Tema 2: Series numéricas

31 de octubre de 2002

En el tema anterior dejamos abierta la cuestión de cuáles son los números reales. Todos los conjuntos numéricos se construyen para corregir alguna carencia del conjunto anterior, pero ¿cuál es la carencia de los números racionales que se corrige con los reales?

El conjunto de los números reales se define como: «$\mathbb{R}$ *es el único cuerpo ordenado y completo que extiende a* $\mathbb{Q}$». La definición de cuerpo ordenado la recordamos en el tema anterior y la de cuerpo completo la damos a continuación:

> *Un cuerpo ordenado se dice* completo *si verifica la siguiente propiedad: todo conjunto no vacio acotado superiormente tiene una* cota superior mínima *o* supremo.

Sin embargo, esta definición no responde a la pregunta que haciamos anteriormente: ¿cómo son los números reales que no son racionales? En realidad no podemos describir lo números reales de la misma forma que describimos los números racionales a partir de los enteros o los complejos a partir de los reales, sino que la representación se hace a través de la noción de *límite* de sucesiones. La propiedad de completitud se puede enunciar como: *un cuerpo es completo si toda sucesión monótona y acotada en el cuerpo es convergente*; de esta forma, los números reales se definen como los límites de cualquier sucesión monótona y acotada de números racionales.

Por ejemplo, afirmar que existe un número real a tal que $a^2 = 2$ equivale a demostrar que existe una sucesión x_n tal que $\lim x_n = a$ y $a^2 = 2$, lo cual es cierto para la sucesión definida recursivamente por $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.

La sucesión $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es un ejemplo bastante interesante; esta sucesión es creciente y acotada y por lo tanto representa a un número real. Sin embargo, este número real NO puede ser descrito de una forma alternativa y por ello lo representamos con una letra: el número e se «define» como el límite de esta sucesión.

Existen otras forma de definir los números reales; por ejemplo, utilizando la representación decimal, un número entero y una secuencia de decimales describen un número real. Si la secuencia es finita o infinita periódica, el número es racional, pero sí la secuencia es infinita no periódica, el número es irracional. Esta definición es equivalente a la anterior, ya que la secuencia de decimales determina una sucesión convergente. La siguiente sucesión

$$a_0 = 2'4, \quad a_1 = 2'41, \quad a_2 = 2'414, \quad a_3 = 2'4142,$$
$$a_4 = 2'41421, \quad a_5 = 2'414213, \quad a_6 = 2'4142136, \ldots$$

es una sucesión convergente a $\sqrt{2}$, aunque el problema es determinar el término general en función de n o de forma recursiva.

Otra posible forma de describir los números reales es mediante construcciones geométricas. El conjunto de los números reales se puede representar como una *recta* en la que se destaca un punto, el correspondiente al número 0; a la izquierda de él se representan los reales negativos y a la derecha los positivos. Cualquier distancia o longitud de segmento corresponde a un número real, aunque no seamos capaces de calcularla algebraicamente; por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ corresponde a la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. De la misma forma, la longitud de una semicircunferencia de radio 1 debe corresponder a un número real, sin embargo, esta longitud no es un número racional ni puede ser determinada de forma algebraica; sabemos que esta longitud está dada por un número irracional que representamos por π.

El objetivo final de este tema y el siguiente es aprender a trabajar con sucesiones y aprender a obtener sucesiones que representen a las magnitudes reales con las que trabajamos habitualmente. Empezamos este tema recordando la noción de sucesión numérica y el concepto de límite, para posteriormente estudiar un tipo particular de sucesión: las *series numéricas.*

1. Sucesiones numéricas

Definición 1 *Una* sucesión de números reales *es una aplicación* $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Las imagenes de la aplicación se denotan* a_n *y se denominan* términos *de la sucesión.*

Definición 2 *Sea* a_n *una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que* a_n *está* acotada *si el conjunto* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está acotado; es decir, si existe un número real positivo* M *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo* n*.*
2. *Decimos que* a_n *es* creciente *si* $a_n \leq a_{n+1}$ *para todo* n*; y decimos que es* estrictamente creciente *si* $a_n < a_{n+1}$ *para todo* n*.*
3. *Decimos que* a_n *es* decreciente *si* $a_n \geq a_{n+1}$ *para todo* n*; y decimos que es* estrictamente decreciente *si* $a_n > a_{n+1}$ *para todo* n*.*

Definición 3 *Sea* a_n *una sucesión.*

1. *Decimos que* $\ell \in \mathbb{R}$ *es el* límite *de la sucesión* a_n *si:*

   Para todo $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$***, existe un número natural*** $\boldsymbol{N}$ ***tal que*** $\boldsymbol{|a_n - \ell| < \varepsilon}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n \geq N}$***.***

   En tal caso escribimos $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ *y decimos que* a_n *es* convergente *y* converge *a* ℓ*. Si la sucesión no es convergente decimos que es* divergente*.*
2. *Decimos que* $+\infty$ *es el* límite *de la sucesión* a_n *si:*

   Para todo $\boldsymbol{M \in \mathbb{R}}$***, existe un número natural*** $\boldsymbol{N}$ ***tal que*** $\boldsymbol{a_n > M}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n \geq N}$***.***

   En tal caso decimos que la sucesión diverge a $+\infty$ *y escribimos* $\lim a_n = +\infty$*.*
3. *Decimos que* $-\infty$ *es el* límite *de la sucesión* a_n *si:*

   Para todo $\boldsymbol{M \in \mathbb{R}}$***, existe un número natural*** $\boldsymbol{N}$ ***tal que*** $\boldsymbol{a_n < M}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n \geq N}$***.***

