Sucesiones y series de Funciones

Una sucesión de funciones *es una aplicación* que a cada número natural n hace corresponder una función f_n. Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I. Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \mapsto f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx(1-x)^n$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Convergencia puntual

Dado $x \in I$ se dice que *la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ converge puntualmente en x, si *la sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ es convergente.

El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los puntos $x \in I$ en los que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente, se llama **campo de convergencia puntual**. Simbólicamente:

$$\mathcal{C} = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$$

Supuesto que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, la función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

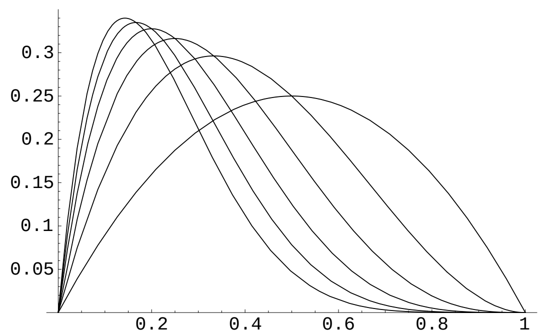
se llama **función límite puntual** de la sucesión $\{f_n\}$.

Para entender la definición de convergencia puntual y en general en todo este capítulo, es *muy importante* no confundir la sucesión de funciones $\{f_n\}$ con la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ obtenida evaluando las funciones de dicha sucesión en un número $x \in I$. Tampoco debes olvidar que en una sucesión la variable es siempre $n \in \mathbb{N}$ y nunca $x \in I$. Así, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es la aplicación que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ (la variable) le asigna el número real $f_n(x)$ ***donde*** x ***está fijo***.

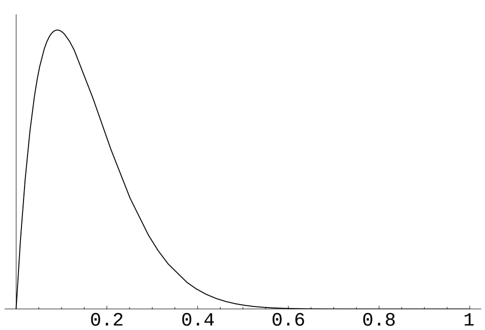
Ejemplo 1 Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por:

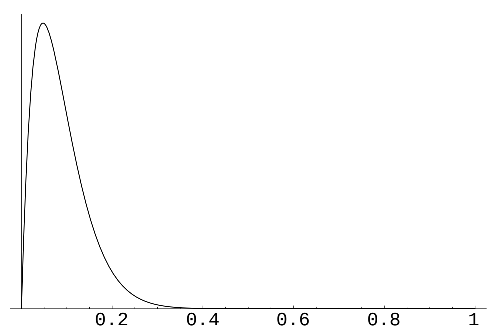
$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

Observa que si $x=0$ o $x=1$, la sucesión $\{f_n(0)\}=\{f_n(1)\}=\{0\}$ es, evidentemente, convergente a 0. Si $0<x<1$ entonces $0<1-x<1$ y se verifica que $\{f_n(x)\}\to 0$ porque es una sucesión de la forma $\{n^p\lambda^n\}$ donde $|\lambda|<1$. Deducimos que el campo de convergencia puntual de esta sucesión es el conjunto $\mathcal{C}=[0,1]$ y la función límite puntual es la función idénticamente nula, $f(x)=0$ para todo $x\in[0,1]$. Observa las gráficas de las primeras seis funciones de esta sucesión.



Fíjate cómo por el extremo derecho del intervalo las gráficas se van pegando al eje de abscisas pero su comportamiento es muy diferente en el extremo izquierdo. Ello es así porque cuando $1-x$ es pequeño (es decir, x está cerca de 1) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge muy rápidamente a cero, pero cuando $1-x$ está próximo a 1 (es decir, x está cerca de 0) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge lentamente a cero. Observa las gráficas de las funciones f_{10} y f_{20}.





