1. El conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$.

1.1. Motivación

Como ya hemos visto, la ecuación $x^2 - 2 = 0$, no tiene soluciones racionales por ello fue necesario introducir los números reales. Por tanto la siguiente pregunta es, ¿ si $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales (¿por qué?), entonces dicha ecuación es irresoluble?

Cardano en 1545 se planteó el siguiente problema: dado un segmento $\overline{AB}$ de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que el rectángulo que se forma tenga un area de 40 unidades cuadradas. Para resolverlo, Cardano operó formalmente: Sea x la longitud de una división y $10 - x$ el de la otra. Entonces,

$$A = x(10 - x) = 40 \quad \Longrightarrow x^2 - 10x + 40 = 0 \Longrightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}.$$

Además, formalmente verificó la solución:

$$A = (5 - \sqrt{-15})(5 + \sqrt{-15}) = 5^2 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40. \quad !!!!$$

Es decir que la solución venia dada por una raíz de un número negativo. Tales soluciones se les denominaron *imposibles* o *imaginarias*. Fué Euler el primero en introducir la notación $\sqrt{-1} = i$, de donde las soluciones la problema de Cardano se escribe como $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{15}i$, siendo $i^2 = 1$.

1.2. Definición y propiedades de los números complejos.

Un número complejo z es un par ordenado de números reales x, y, es decir $z = (x, y)$, donde x se denomina parte real de z e y se denomina parte imaginaria y se denotan por $x = \Re z$, $y = \Im z$. El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por $\mathbb{C}$. Para los números complejos cualesquiera $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, se define la operación suma "+" y multiplicación "·" de la siguiente forma:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Es fácil comprobar que si z_1 y z_2 son números tales que $\Im z_1 = \Im z_2 = 0$, las operaciones anteriores coinciden con las de los números reales, de forma que los números reales son un subconjunto de los complejos, concretamente son los números complejos de la forma $x = (x, 0)$.

Utilizando el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ descubrimos que es posible resolver ecuaciones algebraicas que no eran resolubles para los reales, por ejemplo

$$x^2 + 1 = 0, \quad \longrightarrow \quad x^2 = -1 \longrightarrow x = i = (0, 1).$$

La expresión más común para representar un número complejo es la *forma binómica*:

$$z = (x, y) = x + i\,y, \qquad \text{donde } x = \Re z,\ y = \Im z.$$

Antes de pasar al segundo punto de este apartado debemos destacar que los números complejos también satisfacen los axiomas de cuerpo, no así los de orden.

En efecto, probemos que para los complejos es imposible que se cumplan los axiomas (propiedades) de la definición de conjunto ordenado, es decir:

Un conjunto de elementos A es un conjunto ordenado si existe una relación de orden $\leq$ tal que cuales quiera sean a y b elementos de A se cumple que $a \leq b$ o no se cumple y además tienen lugar los siguientes axiomas:

1. Para todo $a \in A$, $a \leq a$

2. Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

4. Para todos a, $b \in A$, o $a \leq b$ o $b \leq a$.

Si además, A es un cuerpo, entonces para cuales quiera sean a, b y c de A se tiene que

5. Si $a \leq b$ entonces $a + c \leq b + c$.

6. Si $0 \leq a$ y $0 \leq b$ entonces $0 \leq a \cdot b$.

Supongamos por ejemplo que $i \neq 0$. Entonces o $i < 0$ o $i > 0$. Si $i > 0$, entonces por el axioma 6. $i \cdot i > 0$, luego $-1 > 0$, o equivalentemente, $0 > 1$ (lo cual pudiera ser cierto en $\mathbb{C}$ pues no hemos decidido todavía que criterio vamos a utilizar para ordenarlos). Ahora bien, si $-1 > 0$, entonces $-1 \cdot (-1) > 0$, de donde $1 > 0$, lo cual es imposible por el axioma 4. de la definición de orden. Es decir es imposible que $i > 0$. Un razonamiento análogo demuestra que i no puede ser menor que cero (probar esto último como ejercicio). Luego no hay forma alguna que nos permita ordenar los complejos según la definición de conjunto ordenado.

1.3. Operaciones elementales.

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos cualesquiera, entonces

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2), \qquad z_1 \cdot z_2 = (x_1\, x_2 - y_1\, y_2) + i(x_1\, y_2 + y_1\, x_2),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1\, x_2 + y_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1\, x_2 - x_1\, y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Se llama complejo conjugado de un número $z = x + iy$ al número $\overline{z} = x - iy$. Para $\overline{z}$ se cumple que:

$$\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0).$$

Además

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \Re z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \overline{z}}{2},$$

de donde deducimos que $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \overline{z}$.