   En tal caso decimos que la sucesión diverge a $-\infty$ *y escribimos* $\lim a_n = -\infty$*.*

En adelante utilizaremos la siguiente notación: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$; este conjunto se denomina $\mathbb{R}$ *ampliado.*

Proposición 4 *Sean* a_n *y* b_n *dos sucesiones covergentes a* ℓ *y* m *respectivamente; entonces:*

1. $\lim(a_n + b_n) = \ell + m$
2. $\lim a_n b_n = \ell \cdot m$
3. *Si* $b_n \neq 0$ *para todo* n *y* $m \neq 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{m}$*.*
4. *Si* $b_n > 0$ *para todo* $n \geq N$ *y* $m = 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = +\infty$
5. *Si* $b_n < 0$ *para todo* $n \geq N$ *y* $m = 0$*, entonces* $\lim \dfrac{1}{b_n} = -\infty$

Esta proposición se generaliza a limites infinitos con la proposición siguiente. En el enunciado de la misma vamos a utilizar varias expresiones donde se utiliza el símbolo ∞; tales expresiones deben considerarse como *abreviaturas*; por ejemplo, $+\infty + \ell = +\infty$ debe leerse como sigue: *el límite de una sucesión que es suma de una sucesión divergente a* $+\infty$ *y otra convergente a* ℓ*, es* $+\infty$*.*

Proposición 5 *La siguientes igualdades simbólicas son válidas:*

1. $\pm\infty + \ell = \pm\infty$
2. $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty), \quad (-\infty) + (-\infty) = (-\infty).$
3. $(+\infty)(+\infty) = +\infty, \quad (-\infty)(-\infty) = +\infty,$ $(+\infty)(-\infty) = -\infty.$

4. $1/(\pm\infty) = 0$

Como se puede ver, las siguientes situaciones no están contempladas en la proposición anterior y, por tanto, no pueden resolverse directamente:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \qquad \left(\frac{0}{0}\right), \qquad (0\cdot\infty), \qquad ((+\infty)-(+\infty))$$

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*; en estos casos necesitaremos realizar una serie de transformaciones algebraicas o aplicar alguna técnica que convierta la expresión de la sucesión en otra que sí permita calcular el límite; este tipo de problemas se conoce como *cálculo de límites* y en el resto de la sección vamos a profundizar en su estudio.

1.1. Monotonía y convergencia

Proposición 6 *Las siguientes propiedades relacionan las condiciones de monotonia y de convergencia.*

1. *Una sucesión convergente tiene un único límite.*
2. *Toda sucesión convergente está acotada.*
3. *Toda sucesión creciente y acotada (superiormente) es convergente.*
4. *Toda sucesión decreciente y acotada (inferiormente) es convergente.*
5. *Toda sucesión creciente y no acotada (superiormente) diverge a $+\infty$.*
6. *Toda sucesión decreciente y no acotada (inferiormente) diverge a $-\infty$.*

Ejemplos:

1. La sucesión $a_n = n$ es creciente y no acotada y por tanto, $\lim n = +\infty$.
2. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es decreciente y acotada inferiormente y en consecuencia convergente. Por la proposición 4 podemos afirmar que: $\lim \frac{1}{n} = 0$.
3. La sucesión
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
es una sucesión creciente y acotada; en consecuencia, la sucesión es convergente. El límite de esta sucesión es un número irracional y transcendente (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales) y se denota por "e" siendo su valor aproximado $2'7182\ldots$. (De esta forma se define el número e, base del logaritmo neperiano y de la función exponencial).

   En general se verifica que, si x_n es una sucesión divergente a $\pm\infty$, entonces
$$\lim \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$
4. La sucesión
$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$
es una sucesión decreciente y acotada y, en consecuencia, convergente. El límite se denomina *constante de Euler*, se denota por γ y su valor aproximado es $0'577\ldots$; no se sabe aún si este número es irracional.

   La constante de Euler se utiliza en el cálculos de límites mediante la siguiente igualdad:
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \gamma + \log n + x_n$$
donde x_n es una sucesión convergente a 0. Por ejemplo, podemos demostrar que:
$$\lim \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n} = 1$$

Teorema 7 (Teorema de Compresión) *1. Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones tales que $a_n \le c_n \le b_n$ y $\lim a_n = \lim b_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces, $\lim c_n = \ell$.*

2. Sea a_n una sucesión convergente a 0 y b_n una sucesión acotada; entonces, $\lim a_n b_n = 0$.

1.2. Límites de sucesiones y límites de funciones

Los conceptos de límite de sucesión y límite de función están estrechamente relacionados. De hecho, la convergencía de funciones se puede definir en términos de límites de sucesiones:

Teorema 8 (Caracterización secuencial) *Consideremos una función $f\colon D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si:* ***para toda sucesión x_n tal que***

- $\boldsymbol{\{x_n\} \subset D}$,
- $\boldsymbol{x_n \neq a}$ ***para todo*** $\boldsymbol{n}$***, y***
- $\boldsymbol{\lim x_n = a}$,

se verifica que $\boldsymbol{\lim f(x_n) = \ell}$.

Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas:

1. Dada una función f con dominio D, solo podemos estudiar la convergencia de f en a si *existe* una sucesión contenida en D y convergente hacia a. Un número a con está propiedad se denomina *punto de acumulación* de D.

2. Respecto del cálculo de límites, el teorema anterior se puede utilizar en dos direcciones. Por una parte, lo podemos utilizar para calcular límites de sucesiones utilizando las propiedades de continuidad de las funciones:

$$\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   En este ejemplo, hacemos uso de que $\lim\limits_{x\to\pi/3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ por ser la función seno una función continua en $\mathbb{R}$.