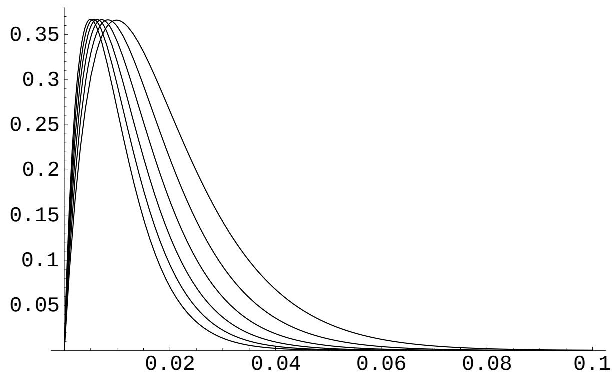
¿Te parece que la función f_{20} está *muy próxima* a la función límite puntual $f\equiv 0$? Observa que, aunque para cada $x\in[0,1]$ es $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}=0$, la función f_n no se acerca mucho a la función límite puntual $f\equiv 0$.

Para evitar ambigüedades necesitamos precisar qué entendemos por *proximidad* entre dos funciones. Para ello, considera dos funciones $f,g\colon I\to\mathbb{R}$. Dichas funciones son iguales cuando $f(x)=g(x)$ para todo $x\in I$ o, lo que es igual, cuando $\max\{|f(x)-g(x)|:x\in I\}=0$. En general, el número $\max\{|f(x)-g(x)|:x\in I\}$ proporciona una buena idea de la proximidad entre las funciones f y g pues dicho número es tanto más pequeño cuanto más cercanas estén las gráficas de las dos funciones.

Volviendo al ejemplo anterior, con $f_n(x) = nx(1-x)^n$ y $f \equiv 0$, podemos calcular fácilmente el número $\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \max\{f_n(x) : x \in [0,1]\}$. Basta derivar f_n para comprobar que la función f_n alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[0,1]$ en el punto $x_n = \frac{1}{n+1}$. Luego

$$\max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

y la sucesión $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ converge a $1/\mathrm{e}$. Fíjate en que $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ pero $\lim_{n\to\infty}\max\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/\mathrm{e} > 0$, es decir, las funciones f_n no se aproximan a la función nula. De hecho, como la sucesión $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ es creciente, cuanto mayor sea n mayor es la distancia entre la función f_n y la función nula. Observa cómo son las gráficas de las funciones f_n cerca de cero para $n = 100, 120, 140, 160, 180, 200$.



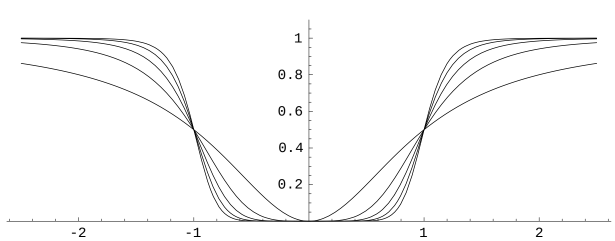
Ejemplo 2 Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

Es claro que si $|x| < 1$ se tiene que $\{f_n(x)\} \to 0$, y si $|x| > 1$ se tiene que $\{f_n(x)\} \to 1$. Para $x = \pm 1$ es $\{f_n(\pm 1)\} = \{1/2\}$ que, evidentemente, converge a $1/2$. Por tanto, el campo de convergencia puntual de $\{f_n\}$ es $\mathcal{C} = \mathbb{R}$, y la función límite puntual está definida por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| > 1 \\ 1/2 \text{ si } |x| = 1 \\ 0 \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

Aquí ocurre que la función límite puntual es discontinua (tiene discontinuidades de salto en -1 y en 1) a pesar de que las funciones de la sucesión son continuas. Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Tenemos que

$$\text{máx}\{|f(x)-f_n(x)|:x\in\mathbb{R}\}\geqslant f(1+1/2n)-f_n(1+1/2n)=1-\frac{(1+1/2n)^{2n}}{1+(1+1/2n)^{2n}}\longrightarrow 1-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}=\frac{1}{1+\mathrm{e}}$$

Por tanto, la distancia entre la función f_n y la función límite puntual, f, no converge a cero.

Este ejemplo y el anterior ponen de manifiesto que la convergencia puntual de $\{f_n\}$ a f no proporciona una buena idea de la aproximación entre las funciones f_n y f. Además las propiedades de continuidad de las funciones f_n pueden no conservarse para la función límite puntual. Esto lleva a definir un tipo de convergencia mejor que la convergencia puntual.

