. Fijemos un compacto $K\subset\Omega$ y comprobemos que $\{g_n\}$ verifica la condición de Cauchy uniforme en K. Como $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua, dado $\varepsilon>0$ y $a\in K$, existe $\delta_a>0$ verificando

$$|z-a|<\delta_a \Rightarrow |f(z)-f(a)|<\varepsilon \quad \text{para toda } f\in\mathcal{F}$$

Por la compacidad de K, existen $b_1,b_2,\cdots,b_N\in K$ tal que $K\subset\bigcup_{j=1}^N D(b_j,\delta_{b_j})$. Por densidad de E en Ω, podemos conseguir para cada j un elemento $e_j\in E$ tal que $e_j\in D(b_j,\delta_{b_j})$. Sabemos que $\{g_n(e_j)\}$ converge para todo j. Usamos la condición de Cauchy para estas sucesiones. Como sólo hay un número finito, podemos encontrar $m\in\mathbb{N}$ tal que

$$p,q\geqslant m \Rightarrow |g_p(e_j)-g_q(e_j)|<\varepsilon \qquad (1\leqslant j\leqslant N)$$

Un elemento z de K ha de estar en algún disco $D(b_j,\delta_{b_j})$. Se tendrá entonces

$$\begin{aligned}|g_p(z)-g_q(z)| \leqslant &|g_p(z)-g_p(b_j)|+|g_p(b_j)-g_p(e_j)|+|g_p(e_j)-g_q(e_j)|+\\ &+|g_q(e_j)-g_q(b_j)|+|g_q(b_j)-g_q(z)|<5\varepsilon\end{aligned}$$

Hemos probado la condición de Cauchy uniforme sobre compactos para la sucesión $\{g_n\}$ lo que, según sabemos, equivale a que dicha sucesión es convergente en $\mathcal{C}(\Omega)$. $\boxed{\checkmark}$

Veamos que para funciones holomorfas los compactos de $\mathcal{H}(\Omega)$ tienen una caracterización más sencilla que la que proporciona el Teorema de Ascolí-Arzelá. Observa que, por ser $\mathcal{H}(\Omega)$ un subespacio cerrado de $\mathcal{C}(\Omega)$, un conjunto $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$ si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(\Omega)$.

5.5.3. Conjuntos compactos de funciones holomorfas. Teoremas de Montel y Vitali

5.29 Teorema de Montel. *Un conjunto $\mathcal{F}\subset\mathcal{H}(\Omega)$ es relativamente compacto si, y sólo si, $\mathcal{F}$ está acotado en compactos.*

Demostración. Sabemos, por la proposición 5.27, que la condición es necesaria. Probaremos que es suficiente.

Supongamos que $\mathcal{F}$ está acotado en compactos. Para probar que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto, será suficiente, en virtud del teorema de Ascolí–Arzelá, probar que $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinuo. Dado un punto $a \in \Omega$, elegimos $R > 0$ tal que $\overline{D}(a, 2R) \subset \Omega$. Por hipótesis, existe una constante M tal que

$$|f(z)| \leqslant M, \qquad \text{para todo } z \in \overline{D}(a, 2R) \quad \text{y toda } f \in \mathcal{F}$$

Supongamos que $|z-a| < R$. Usando la fórmula de Cauchy se tiene

$$|f(z) - f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(a,2R)} \left(\frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w-a}\right) dw\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(a,2R)} \frac{f(w)(z-a)}{(w-z)(w-a)}\, dw\right|$$

Como $z \in D(a, R)$, para $w \in C(a, 2R)^*$ se tiene

$$|(w-z)(w-a)| \geqslant (|w-a| - |a-z|)2R \geqslant (2R-R)2R = 2R^2$$

Por tanto,

$$|f(z) - f(a)| \leqslant \frac{M|z-a|}{2R}$$

La condición anterior, válida para todo $f \in \mathcal{F}$ y para todo $z \in D(a, R)$ claramente implica la equicontinuidad de $\mathcal{F}$. $\boxed{\checkmark}$

5.30 Teorema de Vitali. *Sean Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Supongamos que el conjunto $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado en compactos de Ω y que $\{f_n\}$ converge puntualmente en los puntos de un subconjunto $A \subset \Omega$ que verifica $A' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $\{f_n\}$ converge uniformemente en compactos a una función holomorfa en Ω.*

Demostración. Por el Teorema de Montel, el conjunto $\mathcal{F}$ es relativamente compacto. Por tanto, cada parcial de la sucesión admite una parcial convergente. En estas condiciones, para probar que $\{f_n\}$ converge, basta ver que todas las parciales convergentes tienen el mismo límite.