3. Por otra parte, podemos utilizar el teorema anterior para probar que una función no es convergente, encontrando dos sucesiones en las hipótesis del teorema pero cuyas imágenes no tengan el mismo límite. Por ejemplo, vamos a probar que:

   La función $\operatorname{sen} x$ NO tiene limite en $+\infty$, es decir, *“$\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ no existe”*

   Para ello, haciendo uso del teorema anterior, vamos a tomar dos sucesiones divergentes a $+\infty$:

$$x_n = 2\pi n \qquad\qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

   Dado que:

$$\lim \operatorname{sen} x_n = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim \operatorname{sen} y_n$$

   podemos concluir que la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$.

El teorema que recordamos a continuación junto con la observación 2 anterior, son de gran ayuda en el cálculo de límites.

Teorema 9 *1. Todas las funciones elementales son continuas en su dominio.*

2. Si una función está determinada por operaciones algebraicas (suma, producto, cociente y composición) entre funciones elementales en un entorno de un punto a (entorno en $\mathrm{Dom}(f)$), entonces la función es continua en a.

Un tipo de expresiones que no hemos contemplado hasta ahora son aquellas de la forma $a_n = {x_n}^{y_n}$; para trabajar con ellas usaremos *siempre* la siguiente igualdad:

$${x_n}^{y_n} = e^{y_n \log x_n}$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial es continua en $\mathbb{R}$ y que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, podemos escribir que:

$$\lim {x_n}^{y_n} = e^{\lim(y_n \log x_n)}$$

En este tipo sucesiones surgen tres nuevos tipos de indeterminaciones,

$$1^\infty \qquad\qquad \infty^0 \qquad\qquad 0^0$$

que se reducen, por la igualdad anterior, a la indeterminación $0 \cdot \infty$.

1.3. Infinitésimos e infinitos equivalentes

Definición 10 *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ en un entorno reducido de a.*

Definición 11 *Decimos que dos funciones f y g, son equivalentes en a si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

La equivalencia de funciones es realmente importante en los casos en que las dos funciones son infinitésimos en a o las funciones son divergentes a $\pm\infty$ en a, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente. En el teorema siguiente vemos como se pueden utilizar la equivalencia de infinitésimos en el cálculo de límites de funciones; la caracterización secuencial de límites de funciones, hace que esta técnica sea igualmente útil para el cálculo de límites de sucesiones.

Teorema 12 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y $h(x)$ otra función definida en un entorno de a. Entonces:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x)$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a} g(x)h(x)$ *existe, y en tal caso coinciden.*
2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)}$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{g(x)}$ *existe, y en tal caso coinciden.*
3. $\lim\limits_{x\to a}\log_r f(x)h(x)$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a}\log_r g(x)h(x)$ *existe, y en tal caso coinciden.*
4. $\lim\limits_{x\to a}\log_r\dfrac{h(x)}{f(x)}$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a}\log_r\dfrac{h(x)}{g(x)}$ *existe, y en tal caso coinciden.*
5. $\lim\limits_{x\to a} h(x)\sqrt[n]{f(x)}$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a} h(x)\sqrt[n]{g(x)}$ *existe, y en tal caso coinciden.*
6. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{\sqrt[n]{f(x)}}$ *existe si y solo si* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{\sqrt[n]{g(x)}}$ *existe, y en tal caso coinciden.*

Este teorema resume la técnica que se conoce como *sustitución de infinitésimos equivalentes* ya que, en la práctica, las equivalencias dadas en el enunciado, se convierten en igualdades. Por ejemplo, en el cálculo de un límite aplicaríamos el apartado 2 escribiendo $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{g(x)}$ *una vez verificadas las hipótesis del teorema*. Por otra parte, debemos tener en cuenta que el teorema recoge las únicas sustituciones generales que podemos realizar y que por lo tanto, ***no debemos sustituir infinitésimos en otras situaciones***.

Las equivalencias fundamentales son:

$$\begin{array}{rcll}
\operatorname{sen} x & \equiv & x & \text{en } 0\\
\operatorname{tg} x & \equiv & x & \text{en } 0\\
1-\cos x & \equiv & \dfrac{x^2}{2} & \text{en } 0\\
\operatorname{arc\,sen} x & \equiv & x & \text{en } 0\\
\operatorname{arc\,tg} x & \equiv & x & \text{en } 0\\
e^x-1 & \equiv & x & \text{en } 0\\
\log(x+1) & \equiv & x & \text{en } 0
\end{array}$$

A partir de estas se pueden obtener muchas otras con los siguientes resultados:

Teorema 13 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y sea $h(x)$ continua en b y tal que $h(b)=a$. Entonces, $f\circ h$ y $g\circ h$ son infinitésimos equivalentes en b. (Queda implícito que las composiciones se pueden realizar en un entorno de b).*

Proposición 14 *Si f y g son infinitésimos equivalentes en a y $\lambda\in\mathbb{R}^*$, entonces λf y λg también son infinitésimos equivalentes en a.*

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcll}
\operatorname{tg}(x^2-1) & \equiv & x^2-1 & \text{en } 1\\
a^x-1 & \equiv & x\log a & \text{en } 0\\
\log x & \equiv & x-1 & \text{en } 1
\end{array}$$

1.3.1. Sucesiones equivalentes

Definición 15 *Decimos que dos sucesiones a_n y b_n, son equivalentes en a si*

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=1$$

Definición 16 *Decimos que la sucesión a_n es un infinitésimo en a si $\lim a_n=0$ y $a_n\neq 0$ para todo $n\geq N$.*

La caracterización secuencial de límite de función, permite crear equivalencias entre sucesiones infinitesimales.