Convergencia Uniforme

Sea J un intervalo no vacío contenido en el campo de convergencia puntual de la sucesión $\{f_n\}$. Y sea f la función límite puntual de $\{f_n\}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en J si para todo $\varepsilon>0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ (que dependerá de ε) tal que para todo $n\geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in J\}\leqslant\varepsilon$.

Para comprender bien esta definición, analicemos la última desigualdad. Tenemos que:

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|:x\in J\}\leqslant\varepsilon\Leftrightarrow|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon\ \ \forall x\in J\Leftrightarrow-\varepsilon\leqslant f_n(x)-f(x)\leqslant\varepsilon\ \ \forall x\in J\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-\varepsilon\leqslant f_n(x)\leqslant f(x)+\varepsilon\ \ \forall x\in J$$

Cuya interpretación gráfica es la siguiente (donde hemos considerado $J=[a,b]$).

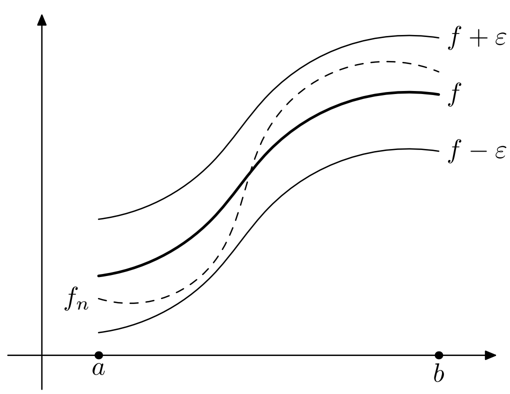


Figura 1: Interpretación gráfica de la convergencia uniforme

Esto nos dice que la gráfica de la función f_n se queda dentro de un *tubo* centrado en la gráfica de f de anchura 2ε (ver figura 1). Ahora debe estar claro que en el ejemplo 1 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo del tipo $[0,a]$ con $0<a<1$ y en el ejemplo 2 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo que contenga a -1 o a 1.

Observa que la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme en J es la siguiente.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en J significa que:

• Fijas un $x \in J$;

• La correspondiente sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, es decir: para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Naturalmente, el número n_0 dependerá del ε y, en general, **también de** x porque si cambias x por otro punto $z \in J$ la sucesión $\{f_n(z)\}$ es distinta de $\{f_n(x)\}$ y el n_0 que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.

Decir que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en J significa que:

• Fijas un $\varepsilon > 0$;

• Existe un número natural n_0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ **para todo** $x \in J$.

Es decir, en la convergencia uniforme, hay un mismo número n_0 que es válido simultáneamente para todos los $x \in J$.

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo J, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J. La presencia del valor absoluto en $|f_n(x) - f(x)|$ es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse con facilidad. Supongamos que el *máximo absoluto* de $|f_n(x) - f(x)|$ en J se alcanza en un punto $c_n \in J$. Entonces si $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(c_n) - f(c_n)\} = 0$, hay convergencia uniforme en J.

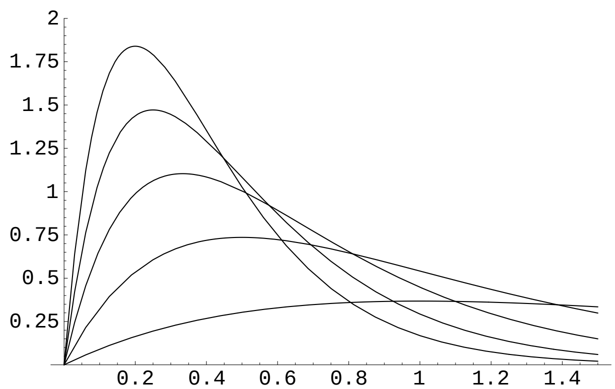
Ejemplo 3 Estudiemos la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$ y en intervalos de la forma $[a, +\infty[$, $(a > 0)$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por $f_n(x) = n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}$.