1.4. Forma trigonométrica y exponencial de un número complejo.

Sea $z \in \mathbb{C}$. Se define el módulo de z al número $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y al argumento de z al ángulo θ tal que $x = |z| \cos\theta$, $y = |z| \operatorname{sen}\theta$. Entonces,

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta).$$

El módulo $\rho = |z|$ y el argumento de z cumplen con las siguientes propiedades.

1. $|z| \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

2. $|z| = 0, \Longleftrightarrow z = 0$.

3. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}, \forall z \in \mathbb{C}$.

4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

5. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

6. Si $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, entonces

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1 \cdot z_2|[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)], \qquad \frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| [\cos(\theta_1-\theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

Dado $\phi \in \mathbb{R}$, se define la exponencial compleja de ϕ, $e^{i\phi}$ como

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i \operatorname{sen}\phi. \tag{1.1}$$

Por tanto, cualquier número complejo se puede escribir de la forma:

$$z = x + iy = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = |z|e^{i\theta}.$$

La ecuación (1.1) se conoce como *fórmula de Euler.*

Definiremos la función e^z mediante la expresión

$$e^z = e^{\Re z}[\cos(\Im z) + i \operatorname{sen}(\Im z)].$$

La función exponencial tiene las siguientes propiedades:

1. $e^0 = 1$.
2. $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{\Re z}, \forall z \in \mathbb{C}$.
5. $e^z = 1, \Longleftrightarrow z = 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$
6. $e^{z_1} = e^{z_2}, \Longleftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$

1.5. Potencias enteras y raíces enteras de un número complejo.

Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ veces}} = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

La fórmula anterior se conoce como *fórmula de Moivre.*

Tomemos ahora un número complejo $z \neq 0$. Entonces la ecuación $w^n = z$ tiene n soluciones $w_k = \sqrt[n]{z},\ k = 0, 1, ..., n-1$ y dichas soluciones, que son las raíces $n-$ésimas complejas de un número complejo están dadas por la fórmula:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1.$$

Por último definiremos el logaritmo de un número complejo z:

$$z = |z|e^{i\theta}, \qquad \log z \equiv \log|z| + i\theta + 2k\pi i.$$

Usando lo anterior se pueden definir las potencias de números complejos:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

1.6. Convergencia en $\mathbb{C}$

Definiremos la distancia $d(z_1, z_2)$ entre dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{1.2}$$

Definiremos el ϵ-entorno o ϵ-vecindad de un número complejo z_0 a la "bola" $U(z_0)$ definida por

$$U(z_0) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \epsilon.$$

Obviamente $U(z_0)$ es un circulo del plano complejo de centro z_0 y radio ϵ excluyendo a la frontera (la correspondiente circunferencia). Puesto que

$$\text{máx}\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \leq |z - z_0| \leq |x - x_0| + |y - y_0|, \qquad |z + z_0| \leq |z| + |z_0|$$

podemos construir la teoría de límites en $\mathbb{C}$ de la misma forma que lo hicimos en $\mathbb{R}$. Así pues, diremos una sucesión de números complejos $(z_n)_n$ tiene límite z si

$$\forall \epsilon > 0,\ \ \epsilon \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N, \quad |z_n - z| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

En particular, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si y sólo si $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además, tenemos que si $z_n = x_n + iy_n$ y $z = x + iy$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Así pues, por analogía con el caso real podemos definir las sucesiones de Cauchy, enunciar y probar el criterio de Cauchy y muchas otras propiedades de las las sucesiones como por ejemplo la acotación. No obstante al ser $\mathbb{C}$ un cuerpo **no** ordenado, se pierden todas las propiedades relacionadas con el orden (supremo, monotonía, etc). Gracias a la teoría de límites de sucesiones podemos definir el límite de funciones, continuidad de funciones, derivabilidad de funciones, etc. No obstante, la teoría de funciones de variable compleja requiere un análisis más detallado que no vamos a considerar aquí, remitiendo a los lectores a libros especializados en este tema.

1.7. Problemas.

Problema 1.1 *Calcúlese:*

a) $[(5+5i)/(3-4i)] + [20/(4+3i)]$	
b) $(3i^{30} - i^{19})/(2i-1)$	*c)* $[(1-i)/(1+i)]^5$
d) $i^{1/5}$	*e)* $(-2\sqrt{3} - 2i)^{1/4}$

Problema 1.2 *Demuéstrese:*

1. *La suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.*

2. *El producto de las raíces n-ésimas de la unidad es ± 1 según la paridad de n.*

Problema 1.3 *Encuéntrense los valores de n que verifican la identidad* $(1+i)^n = (1-i)^n$

Problema 1.4 *Utilizando la fórmula de* de Moivre $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, *demuéstrese que*

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta.$$