Proposición 17 *Sean f y g dos infinitésimos equivalentes en a y a_n una sucesión convergente a 'a' y contenida en un entorno reducido de 'a'. Entonces, $f(a_n)$ y $g(b_n)$ son infinitésimos equivalentes.*

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{1}{n} &\equiv \frac{1}{n} \\ \log\frac{n+2}{n+1} &\equiv \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

1.3.2. Infinitos equivalentes

Todo lo dicho en las secciones anteriores para infinitésimos equivalentes es válido para infinitos equivalentes. Las dos equivalencias de sucesiones divergentes a infinito más utilizadas son las siguientes:

- $\lim \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\log n} = 1$. Mas adelante demostraremos que efectivamente el límite de la sucesión del numerador es $+\infty$.
- Fórmula de Stirling: $\lim \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$

1.4. Criterio de Stöltz-Cesaro

Teorema 18 (Criterio de Stöltz-Cesaro) *Sea b_n una sucesión creciente y divergente a $+\infty$ y sea a_n otra sucesión: si el límite*

$$\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

existe, entonces el límite $\lim \frac{a_n}{b_n}$ también existe y ambos coinciden.

Este resultado se suele aplicar en forma de igualdad:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n};$$

pero debemos tener en cuenta que, si al estudiar el limite del segundo miembro deducimos que no existe, entonces *no podemos concluir* que el límite del primer miembro tampoco exista; en estas situaciones debemos desestimar el uso de este criterio e intentar otro método.

Ejemplo: Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = n$ (b_n es creciente y divergente a $+\infty$); en este caso, la sucesión $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ es la sucesión $\{-2, 2, -2, \dots\}$ que es NO CONVERGENTE. Sin embargo, la sucesión $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente a 0.

Corolario 19 (Criterio del cociente) *Sea x_n una sucesión de términos positivos tal que $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$, entonces, $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell$*

Igual que antes, este resultado se escribe en forma de igualdad:

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Nuevamente, puede existir el límite del primer miembro y no existir el límite del segundo.

1.5. Subsucesiones

Hemos visto anteriormente que la relación entre límites de sucesiones y límites de funciones es de gran utilidad para concluir que una función no es convergente en un punto. Las *subsucesiones* son la herramienta más práctica para la resolución del mismo problema en sucesiones.

Definición 20 *Decimos que la sucesión b_n es una subsucesión de a_n si existe una aplicación $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ creciente tal que: $b_n = a_{f(n)}$.*

Teorema 21 *Una sucesión a_n converge a $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si toda subsucesión converge a ℓ.*

Corolario 22 *Supongamos que dos subsucesiones b_n y c_n de a_n verifican que $\lim b_n \neq \lim c_n$; entonces, la sucesión a_n no es convergente.*

2. Series Numéricas

Definición 23 *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Consideremos la sucesión $\{S_n\}$ dada por: $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. A esta sucesión $\{S_n\}$ se la denomina* serie numérica asociada a *$\{a_n\}$ y se denota $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. El* *número* a_n *se denomina* término n-esimo de la serie *y* S_n *es* la n-esima suma parcial.

Denominaremos *suma de la serie* al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales; si este límite es ℓ, escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \ell$. Si este límite es un número real, diremos que la serie es *convergente*, en caso contrario diremos que es *divergente*; si el límite es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la serie *diverge a* $+\infty$ *o* $-\infty$ respectivamente. La convergencia o divergencia de una serie se denomina *carácter de la serie*.

2.1. Propiedades elementales. Ejemplos

Proposición 24 *Si la sucesión* $\{b_n\}$ *se obtiene a partir de la sucesión* $\{a_n\}$ *añadiendo, eliminando o modificando un conjunto finito de términos, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter.*

En particular, si $a_n = b_m$ para todo $n \geq N_1$ y para todo $m \geq N_2$, entonces las series asociadas a a_n y b_n tienen el mismo carácter. Un ejemplo inmediato donde se ve la importancia de esta propiedad es el siguiente: las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ tienen el mismo carácter.

Atendiendo a esta propiedad, en adelante, cuando simplemente estemos estudiando el carácter de una serie, no será necesario indicar cuál es el primer término de la misma escribiendo simplemente: $\sum a_n$. Sin embargo, a la hora de calcular la suma de una serie sí es necesario conocer el primer término.

Teorema 25 (Condición Necesaria) *Si una serie* $\sum a_n$ *es convergente entonces* $\lim a_n = 0$. *Equivalentemente, si* $\lim a_n \neq 0$, *entonces* $\sum a_n$ *es divergente.*

Teorema 26 (Serie Geométrica) *Si* $a \neq 0$, *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \ldots$ *se denomina serie geométrica de término inicial 'a' y razón* r. *Esta serie verifica:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \textit{converge a } \dfrac{a}{1-r} & \textit{si } |r| < 1 \\ \textit{diverge} & \textit{si } |r| > 1 \end{cases}$$

Corolario 27 *En general, decimos que la serie* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *es geométrica si* $a_{n+1}/a_n = r \in \mathbb{R}$ *para todo* n. *Esta serie converge si y solo si* $|r| < 1$ *y en tal caso* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \dfrac{a_N}{1-r}$.

Ejemplos:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3^{n+2}}$: $\quad \dfrac{3^{n+2}}{3^{n+3}} = \dfrac{1}{3} = r$; es decir, la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$; por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/18$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{3n}}{7^n}$: $\quad \dfrac{2^{3n+3}7^n}{7^{n+1}2^{3n}} = \dfrac{8}{7} = r$; por tanto la serie es geométrica de razón $8/7$ y en consecuencia divergente a $+\infty$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$: $\quad$ la serie es geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1 y por lo tanto, es convergente y su suma es $5/6$.