Observa que $f_n(0) = 0$, y si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2(\mathrm{e}^{-x})^n = 0$ (porque es una sucesión de la forma $n^p\lambda^n$ donde $0 < |\lambda| < 1$). Por tanto, el campo de convergencia puntual es $\mathcal{C} = \mathbb{R}_o^+$, y la función límite puntal está dada por $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Observa que $f_n(x) \geqslant 0$, por lo que $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$. Ahora, como, $f_n'(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$, se deduce que $f_n'(x) > 0$ para $0 \leqslant x < 1/n$, y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/n$. Luego $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ para todo $x \geqslant 0$. Deducimos que $f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$, y como $f_n(1/n) = n/e$, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$, con $a > 0$. Por lo antes visto, sabemos que la función f_n es decreciente en el intervalo $[1/n, +\infty[$. Sea n_o un número natural tal que $\frac{1}{n_o} < a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_o$, tenemos que $[a,+\infty[\subseteq [1/n,+\infty[$, por lo que, $\max\{f_n(x) : x \in [a,+\infty[\} = f_n(a)$. Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a,+\infty[$.

Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Puedes comprobar fácilmente, integrando por partes, que $\int_0^1 n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx = 1-(1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

Es decir, en general, no se puede permutar la integración con el límite puntual.

El concepto de convergencia uniforme requiere algunas precisiones importantes.

• La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto. No tiene sentido decir que *"la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente"* si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme. Además, siempre hay convergencia uniforme en subconjuntos finitos del campo de convergencia puntual (si no sabes probarlo es que no has entendido la definición de convergencia uniforme). Por ello, sólo tiene interés estudiar la convergencia uniforme en conjuntos infinitos, por lo general en intervalos.

• No existe *"el campo de convergencia uniforme"*. Es decir, el concepto de *campo de convergencia puntual* no tiene un análogo para la convergencia uniforme. La razón es que no tiene por qué existir un *más grande* conjunto en el que haya convergencia uniforme. Así, en el ejemplo anterior, hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[a,+\infty[$ con $a > 0$. La unión de todos ellos es $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^+$ no hay convergencia uniforme.

Condición de Cauchy para la convergencia uniforme

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en J si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural n_0 tal que para todos $n,m \geqslant n_0$ se verifica que $\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$

La utilidad de esta condición es que es intrínseca a la sucesión, es decir, no involucra a la función límite.

A continuación enunciamos una condición que implica que no hay convergencia uniforme.

Supongamos que hay una sucesión $\{z_n\}$ de valores de J tal que $\{|f_n(z_n) - f(z_n)|\}$ no converge a 0, entonces $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f en J.

Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos formar otra, $\{F_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando *consecutivamente* los de $\{f_n\}$. Es decir, $F_1 = f_1, F_2 = f_1 + f_2, F_3 = f_1 + f_2 + f_3, ...$ En general, $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. La sucesión $\{F_n\}$ así definida se llama *serie de término general* f_n y la representaremos por el símbolo $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. Los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cuyas funciones f_n suponemos definidas en un intervalo I, es el conjunto $\mathcal{C} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x) \text{ es convergente}\}$. La función límite puntual, llamada *función suma* de la serie, es la función $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}$. La única novedad es que ahora también podemos considerar el *campo de convergencia absoluta* de la serie, que es el conjunto $\mathcal{A} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)| \text{ es convergente}\}$. El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.

Criterio de Weierstrass. Sea $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ una serie de funciones y A un conjunto tal que para todo $x \in A$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, donde la serie $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente. Entonces $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente y absolutamente en A.

Demostración

Es inmediato, en virtud del criterio de comparación para series de términos positivos, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ converge para todo $x \in A$. Esto implica que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge para todo $x \in A$. Veamos que la convergencia es uniforme. Utilizaremos el criterio de Cauchy.

Como $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ es convergente cumplirá la condición de Cauchy, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqslant n_0$ entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right| = (n > m) = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$$

Deducimos que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant (\forall x \in A) \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$$

Concluimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en A.

Los resultados siguientes, relativos a la convergencia uniforme, se aplican, claro está, tanto a sucesiones como a series de funciones.

Conservación de la continuidad

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo J y que las funciones f_n son todas ellas continuas en J. Se verifica entonces que la función f es continua en J.

Demostración

Sea $a\in J$. Dado $\varepsilon > 0$, la hipótesis de convergencia uniforme implica que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(u) - f(u)| \leqslant \varepsilon/3$ para todo $u\in J$. Tenemos:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

Pero por la forma en que hemos tomado n_0 se sigue que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \qquad (*)$$

Además, como por hipótesis f_{n_0} es continua en a , se verifica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x\in J$ con $|x-a| < \delta$ es $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \varepsilon/3$, lo que, en virtud de (*) implica que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Resumiendo, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si tomamos $|x-a| < \delta$ y $x\in J$ entonces $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, que es, precisamente, la continuidad de f en a.