Si dos parciales de $\{f_n\}$ convergen uniformemente sobre compactos a dos funciones holomorfas, entonces, por hipótesis, éstas han de coincidir en A y, por el Principio de identidad, ambas serán iguales. Como consecuencia $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos a una función holomorfa en Ω. $\boxed{\checkmark}$

5.5.4. Ejercicios propuestos

339. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D(0,1))$ y supongamos que $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$ y que el conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado. Prueba que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto.

340. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de funciones holomorfas en $D(0,1)$ verificando que:

a) $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in D(0,1)$ y para toda $f \in \mathcal{F}$;

b) El conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$está acotado.

Prueba que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.

341. Sea $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(D(0,1)) : f(0) = 0,\ |f^{(n)}(0)| \leqslant (n+1)!\ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Prueba que $\mathcal{F}$ es compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$.

342. ¿Es $\operatorname{Aut}(D(0,1))$ relativamente compacto en $\mathcal{H}(D(0,1))$?

343. Sea Ω un dominio y $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que

$$\iint\limits_{\Omega} |f_n(x,y)|^2 \,\mathrm{d}(x,y) \leqslant M \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Prueba que $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$.

5.5.5. Teorema de Riemann de la representación conforme

5.31 Teorema de Riemann de la representación conforme. *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ distinto de $\mathbb{C}$ tal que toda función holomorfa y que no se anule en Ω admite una raíz cuadrada holomorfa en Ω. Entonces Ω es isomorfo al disco unidad.*
Además, dado un punto a de Ω existe un único isomorfismo F de Ω en el disco unidad tal que $F(a) = 0$ y $F'(a) \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Probaremos en primer lugar la unicidad. Dado un punto $a \in \Omega$, supongamos que F_1 y F_2 son isomorfismos conformes de Ω en $D(0,1)$ tales que $F_1(a) = F_2(a) = 0$, $F'_1(a) > 0$ y $F'_2(a) > 0$. La aplicación $G = F_2 \circ F_1^{-1}$ es un automorfismo del disco unidad que deja invariante a 0 y, por tanto, es un giro, esto es, existe $\theta\in\mathbb{R}$ tal que $G(z)=e^{i\theta}z$. Deducimos que $F_2(z)=e^{i\theta}F_1(z)$. Como $F'_2(a)=e^{i\theta}F'_1(a)$ y ambas derivadas son positivas, se sigue que $e^{i\theta}=1$, es decir, $F_1=F_2$.

Una vez probada la unicidad queda el trabajo más difícil que es probar la existencia de un isomorfismo conforme en las condiciones del enunciado. La estrategia para la demostración es la siguiente. Consideraremos la familia

$$\mathcal{F}=\{f\in\mathcal{H}(\Omega): f \text{ es inyectiva}, \ f(\Omega)\subset D(0,1), \ f(a)=0, \ f'(a)\in\mathbb{R}^+\} \tag{5.13}$$

En primer lugar probaremos que dicha familia no es vacía. Hecho esto, el teorema de Montel permitirá probar que existe una función F en la familia $\mathcal{F}$ tal que $F'(a)\geqslant f'(a)$ para toda $f\in\mathcal{F}$. Finalmente, probaremos que dicha función F es sobreyectiva y, por tanto, es la solución buscada.