Teorema 28 (Serie armónica) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ *se denomina* serie armónica *y es divergente a* $+\infty$.

Dado que la sucesión de sumas parciales es creciente, para demostrar el teorema basta comprobar que alguna subsucesión diverge a $+\infty$; sea S_n la sucesión de sumas parciales y consideremos la subsucesión S_{2^n}:

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\geq (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + n\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dado que la sucesión minorante diverge a $+\infty$, la sucesión S_{2^n} también.

Teorema 29 (Serie telescópica) *Sea* b_n *una sucesión. La serie* $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ *se denomina* serie telescópica. *Esta serie converge si y solo si la sucesión* b_n *converge y en tal caso,* $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_N - \lim b_{n+1}$.

Ejemplo: $\sum_{n=2}^{\infty}\log\frac{n+1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}(\log(n+1) - \log n) = -\log 2 + \lim\log(n+1) = +\infty$

Teorema 30 *Si* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *converge a 'a' y* $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ *converge a 'b', entonces* $\sum_{n=N}^{\infty}(a_n + b_n)$ *converge a 'a + b' y* $\sum_{n=N}^{\infty} c\cdot a_n$ *converge a 'c · a', para todo* $c \in \mathbb{R}$.

2.2. Series de términos positivos

Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre será sencillo; encontrar una expresión para las sumas parciales que permita calcular su límite es, en general, un problema bastante difícil. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor.

En esta sección vamos a estudiar las series de términos positivos. Este estudio ayudará en la siguiente sección a estudiar las series de término general con signo arbitrario.

Proposición 31 *Si* $\{a_n\}$ *es una sucesión de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada a ella es creciente y en consecuencia, la serie* $\sum a_n$ *es o bien convergente o bien divergente a* $+\infty$.

Teorema 32 (Criterio de condensación) *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente de términos positivos. Entonces* $\sum a_n$ *y* $\sum 2^k a_{2^k}$ *tienen el mismo carácter.*

Corolario 33 (Series p-armónicas) *Las series* $\sum \frac{1}{n^p}$ *para* $p > 0$ *se denominan* p–armónicas. *Estas series verifican: si* $0 < p \leq 1$, *es divergente; si* $p > 1$ *es convergente.*

Por el criterio de condensación, la serie p–armónica $\sum \frac{1}{n^p}$ tiene el mismo carácter que $\sum \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum \frac{1}{2^{k(p-1)}}$; esta serie geométrica converge si y solo si $p > 1$.

La importancia de las series p–armónicas está en que permiten estudiar muchas otras utilizando los criterios de comparación.

Teorema 34 (Criterio de comparación) *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series tales que* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Si* $\sum b_n$ *converge entonces* $\sum a_n$ *también converge.*
2. *Si* $\sum a_n$ *diverge entonces* $\sum b_n$ *también diverge.*

Ejemplo: La serie $\sum \frac{1}{n+2^n}$ es convergente ya que

$$\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y la serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente.

Teorema 35 (Criterio de comparación por paso al límite) *Sean* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *dos series de términos positivos y tal que* $b_n \neq 0$ *para todo* n. *Sea* $\ell = \lim \frac{a_n}{b_n}$; *entonces:*

1. *Si* $\ell > 0$ *ambas series tienen el mismo carácter.*
2. *Si* $\ell = 0$ *y* $\sum b_n$ *converge, entonces* $\sum a_n$ *también converge.*
3. *Si* $\ell = \infty$ *y* $\sum a_n$ *converge, entonces* $\sum b_n$ *también converge.*

Ejemplo: La serie $\sum n \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}$ no es convergente ya que

$$\lim \frac{n \operatorname{sen}\frac{1}{n^2}}{1/n} = \lim \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}}{1/n^2} = 1$$

y la serie $\sum \frac{1}{n}$ es divergente.

Teorema 36 (Criterio de la raíz) *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$*; entonces:*

1. *Si* $\ell < 1$ *la serie converge.*
2. *Si* $\ell > 1$ *la serie diverge.*
3. *Si* $\ell = 1$ *no podemos deducir nada:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.*

Una importante característica de las series de términos positivos es que las sumas parciales permiten aproximar, por defecto, la suma de la serie. Para poder utilizar estas aproximaciones es necesario estimar el error cometido. Si determinamos la convergencia de una serie utilizando el criterio de la raíz, podemos estimar este error utilizando el siguiente resultado:

Proposición 37 *Sea* $\sum a_n$ *una serie tal que* $0 < \ell = \lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces, para todo* $N \in \mathbb{N}$*:*

$$S - S_N \leq \frac{\ell^{N+1}}{1 - \ell}$$

Corolario 38 (Criterio del cociente) *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*; entonces, para todo* $N \in \mathbb{N}$*:*

1. *Si* $\ell < 1$ *la serie converge.*
2. *Si* $\ell > 1$ *la serie diverge.*
3. *Si* $\ell = 1$ *no podemos deducir nada:* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.*

Proposición 39 *Sea* $\sum a_n$ *una serie tal que* $0 < \ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$S - S_N \leq a_N \frac{\ell}{1 - \ell}$$

Teorema 40 (Criterio de Raabe) *Sea* $\sum a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim n \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$*; entonces, para todo* $N \in \mathbb{N}$*:*

1. *Si* $\ell > 1$ *la serie converge.*
2. *Si* $\ell < 1$ *la serie diverge.*
3. *Si* $\ell = 1$ *no podemos deducir nada: para* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, *el límite de la condición de Raabe vale 1 y es divergente; para la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *el límite de la condición es 1 y la serie es convergente.*

Proposición 41 *Sea* $\sum a_n$ *una serie tal que* $\ell = \lim n \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$S - S_N \leq \frac{N a_N}{\ell - 1}$$

El criterio de Raabe se aplica *siempre* después del criterio del cociente en el caso en que este no decida nada. Debemos tener en cuenta que las *simplificaciones* realizadas al aplicar el criterio del cociente pueden ser útiles al aplicar el criterio de Raabe, pero no las posibles sustituciones de infinitésimos.