Como la continuidad de f en $a\in J$ se expresa por $f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))$ y, por otra parte, por ser f_n continua en a, $f(a) = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))$; el resultado anterior nos dice que

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))$$

El ejemplo 2 anterior con $a = 1$ o $a = -1$ muestra que esta igualdad puede ser falsa si no hay convergencia uniforme.

Permutación de la integración con el límite uniforme

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a,b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a,b]$. Se verifica entonces que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

Demostración

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$. La hipótesis de convergencia uniforme nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n > n_0$ se cumple:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ de } [a,b]$$

Así pues, si $n > n_0$ tenemos:

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$ se sigue que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

En particular, si una serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx$$

Ejemplo 4 Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n(\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y dedúzcase que

$$\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Observa que f_n es continua y positiva en $[0,1]$ y se anula en los extremos del intervalo. Como $f_n'(x) = (n\log x + 2)x^{n-1}\log x$, se sigue que en el punto $c_n = \exp(-2/n)$ la función f_n alcanza un máximo absoluto en $[0,1]$. Luego $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(c_n) = \mathrm{e}^{-2}4/n^2$ y, puesto que la serie $\sum \frac{4\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$. En consecuencia, se verificará que $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \text{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx = 2\frac{1}{(n+1)^3}$$

como fácilmente puedes comprobar integrando por partes, se deduce la igualdad del enunciado.

La convergencia uniforme no conserva la derivabilidad. Esto es fácil de entender si consideras que puedes sacar pequeños dientes de sierra a la gráfica de una función derivable con lo que resulta una nueva función no derivable y arbitrariamente próxima a la primera. Por ello, el siguiente resultado tiene hipótesis más exigentes que los anteriores.

Derivabilidad y convergencia uniforme

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, y supongamos que:

i) f_n es derivable en I para todo n.

ii) $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en I.

iii) $\{f_n'\}$ converge uniformemente a g en I

Entonces f es derivable en I y $g(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$.

Demostraremos este resultado en el caso particular de que las funciones f_n tengan derivada primera continua en I. En tal caso, fijemos un punto $a \in I$. Ahora, para $x \in I$, en virtud del teorema fundamental del Cálculo, tenemos que

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n{}'(t)dt$$

Tomando límites y haciendo uso del resultado anterior, deducimos que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

Una nueva aplicación del teorema fundamental del Cálculo nos dice ahora que f es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

El teorema anterior suele enunciarse de una forma más general en apariencia. Tú mismo puedes deducirla a partir del siguiente resultado que se prueba, con algún trabajo, haciendo uso del teorema del valor medio.

Proposición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo I. Supongamos que la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I a una función g y que hay un punto $a \in I$ tal que $\{f_n(a)\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo intervalo acotado contenido en I.

Teorema de Stone–Weierstrass (1868)

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas.

Series de potencias

Dados un número real, $a\in\mathbb{R}$, y una sucesión de números reales, $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$, sea $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada para todo $x\in\mathbb{R}$ por $f_n(x)=c_n(x-a)^n$ y, por convenio, $f_0(x)=c_0$. La serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ se llama serie de potencias centrada en a. La sucesión $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ se llama **sucesión de coeficientes de la serie**. El coeficiente c_0 se llama *término independiente* de la serie. Suele usarse, y nosotros también seguiremos la costumbre, la notación $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ para representar la serie de potencias centrada en a con coeficientes c_n, $n=0,1,2,\dots$.

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a. Recuerda que, por convenio, $f^{(0}\equiv f$ y $0!=1$.

Observa que esta serie de Taylor *es* la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Recuerda que el polinomio de Taylor de orden n de f en a es la función polinómica dada por

$$T_n(f,a)(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

El resultado básico para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente.

Lema de Abel

Sea $\rho>0$ y supongamos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces se verifica que la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente en el intervalo $]a-\rho,a+\rho[$ y converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-\rho,a+\rho[$.