Probemos ya que $\mathcal{F}\neq\emptyset$. Como $\Omega\neq\mathbb{C}$, sea $b\in\mathbb{C}\setminus\Omega$. Como la función $z\mapsto z-b$ es holomorfa y no se anula en Ω, existe, por hipótesis, una función $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g(z)^2=z-b$ para todo $z\in\Omega$. Puesto que la función $z\mapsto g(z)^2$ es inyectiva, también g es inyectiva. Pongamos $-g(\Omega)=\{-g(z):z\in\Omega\}$. Veamos que $g(\Omega)\cap -g(\Omega)=\emptyset$. Si hubiera puntos z_1, z_2 en Ω tales que $g(z_1)=-g(z_2)$, se tendría que $g(z_1)^2=g(z_2)^2$ y, por tanto $z_1=z_2$, lo que implica que $g(z_1)=g(z_2)$, luego $g(z_1)=0$ lo que no es posible pues la función g no se anula en Ω. Sabemos, en virtud del teorema de la aplicación abierta, que $g(\Omega)$ es un conjunto abierto. Por tanto existe $r>0$ y $z_0\in\mathbb{C}$ tales que $\overline{D}(z_0,r)\subset g(\Omega)$. Como $D(-z_0,r)\subset -g(\Omega)$, se tiene que $D(-z_0,r)\cap g(\Omega)=\emptyset$, es decir, $|g(z)+z_0|>r$ para todo $z\in\Omega$. Definimos la función

$$h(z)=\frac{r}{g(z)+z_0} \qquad (z\in\Omega)$$

Es claro que la función h es holomorfa e inyectiva en Ω y su imagen, $h(\Omega)$, está contenida en el disco unidad. Usaremos ahora un automorfismo del disco unidad para modificar el valor de dicha función y de su derivada en el punto a.

Sea

$$\varphi(z)=u\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (\alpha\in D(0,1), |u|=1) \tag{5.14}$$

Derivando tenemos que

$$\varphi'(\alpha)=u\frac{1}{1-|\alpha|^2} \tag{5.15}$$

Haciendo en 5.14 $\alpha=h(a)$, $u=|h'(a)|/h'(a)$ y notando φ al correspondiente automorfismo, tenemos que la aplicación $f=\varphi\circ h$, es decir, la aplicación dada por

$$f(z)=\frac{|h'(a)|}{h'(a)}\frac{h(z)-h(a)}{1-\overline{h(a)}h(z)} \qquad (z\in\Omega)$$

es una función holomorfa de Ω en el disco unidad, inyectiva, que se anula en a y, teniendo en cuenta 5.15, su derivada en a viene dada por

$$f'(a) = \varphi'(h(a))h'(a) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{1}{1-|h(a)|^2} h'(a) = \frac{|h'(a)|}{1-|h(a)|^2}$$

y por tanto $f'(a) > 0$. Luego $f \in \mathcal{F}$.

Una vez probado que la familia $\mathcal{F}$ definida en 5.13 no es vacía, probaremos que hay una función $F \in \mathcal{F}$ tal que $F'(a) \geqslant f'(a)$ para toda $f \in \mathcal{F}$.

Puesto que toda función $f \in \mathcal{F}$ verifica que $|f(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$, se sigue, por el Teorema de Montel, que $\overline{\mathcal{F}}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$. Como la aplicación de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ dada por $f \mapsto f'(a)$ es continua y toma valores positivos en $\mathcal{F}$, se tiene que $f'(a) \geqslant 0$ para toda $f \in \overline{\mathcal{F}}$. En consecuencia la aplicación

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}} &\longrightarrow \mathbb{R}_o^+ \\ f &\longmapsto f'(a) \end{aligned}$$

es continua, toma valores reales y está definida en un compacto por lo que tiene que alcanzar un máximo absoluto, es decir, existe $F \in \overline{\mathcal{F}}$ tal que $F'(a) \geqslant f'(a)$ para toda $f \in \overline{\mathcal{F}}$. Observa que debe ser $F'(a) > 0$ porque sabemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Todavía queda probar que $F \in \mathcal{F}$. Lo que es seguro es que hay una sucesión, $\{f_n\}$, de funciones de $\mathcal{F}$ que converge puntualmente a F y la convergencia es uniforme en compactos de Ω. Como las funciones f_n toman valores en $D(0,1)$ se sigue que para todo $z \in \Omega$ es $F(z) = \lim\{f_n(z)\} \in \overline{D}(0,1)$, es decir, $|F(z)| \leqslant 1$. Como F no es constante (pues $F'(a) > 0$), el principio del módulo máximo implica que $|F(z)| < 1$ para todo $z \in \Omega$. Finalmente, el teorema de Hurwitz nos dice que F es inyectiva. Por supuesto $F(a) = 0$. En resumen $F \in \mathcal{F}$.