2.2.1. Determinación del carácter

El siguiente esquema resume los criterios que hemos introducido en el orden más adecuado para su aplicación.

1. Comprobar si es una serie conocida: geométrica, armónica, cociente de polinomios, telescópica, ... (A lo largo del tema se irán estudiando distintos tipos de series; tener en cuenta las series ya conocidas puede ahorrar mucho trabajo).
2. Condición necesaria. Esta es la primera comprobación que debe hacerse si el límite es fácil de calcular.
3. Criterios del cociente–Raabe o criterio de la raíz. El criterio del cociente o el de la raíz son los primeros

que conviene utilizar; elegir uno u otro depende de la forma del término general de la serie. Optaremos preferiblemente por el criterio del cociente cuando sea posible y que permite utilizar posteriormente el de Raabe.

4. Criterio de condensación. Es conveniente utilizarlo, cuando sea posible, en series donde interviene la función logaritmo.

5. Comparación. Si ninguno de los criterios anteriores decide el carácter de la serie, intentaremos buscar una serie conocida con la que poder compararla; solo la práctica y la resolución de bastantes problemas facilita esta etapa.

2.2.2. El cociente a_{n+1}/a_n

Como ya se habrá comprobado, el estudio del cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ es de gran utilidad para la determinación del carácter de una serie. En esta sección, recogemos toda la información que puede obtenerse de dicho cociente. Siguiendo el esquema de la sección anterior, el estudio de este cociente se incluirá en el primer paso.

1. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ entonces la serie es una serie geométrica.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ la serie es hipergeométrica (ver ejercicios).

3. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y por tanto su límite no puede ser 0: *la serie es divergente.*

4. Si $a_n > 0$ y $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ para todo $n > N$, la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.

2.2.3. Sucesiones decrecientes

El criterio de condensación y el criterio de Leibniz (que veremos en la sección siguiente) incluyen entre sus condiciones el que una sucesión sea decreciente. Para demostrar que una sucesión es decreciente podemos utilizar los siguientes métodos:

1. Si $a_n - a_{n+1} > 0$, entonces a_n es decreciente.

2. Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces a_n es decreciente.

3. Si $f\colon [N, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq N$, entonces a_n es una sucesión decreciente a partir de N. (para determinar si una función es decreciente podemos utilizar su derivada).

4. Por último, podemos utilizar diversas propiedades algebraicas de las sucesiones y funciones decrecientes (ver ejercicio 23).

2.3. Series alternadas

Los teoremas dados en la sección anterior son válidos solamente para series de términos positivos. En esta, vamos a ver dos resultados que permiten estudiar algunas series con términos de signo arbitrario.

Definición 42 *Decimos que una serie* $\sum a_n$ *es* absolutamente convergente *si la serie* $\sum |a_n|$ *es convergente.*

Teorema 43 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Una serie convergente pero no absolutamente convergente se dice *condicionalemente convergente.*

Definición 44 *Una serie* $\sum a_n$ *se dice* alternada *si para todo* n *se verifica que* $a_n/a_{n+1} < 0$*; es decir, su término general es de la forma* $(-1)^n b_n$ *o* $(-1)^{n+1} b_n$ *donde* b_n *es una sucesión de términos positivos.*

Teorema 45 (Criterio de Leibniz) *Sea* $\sum(-1)^n a_n$ *una serie tal que*

1. *la sucesión* a_n *es decreciente y de términos positivos,*

2. $\lim a_n = 0$,

entonces, la serie es convergente. (Obsérvese que, según hemos visto, la condición $\lim a_n = 0$ *es necesaria para cualquier serie.)*

Proposición 46 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *una serie en las condiciones del criterio de Leibniz,* S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$|S_N - S| < a_{N+1}$$

En la acotación del error tenemos que usar el valor absoluto porque en este caso el error puede ser por exceso o por defecto.

3. Suma de Series

Un vez que hemos determinado la convergencia de una serie, podemos abordar el cálculo de su suma. Este tipo de problemas no es trivial y solo unos tipos determinados de series son fácilmente sumables. A continuación vamos a dar la relación de las series fundamentales; a partir de ellas y de las propiedades algebraicas de las series numéricas y de potencias, podemos sumar muchas más.

1. Series geométricas: $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$; son convergentes solamente para $|r| < 1$ y en tal caso su suma vale: $S = \frac{a_N}{1-r}$

2. Series telescópicas: $\sum_{n=N}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_N - \text{lím}\, b_{n+1}$

3. Series aritmético-geométricas: $\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n$; esta serie converge si y solo si $|r| < 1$ y en tal caso su suma es:

$$\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n = \frac{(aN+b)r^N}{1-r} + \frac{ar^{N+1}}{(1-r)^2}$$

4. Series Hipergeométricas: $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ para todo $n > m$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$; converge si y solo si $\gamma > \alpha + \beta$ y en tal caso su suma es: $S = \frac{a_N(\alpha(N-1)+\gamma)}{\gamma - \alpha - \beta}$.