Demostración

Por hipótesis, existe $M>0$ tal que $|c_n|\rho^n\leqslant M$ para todo n. Sea $0<r<\rho$. Será suficiente probar que la serie converge absolutamente y uniformemente en el intervalo $[a-r,a+r]$. Aplicaremos para ello el criterio de Weierstrass. Para todo $x\in[a-r,a+r]$, tenemos que:

$$|c_n(x-a)^n|=|c_n|\rho^n\frac{|x-a|^n}{\rho^n}\leqslant M\leqslant M\frac{r^n}{\rho^n}=M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

y basta tener en cuenta que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente por ser una serie numérica de razón positiva $\frac{r}{\rho}<1$.

El resultado anterior nos lleva, de forma natural, a considerar el más grande $\rho > 0$ tal que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

Radio de convergencia de una serie de potencias

Consideremos el conjunto

$$A = \{\rho \geq 0 : \text{ la sucesión } \ \{|c_n|\rho^n\} \ \text{ está mayorada}\}$$

Observa que $A \neq \emptyset$ ya que el $0 \in A$. Si A está mayorado definimos $R = \sup(A)$, si no lo está definimos $R = +\infty$. Se dice que R es el *radio de convergencia* de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. El intervalo $I =]a-R, a+R[$ o, cuando $R = +\infty$, el intervalo $I = \mathbb{R}$, se llama *intervalo de convergencia* de la serie.

La razón de esta terminología queda clara en el siguiente resultado, fácil consecuencia del Lema de Abel.

Convergencia de una serie de potencias

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea I el intervalo de convergencia de la serie. Se verifica que la serie converge absolutamente en todo punto de I y converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en I. Además la serie no converge para valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-a| > R$.

Este resultado nos dice que el estudio de la convergencia de una serie de potencias se reduce a calcular el radio de convergencia. La única duda corresponde a los extremos del intervalo de convergencia, los puntos $a-R$ y $a+R$, en los cuales puede darse cualquier comportamiento como veremos enseguida con ejemplos.

Fíjate que el radio de convergencia sólo depende de la sucesión de coeficientes de la serie y que el punto a en que la serie está centrada no interviene para nada en la definición del radio de convergencia.

Todo esto está muy bien, dirás, pero ¿cómo se calcula el radio de convergencia? Desde luego, la definición que hemos dado de radio de convergencia tiene utilidad teórica pero no sirve para calcularlo. Hay una fórmula general para calcular el radio de convergencia pero este curso no la veremos y vamos a limitarnos a dos casos particulares.

Cálculo del radio de convergencia

Podemos aplicar los criterios del cociente y de la raíz para estudiar la convergencia absoluta de una serie de potencias. Ello permite deducir con facilidad los siguientes dos resultados.

Criterio del cociente

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias y supongamos que $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to L$ donde $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. Entonces si $L = 0$ el radio de convergencia de la serie es $R = +\infty$, si $L = +\infty$ el radio de convergencia de la serie es $R = 0$ y si $0 < L < +\infty$ el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$.

Criterio de la raíz

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias y supongamos que $\sqrt[n]{|c_n|} \to L$ donde $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. Entonces si $L = 0$ el radio de convergencia de la serie es $R = +\infty$, si $L = +\infty$ el radio de convergencia de la serie es $R = 0$ y si $0 < L < +\infty$ el radio de convergencia de la serie es $R = 1/L$.

Observa que los criterios anteriores son bastante restrictivos pues, por ejemplo, a la serie $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ no puedes aplicarle ninguno de ellos. En particular, el criterio del cociente no puede aplicarse cuando hay infinitos coeficientes nulos. El siguiente artificio es de bastante utilidad práctica.

Consideremos una serie de potencias de la forma $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ donde q es un número natural fijo. Para calcular su radio de convergencia podemos hacer $z = (x-a)^q$ y calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Si éste es $R \in \mathbb{R}^+$, entonces la $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ converge para $|x-a|^q < R$, es decir, para $|x-a| < \sqrt[q]{R}$, luego su radio de convergencia es $\sqrt[q]{R}$.

El siguiente importante resultado nos dice, entre otras cosas, que si una serie de potencias tiene radio de convergencia no nulo entonces dicha serie es la serie de Taylor de su función suma. Las series de potencias con radio de convergencia nulo suelen llamarse series de potencias triviales. Por tanto: toda serie de potencias no trivial es una serie de Taylor. La demostración utiliza el hecho, fácil de probar, de que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y la serie $\sum_{n\geqslant 1} nc_n(x-a)^{n-1}$, obtenida derivando término a término la anterior, tienen igual radio de convergencia.