Sólo resta probar que la aplicación F es sobreyectiva. Para ello probaremos que si una función de la familia $\mathcal{F}$ no es sobreyectiva, entonces hay otra función en $\mathcal{F}$ cuya derivada en a es mayor que la derivada en a de dicha función. Probado esto, se tendrá que necesariamente $F(\Omega) = D(0,1)$ y la demostración habrá concluido.

Sea, pues, $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(\Omega) \neq D(0,1)$. Sea $w \in D(0,1)$ un punto que no está en $f(\Omega)$ y definimos la aplicación λ por

$$\lambda(z) = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w} f(z)} \qquad (z \in \Omega)$$

Observa que λ se obtiene componiendo con f el automorfismo del disco unidad que se obtiene haciendo en 5.14 $u = 1$ y $\alpha = w$. Se sigue que λ es holomorfa e inyectiva en Ω y con imagen contenida en el disco unidad. Observa que, además, λ no se anula en Ω. Por hipótesis, existe una función $\psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\psi(z)^2 = \lambda(z)$ para todo $z \in \Omega$. La función ψ

es inyectiva por serlo λ (y, por tanto, su derivada no se anula), toma valores en el disco unidad y no se anula en ningún punto. Definimos ahora

$$\widehat{f}(z)=\frac{|\psi'(a)|}{\psi'(a)}\frac{\psi(z)-\psi(a)}{1-\overline{\psi(a)}\psi(z)} \qquad (z\in\Omega)$$

La función $\widehat{f}$ se obtiene componiendo con ψ el automorfismo del disco unidad que se obtiene en 5.14 haciendo $\alpha=\psi(a)$ y $u=|\psi'(a)|/\psi'(a)$. En consecuencia $\widehat{f}$ es holomorfa e inyectiva en Ω, con imagen contenida en el disco unidad, se anula en a y

$$\widehat{f}'(a)=\frac{|\psi'(a)|}{1-|\psi(a)|^2}>0$$

Luego $\widehat{f}\in\mathcal{F}$. Calculemos $\widehat{f}'(a)$. Como $\psi(z)^2=\lambda(z)$, tenemos que

$$2\psi(z)\psi'(z)=\lambda'(z)=\frac{f'(z)(1-\overline{w}f(z))+\overline{w}f'(z)(f(z)-w)}{(1-\overline{w}f(z))^2}$$

Como $f(a)=0$, se obtiene que $2\psi(a)\psi'(a)=f'(a)(1-|w|^2)$; y como $\psi(a)^2=\lambda(a)=-w$, resulta que

$$|\psi'(a)|=\frac{f'(a)(1-|w|^2)}{2\sqrt{|w|}}$$

Finalmente, usando que $0<(1-\sqrt{|w|})^2=1+|w|-2\sqrt{|w|}$, obtenemos que

$$\widehat{f}'(a)=\frac{f'(a)(1-|w|^2)}{2\sqrt{|w|}(1-|w|)}=\frac{f'(a)(1+|w|)}{2\sqrt{|w|}}>f'(a)$$

lo que concluye la demostración. $\boxed{\checkmark}$

5.5.6. Caracterizaciones de los dominios simplemente conexos

Recogemos en el siguiente teorema algunas caracterizaciones de los dominios simplemente conexos. Algunas de estas caracterizaciones son topológicas mientras que otras son de naturaleza analítica. Todas ellas ponen de manifiesto el lugar destacado que en la teoría de funciones holomorfas desempeña este tipo de dominios.