5. Series de Taylor. En el tema siguiente desarrollaremos la teoría necesaria para justificar las siguientes igualdades:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x), \qquad x \in [-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen} x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x, \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = (1+x)^\alpha, \qquad x \in (-1,1)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\alpha}{n} = 0, \qquad \alpha > 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} = 2^\alpha, \qquad \alpha > -1, \alpha \neq 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1} = \operatorname{arc\,sen} x, \qquad |x| \leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} = \operatorname{arc\,sen} x, \qquad |x| \leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arc\,tg} x, \qquad |x| \leq 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{-1/2}{n}x^{2n+1} = \operatorname{argsenh} x, \qquad |x| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n+1)}x^{2n+1} = \operatorname{argsenh} x, |x| < 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{argtgh} x, \qquad |x| < 1$$

Recordemos que, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\binom{\alpha}{n}$ se define como:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

3.1. Series del tipo $P(n)/n!$

Vamos a estudiar las series del tipo: $\sum \dfrac{P(n)}{(n+q)!}$ donde P es un polinomio de grado p y $q \in \mathbb{Z}$. Por el criterio del cociente deducimos que este tipo de series son siempre convergentes; además, estas series son fácilmente sumables como sigue. Partimos de la siguiente descomposición del polinomio P:

$$P(n) = a_p(n+q)(n+q-1)\cdots(n+q-p+1) + P_1(n)$$

donde P_1 es un polinomio de grado menor o igual que $p-1$ (y que puede ser descompuesto de la misma forma) y a_p es el coeficiente de n^p en P. Tal descomposición se obtiene fácilmente imponiendo la igualdad y *acumulando en P_1, los términos que no estén en el primer sumando*. A partir de esta descomposición se obtiene que:

$$\sum \frac{P(n)}{(n+q)!} = a_p \sum \frac{1}{(n+q-p)!} + \sum \frac{P_1(n)}{(n+q)!}$$

La primera serie se suma utilizando la serie de Taylor de la función exponencial, como veremos a continuación, y la segunda es una serie del mismo tipo inicial pero de tal forma que el polinomio del numerador tiene grado estrictamente menor. Si aplicamos la descomposición hasta conseguir que el polinomio del numerador se reduzca a una constante, habremos reducido el problema a sumar varias series del tipo $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} &= \sum_{n=N+k}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{N+k-1} \frac{1}{n!} = e - \sum_{n=0}^{N+k-1} \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Ingeniería Informática
Relación 2 de *Cálculo para la computación*

Curso 2001/02

1. Responder las siguientes preguntas razonando las respuestas con «precisión»:

   a) Dadas dos sucesiones a_n y b_n consideramos los conjuntos de sus elementos: $A = \{a_n\}$, $B = \{b_n\}$. Si $A = B$, ¿podemos afirmar que $\lim a_n = \lim b_n$?

   b) Una sucesión cuyo conjunto de elementos tiene dos puntos de acumulación distintos ¿puede ser convergente?

   c) Es cierto que ¿toda sucesión acotada es convergente?

   d) ¿Es correcto escribir la igualdad simbólica $\frac{\infty}{0} = \infty$?

   e) Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \operatorname{sen} n$, ¿podemos afirmar que el límite $\lim \sqrt[n]{a_n}$ no existe?

   f) Las sucesiones $a_n = \operatorname{sen} n$ y $b_n = n$ ¿son infinitésimos equivalentes?

2. Resolver los siguientes límites:

$$\lim \frac{n+3}{n^3+4} \qquad \lim \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n} \qquad \lim \sqrt[n]{a} \text{ si } a > 0$$

$$\lim \frac{\log n}{\log 5n} \qquad \lim \frac{\log(n+3)}{\log n} \qquad \lim(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1})$$

$$\lim \left(n\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{a}{n}}\right)\right) \qquad \lim \left(n - \sqrt{(n+a)(n+b)}\right) \qquad \lim n\,(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n-1]{a})$$

3. Decimos que dos sucesiones a_n y b_n son infinitos equivalentes si $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ y $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

   a) Demostrar que $a_n = \log(n+k)$, $b_n = \log(kn)$ y $c_n = \log n$ son infinitos equivalentes.

   b) Demostrar que si kn^p es el término de grado mayor en el polinomio $P(n)$, entonces $a_n = P(n)$ y $b_n = kn^p$ son infinitos equivalentes.

   c) Demostrar que $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.

4. Calcular el límite $\lim \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son polinomios. (Tener especial cuidado en contemplar todas las posibles situaciones diferentes).

5. ♣ Dada la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n(\log n)^2}$ calcular el límite $\lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.

6. Los siguientes límites se resuelven utilizando el criterio de Stöltz o el criterio del cociente:

$$\lim \sqrt[n]{n} \qquad \lim \sqrt[n]{n^2+n}$$

$$\lim \frac{\log n}{n} \qquad \lim \frac{(\log n)^2}{n}$$

$$\lim \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} \qquad \lim \frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\dots(3n+n)}$$

$$\lim \frac{2+4+\cdots+2^n}{3+9+\cdots+3^n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\lim \frac{1}{n^2}\left(2 + \frac{3^2}{2} + \cdots \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right) \qquad \lim \frac{\log(1\cdot 2\cdot \cdots \cdot n)}{n \log n}$$

7. ♣ Calcular el límite $\lim \dfrac{n^\alpha}{e^n}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. (Observar primero que para $\alpha < 0$ el cálculo es trivial; para $\alpha > 0$ utilizar el criterio de Stöltz).