Las series de potencias pueden derivarse término a término

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida ara todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Entonces se verifica que:

i) f es indefinidamente derivable en I.

ii) La derivada de orden k de f está dada para todo $x\in I$ por

$$f^{(k}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$$

En particular, se verifica que $f^{(k}(a)=c_k\cdot k!$, es decir, $c_k=\dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$ y, por tanto, la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}c_n(x-a)^n$ coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.

Desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales

El siguiente problema es importante

Problema

Dada una función f con derivadas de todos órdenes en un intervalo I y un punto $a\in I$, ¿se verifica que la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de f coincide con f?

Contrariamente a lo que, en principio, puede parecer la respuesta a ambas preguntas es, en general, negativa. Un estudio en profundidad de este problema requiere el uso de técnicas de variable compleja que no son propias de este curso. A continuación consideraremos algunas de las funciones más usuales del Cálculo y probaremos que, en determinados intervalos, coinciden con la suma de sus respectivas series de Taylor. La herramienta básica para estudiar la convergencia de una serie de Taylor es, precisamente, el teorema de Taylor. Conviene recordarlo.

Teorema de Taylor

Sea f un función $n+1$ veces derivable en un intervalo I y sean $a,x\in I$ entonces existe un punto $c\in I$ con $|a-c|<|a-x|$ tal que:

$$f(x)=T_n(f,a)(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1}(c)(x-a)^{n+1}$$

Series de Taylor de la función exponencial

Los polinomios de Taylor de la función exp son particularmente fáciles de calcular. Puesto que $\exp^{(k}(0)=\exp(0)=1$ para todo k, el polinomio de Taylor de orden n en 0 es:

$$T_n(\exp,0)(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$$

Llamando $c_n = \dfrac{1}{n!}$ tenemos que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$, por tanto la serie converge y su radio de convergencia es $R = +\infty$. Llamemos h a la función suma de la serie:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Vamos a probar que h es la función exponencial. Por el teorema de derivación tenemos que

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = h(x)$$

Acabamos de probar que h es una función que coincide con su derivada, esto es, $h(x) = h'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora la función $g(x) = h(x)\,\mathrm{e}^{-x}$,

$$g'(x) = h'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = h(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Como $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que la función g es constante. Como $g(0) = 1$, deducimos que $g(x) \equiv g(0) = 1$. Concluimos, por tanto, que $h(x) = \exp x$.

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que $\exp(x) = \exp(a)\exp(x-a)$.

Series de Taylor del seno y del coseno

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\operatorname{sen}^{(k}(x) = \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen}, a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k$$

Como para todo $z \in \mathbb{R}$ es $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$, el teorema de Taylor implica que:

$$\left| \operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Pero sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

De donde deducimos

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Es decir, la serie de Taylor del seno converge a $\operatorname{sen} x$ cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

Por el teorema de derivación obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^{k} \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $a = 0$ tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo

Seguiremos el siguiente método. Supongamos una función f de la que queremos calcular su desarrollo en serie de Taylor centrada en a. Supongamos que la derivada de f, f', es más "sencilla" que f y que conocemos la serie de Taylor de la derivada en un punto a (por comodidad supondremos que $a = 0$). Entonces el teorema de derivación nos permite obtener la serie de Taylor de f integrando término a término la serie de su derivada f'. Si

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in I =]-R, R[)$$

Entonces

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I =]-R, R[)$$

Para calcular la serie de Taylor de log, pongamos $f(x) = \log(1+x)$ definida para $x > -1$. Tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

Integrando formalmente esta expresión, definamos para $|x| < 1$:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Tenemos, en virtud del teorema de derivación, que $h'(x) = f'(x)$ para todo $x \in]-1, 1[$, esto implica que $h(x) - f(x)$ es constante y, como $h(0) - f(0) = 0$, concluimos que $f(x) = h(x)$. Hemos probado así que:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

Observa que, efectivamente, $]-1, 1[$ es el intervalo de convergencia de la serie.