5.32 Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $\Omega = \mathbb{C}$ *ó bien* Ω *es isomorfo a* $D(0,1)$.

ii) Ω *es homeomorfo a* $D(0,1)$.

iii) Ω *es simplemente conexo.*

iv) Ω *es homológicamente conexo.*

v) La integral de toda función holomorfa en Ω *sobre cualquier ciclo en* Ω *es nula.*

vi) Toda función holomorfa en Ω *tiene primitivas en* Ω.

vii) Toda función armónica en Ω *es la parte real de una función holomorfa en* Ω.

viii) Toda función holomorfa que no se anula en Ω *tiene logaritmos holomorfos en* Ω.

ix) Toda función holomorfa que no se anula en Ω *tiene una raíz cuadrada holomorfa en* Ω.

x) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ *es conexo en* $\widehat{\mathbb{C}}$.

xi) $\mathbb{C} \setminus \Omega$ *no tiene componentes conexas acotadas.*

Si solamente suponemos que Ω *es un abierto entonces las afirmaciones iii) a xi) son equivalentes.*

Demostración.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Si $\Omega = \mathbb{C}$, basta tener en cuenta que la aplicación $z \mapsto \dfrac{z}{1+|z|}$ es un homeomorfismo de $\mathbb{C}$ sobre $D(0,1)$. Si Ω es isomorfo al disco unidad entonces también es homeomorfo al disco unidad.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sea ψ un homeomorfismo de Ω sobre $D(0,1)$. Si $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada en Ω definamos

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$$
$$H(s,t) = \psi^{-1}\big(s\,\psi(\gamma(t))\big)$$

Entonces H es continua; $H(0,t) = \psi^{-1}(0)$ es una curva constante; $H(1,t) = \gamma(t)$ y $H(s,0) = H(s,1)$ porque $\gamma(0) = \gamma(1)$. Por tanto, γ es homotópica en Ω a una curva constante. Por tanto Ω es simplemente conexo.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Es el corolario 4.20.

iv) $\Rightarrow$ *v)* $\Rightarrow$ *vi)* $\Rightarrow$ *vii)* $\Rightarrow$ *viii)* $\Rightarrow$ *iv)* Es el teorema 4.13.

viii) $\Rightarrow$ *ix)* Si f es una función holomorfa y no nula en Ω y g es un logaritmo holomorfo de f en Ω, entonces la función $z \mapsto \exp(g(z)/2)$ es una raíz cuadrada holomorfa de f en Ω.

ix) $\Rightarrow$ *i)* Es el teorema de Riemann de la representación conforme.

xi) $\Rightarrow$ *iv)* Es la proposición 4.18.

iv) $\Rightarrow$ *x)* Si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ no es conexo, entonces existen A, B cerrados de $\widehat{\mathbb{C}}$ disjuntos no triviales y tales que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega = A \cup B$. Supongamos que $\infty \in B$. Entonces el conjunto A es un compacto en $\mathbb{C}$ que está contenido en el abierto $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus B = A \cup \Omega$. Sabemos entonces, por el lema 4.55, que existe un ciclo Γ en G que no corta al compacto A, por tanto Γ es un ciclo en Ω, y que verifica que $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 1$ para todo $a \in A$, lo que contradice la hipótesis hecha.

x) $\Rightarrow$ *xi)* Esta implicación es un caso particular del segundo lema que probamos a continuación.

5.33 Lema. *Sea C una componente conexa de un espacio topológico de Hausdorff compacto Y; entonces C es igual a la intersección de los subconjuntos abiertos y cerrados de Y que lo contienen. Equivalentemente, dado $x \in Y \setminus C$ hay un subconjunto abierto y cerrado de Y que contiene a C y no contiene a x.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de Y que contienen a C. La familia $\mathcal{F}$ no es vacía pues $Y \in \mathcal{F}$. Sea $K = \bigcap \mathcal{F}$. Puesto que $C \subseteq K$ bastará probar que K es conexo. Nótese que K es cerrado. Supongamos, pues, que K_1, K_2 son cerrados disjuntos tales que $K = K_1 \cup K_2$. Probaremos que uno de ellos es vacío. Las hipótesis hechas garantizan la existencia de abiertos disjuntos $A_1 \supseteq K_1$, y $A_2 \supseteq K_2$. La familia $\mathcal{F} \bigcup \{Y \setminus (A_1 \cup A_2)\}$ es una familia de cerrados con intersección vacía. La compacidad de Y implica que hay un número finito de conjuntos $\Omega_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ de manera que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i\right) \bigcap (Y \setminus (A_1 \cup A_2)) = \emptyset$$

