
Apéndice.- NÚMEROS COMPLEJOS

Ampliación de Matemáticas.

1 Números complejos. Generalidades

1.1 Definiciones

Llamaremos *número complejo* a toda expresión de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales; i es la llamada *unidad imaginaria*, definida por

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{o} \quad i^2 = -1.$$

En un número complejo $a+bi$, a a se le denomina *parte real* y b es la *parte imaginaria* del número complejo. Si $a = 0$, el número complejo $0+bi$ es un *número imaginario puro*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a+0i = a$. El conjunto de números complejos se denota por \mathbb{C} .

Dos números complejos $a+bi$ y $c+di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Dos números complejos $z = a+bi$ y $\bar{z} = a-bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

1.2 Representación gráfica

Todo número complejo $a+bi$ puede ser representado en el plano XY mediante un punto de coordenadas (a, b) . Recíprocamente, todo punto del plano de coordenadas (a, b) puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a+bi$. Obsérvese que todos los números imaginarios puros se representan en el eje OY que llamaremos *eje imaginario*; igualmente los números reales se representan en el eje OX llamado *eje real*.

1.3 Forma trigonométrica de los números complejos

Si se designan por r ($r \geq 0$) y θ las coordenadas polares del punto (a, b) , se verifica que

$$a = r \cos \theta \quad b = r \operatorname{sen} \theta$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a+bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

A la expresión representada en el segundo miembro se le conoce como *forma trigonométrica del número complejo* $a + bi$. Obsérvese que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

El número r se llama *módulo* y θ es el *argumento* del número complejo $a + bi$. El argumento del número complejo es positivo cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje OX en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento θ no se determina de manera unívoca.

Nota: el número complejo $z = a + bi$ podemos escribirlo utilizando la llamada *forma polar*, escribiendo abreviadamente $z = r_\theta$.

2 Operaciones con números complejos

- Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$

- Producto:

En forma binómica: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i(bc + ad)$

En forma trigonométrica:

$$r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{isen} \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{isen} \theta_2) = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{isen} (\theta_1 + \theta_2))$$

- División:

En forma binómica:

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

En forma trigonométrica:

$$\frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \operatorname{isen} \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{isen} \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{isen} (\theta_1 - \theta_2))$$

- Potencia: Si $z = a + bi = r (\cos \theta + i \operatorname{isen} \theta)$ y n es un número entero positivo, se verifica

$$z^n = (a + bi)^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{isen} n\theta)$$

3 Función exponencial y forma exponencial de un número complejo

Sea $z = x + yi$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. Definimos la exponencial compleja como sigue:

$$w = e^z = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Propiedades:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
3. $(e^z)^m = e^{mz}$ para $m \in \mathbb{Z}$.

• Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula correspondiente a la función exponencial de exponente complejo, se tiene que

$$e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y$$

Ésta es la fórmula de Euler y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas. En efecto,

$$\left. \begin{array}{l} e^{yi} = \cos y + i \operatorname{sen} y \\ e^{-yi} = \cos y - i \operatorname{sen} y \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \\ \operatorname{sen} y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta la expresión trigonométrica de un número complejo y la fórmula de Euler, resulta que cualquier número complejo puede representarse en forma exponencial

$$z = a + bi = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}.$$

4 Bibliografía

Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo 1.* Editorial Mir. Moscú.