La serie de Taylor centrada en $a > 0$ se deduce de lo anterior:

$$\log(x) = \log(a + (x-a)) = \log a + \log\left(\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1} \quad (|x-a| < a)$$

Observa que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ cuya suma para $|x|<1$ es igual a $\log(1+x)$ es también convergente para $x=1$ puesto que se trata de la serie armónica alternada. En esta situación ¿cabe esperar que la igualdad $\log(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ válida, en principio, para $|x|<1$ sea también válida para $x=1$? En este caso particular, la respuesta es afirmativa porque sabemos que $\log 2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. El siguiente resultado establece que esto es cierto en general.

Teorema de Abel

Supongamos $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ para todo $x\in]a-R,a+R[$ donde $0<R<+\infty$. Supongamos además que la serie $\sum_{n\geq 0}c_nR^n$ converge. Entonces se verifica que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0}c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en el intervalo $[a,a+R]$. En consecuencia:

$$\lim_{\substack{x\to a+R\\ x<a+R}} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nR^n \quad \text{y} \quad \int_a^{a+R} f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^{a+R}c_n(x-a)^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}R^{n+1}$$

Serie de Taylor del arcotangente centrada en cero

Puesto que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1)$$

se deduce fácilmente que

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (x\in]-1,1[)$$

Además, como esta serie converge también para $x=1$, el teorema de Abel nos dice que:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}$$

Serie binomial de Newton

Consideremos la función $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, donde $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, ya que para $\alpha\in\mathbb{Z}$ el desarrollo es conocido. Calculemos la serie de Taylor de f centrada en 0. Tenemos que

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$
$$f^{(n}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Los coeficientes de la serie serán

$$\frac{f^{(n}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}=\binom{\alpha}{n}$$

Por tanto la serie de Taylor de f es

$$\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$$

Calculemos su radio de convergencia

$$c_n = \binom{\alpha}{n} \Rightarrow \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|\alpha - n|}{|n+1|} \longrightarrow 1$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$. Definamos para $|x| < 1$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Queremos probar ahora que la función suma de la serie, g, coincide con la función f en el intervalo $]-1,1[$. Para esto consideremos la función $h(x) = (1+x)^{-\alpha} g(x)$, definida para $|x| < 1$. Calculemos h'.

$$h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) + (1+x)^{-\alpha} g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1}\left[-\alpha g(x) + (1+x) g'(x)\right]$$

Analicemos ahora la expresión entre corchetes,

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) - \alpha g(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\binom{\alpha}{n} x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} - \alpha\binom{\alpha}{n} + n\binom{\alpha}{n}\right] x^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + (n-\alpha)\binom{\alpha}{n}\right] x^n \equiv 0
\end{aligned}$$

Hemos probado que $h'(x) = 0$ para todo $x \in]-1,1[$, de donde deducimos que $h(x)$ es constante, y como $h(0) = 1$, concluimos que $g(x) = (1+x)^{\alpha}$ para $|x| < 1$. Hemos probado así que:

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Para centrar esta serie en un punto $a > -1$ podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= (1+a+(x-a))^{\alpha} = (1+a)^{\alpha}\left[1 + \frac{x-a}{1+a}\right]^{\alpha} = (1+a)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{x-a}{1+a}\right)^{\alpha} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}} (x-a)^n \quad \text{siempre que} \quad |x-a| < |1+a|
\end{aligned}$$

Serie de Taylor del arcoseno centrada en cero

Sea $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, su derivada viene dada como

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

Haciendo las sustituciones $x \to -x^2$ y $\alpha \to -1/2$ en la serie binomial de Newton obtenemos

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

Integrando término a término la expresión anterior obtenemos la serie del arcoseno

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

Como

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{1}{2^n} \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} = \\ &= (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)} \end{aligned}$$

Resulta finalmente

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad (|x| < 1)$$

Además, como la serie también converge para $x = 1$, por el teorema de Abel tenemos que

$$\operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)} \frac{1}{2n+1}$$

Ya dijimos que las series de Taylor de una función no siempre convergen a la misma función. Veamos un ejemplo de esto.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

La función es de clase infinito, y $f^{(n}(0) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que su serie de Taylor en $a = 0$ es la serie idénticamente nula que, evidentemente, no converge a f en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

Funciones analíticas

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto. Se dice que f es **analítica** en I si

1. $f \in C^\infty(I)$,
2. En todo punto $a \in I$ la serie de Taylor de f centrada en a converge en un intervalo no vacío, $J \subset I$, y su suma es igual a f en ese intervalo.