poniendo $\Omega = \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$, tenemos que $\Omega \in \mathcal{F}$ y $\Omega \bigcap (Y \setminus (A_1 \cup A_2)) = \emptyset$. Veamos que $\Omega \cap A_1$ es cerrado. Ello es consecuencia de que:

$$\overline{\Omega \cap A_1} \subseteq \Omega \cap \overline{A_1} = \Omega \cap (A_1 \cup A_2) \cap \overline{A_1} = \left(\Omega \cap A_1 \cap \overline{A_1}\right) \cup \left(\Omega \cap A_2 \cap \overline{A_1}\right) = \Omega \cap A_1.$$

Análogamente se prueba que $\Omega\cap A_2$ es cerrado. Puesto que $C\subseteq K\subseteq\Omega\subseteq A_1\cup A_2$, y C es conexo, deberá estar contenido en A_1 o en A_2. Supongamos que $C\subseteq A_1$. Entonces el conjunto $\Omega\cap A_1$ está en la familia $\mathcal{F}$ por lo que $K\subseteq\Omega\cap A_1$ lo que implica que

$$K_2 = K\cap K_2\subseteq\Omega\cap A_1\cap A_2=\emptyset$$

esto es, $K_2=\emptyset$. ☑

5.34 Lema. *Sea X un espacio topológico conexo, compacto y de Hausdorff; x un punto de X y C una componente conexa de $X\setminus\{x\}$, entonces $x\in\overline{C}$.*

Demostración. Si $x\notin\overline{C}$, existe un entorno abierto V de x tal que $\overline{V}\cap C=\emptyset$ (los entornos cerrados son una base de entornos). Sea $Y=X\setminus V$. Como $C\subseteq Y\subseteq X\setminus\{x\}$, se sigue que C es una componente conexa del espacio compacto de Hausdorff Y. Podemos aplicar el lema 5.33 para obtener que para todo $y\in\mathrm{Fr}(V)$ existe Ω_y abierto y cerrado de Y tal que $C\subseteq\Omega_y$ e $y\notin\Omega_y$ (nótese que si $y\in\mathrm{Fr}(V)=\overline{V}\setminus V$, entonces $y\notin C$). La familia $\{\mathrm{Fr}(V)\}\cup\{\Omega_y : y\in\mathrm{Fr}(V)\}$ es una familia de cerrados de X con intersección vacía, luego existen elementos $y_k\in\mathrm{Fr}(V)$, $k=1,2,\dots,n$ tales que:

$$\mathrm{Fr}(V)\cap\Omega_{y_1}\cap\cdots\cap\Omega_{y_n}=\emptyset.$$

Pongamos $\Omega=\Omega_{y_1}\cap\cdots\cap\Omega_{y_n}$. Se tiene que $C\subseteq\Omega\subseteq X\setminus\overline{V}$, y Ω es abierto y cerrado en Y luego también es cerrado en X. Además:

$$X\setminus\Omega=(Y\cup\overline{V})\setminus\Omega=(Y\setminus\Omega)\cup\overline{V}$$

de donde se sigue que Ω es abierto en X. La conexión de X implica que $\Omega=X$ o $\Omega=\emptyset$, lo que es contradictorio. ☑

Para probar que *x)* $\Rightarrow$ *xi)* aplicamos el lema 5.34 con $X=\overline{\mathbb{C}}\setminus\Omega$, $x=\infty$, para obtener que si C es una componente conexa de $\mathbb{C}\setminus\Omega$ entonces $\infty\in\overline{C}$ y, por tanto, C no está acotada. ☑