8. Utilizar el teorema de acotación para calcular los siguientes límites:

$$\lim \frac{n!}{n^n}$$
$$\lim \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\dots(1+\sqrt{n})}$$
$$\lim \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$$
$$\lim \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$
$$\lim \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

9. Calcular el límite $\lim \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dots + \dfrac{1}{(n-1)n} + \dfrac{1}{n(n+1)} \right)$

10. Utiliza la fórmula de Stirling para calcular el límite $\lim \dfrac{n!}{n^n}$.

11. Los siguientes límites se resuelven utilizando la constante de Euler:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}\dots\sqrt[n]{e}}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n})}{\log(\log n)}$$
$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n+1}) \qquad \lim \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

12. Justificar que las siguientes sucesiones son convergentes y calcular sus límites

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \end{cases} \qquad ♣ \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \\ b_n = \dfrac{b_{n-1}+b_{n-2}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_n = 2\sqrt{c_{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = a > 0 \\ d_n = a + (d_{n-1})^2 \end{cases}$$

13. *a*) Demostrar que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2 (es decir, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

    b) Considerar la sucesión a_n definida recursivamente por: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n}$. Demostrar que dicha sucesión (de números racionales) es decreciente y acotada inferiormente (y en consecuencia convergente en $\mathbb{R}$). Demostrar a continuación que el límite es $\sqrt{2}$.

14. Dar una definición recursiva de la siguiente sucesión y calcular su límite (demostrando previamente que la sucesión es convergente):

$$\sqrt[5]{4},\ \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}},\ \sqrt[5]{4\sqrt[5]{4\sqrt[5]{4}}},\dots$$

15. Sea a_n una sucesión convergente a 'a' . Hallar los siguientes límites:

$$\lim \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}}{\log n} \qquad \lim \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} \qquad \lim \frac{e^{a_1} + e^{a_2/2} + \cdots + e^{a_n/n} - n}{\log(n+1)}$$

16. Dar una expresión general para las siguientes sucesiones y calcular sus límites

- $0'9$, $0'99$, $0'999$, $0'9999$, $\ldots$
- $0'3$, $0'33$, $0'333$, $0'3333$, $\ldots$

17. ♣ Calcular el siguiente límite:

$$\lim \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cdots \cdot (3n-1)}$$

18. Decimos que la serie $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es geométrica si $a_{n+1}/a_n = r \in \mathbb{R}$ para todo n y la denominamos *serie geométrica de razón r y término inicial a_N*: estudiar la convergencia de una serie geométrica calculando su suma cuando sea posible.

19. Demostrar que no existe el límite: $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Estudiar la existencia de los límites

$$\lim_{x\to 0} 2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x}{2 + \operatorname{sen} \frac{1}{x}} \qquad ♣ \lim_{x\to 0} \frac{x}{1 - \operatorname{sen} \frac{1}{x}}$$

20. Razonar con «exactitud» sobre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

a) Si a una serie le quitamos un conjunto finito de términos, la suma de la serie no varía.

b) Si una serie es convergente, el límite de su término general es 0.

c) Si el límite de una sucesión es 0, la serie asociada es convergente.

d) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum a_n^2$ también es convergente.

e) Si $\sum a_n$ es una serie de términos positivos y convergente, entonces $\sum \sqrt{a_n}$ también es convergente.

f) Consideremos la serie $\sum (-1)^n/n$; por el criterio de condensación, el carácter de esta serie coincide con el de la serie $\sum 2^k \frac{(-1)^{2^k}}{2^k} = \sum 1$ que es divergente. Por tanto, la serie $\sum (-1)^n/n$ es divergente.

g) Consideremos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$; dado que $\left(\frac{3}{5}\right)^{14} \approx 0'0007836\ldots$, si sumamos los 13 primeros términos de la serie, obtendremos una aproximación de la misma con tres cifras decimales exactas, ya que el resto de los sumando tienen los tres primeros decimales nulos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \approx \sum_{n=0}^{14} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{3049366328}{1220703125} \approx 2'498040896$$

21. Criterio de Prinshgeim. Sea a_n una sucesión de términos positivos y supongamos que $\lim_{n\to\infty} n^c a_n \neq 0$. Probar que:

a) Si $c > 1$ entonces, $\sum a_n$ converge.

b) Si $c \leq 1$ entonces, $\sum a_n$ no converge.

22. Demostrar las propiedades de linealidad del operador $\sum$:

    Si $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ converge a 'a' y $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ converge a 'b', entonces $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge a '$a+b$' y $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} c \cdot a_n$ converge a '$c \cdot a$'.

23. Sean f y g dos funciones crecientes y estrictamente positivas en su dominio, h una función decreciente, c_n una sucesión creciente y d_n una sucesión decreciente; demostrar que, entonces:

    a) $f + g$ es una función creciente.

    b) $f \cdot g$ es una función creciente.

    c) $1/f$ es una función decreciente.

    d) $-f$ es una función decreciente.

    e) $f \circ g$ es una función creciente y $f \circ h$ es una función decreciente.

    f) $f(c_n)$ es una sucesión creciente y $f(d_n)$ es una sucesión decreciente.

    g) $h(c_n)$ es una sucesión decreciente y $h(d_n)$ es una sucesión creciente.

24. Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son dos polinomios de grados p y q respectivamente; demostrar que entonces:

    a) Si $q - p \leq 1$ la serie diverge.

    b) Si $q - p > 1$ la serie converge

25. Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} R(n) r^n$, donde R es una función racional y $|r| \neq 1$, converge si y solo si $|r| < 1$.

    Este resultado se demuestra fácilmente con el criterio del cociente; para $r = 1$ estamos en el caso del ejercicio anterior y para $r = -1$ demostrar el siguiente resultado:

    La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ donde P es un polinomio de grado p y Q un polinomio de grado q verifica:

    a) Si $q - p > 1$ la serie converge absolutamente.

    b) Si $q - p = 1$ la serie converge condicionalmente.

    c) Si $q - p < 1$ la serie diverge.

26. Probar que: si a_n y b_n son dos infinitésimos equivalentes, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter

27. A la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (an + b) r^n$ se la denomina *aritmético-geométrica*. Estudiar el carácter de estas series y hallar su suma en los casos que sea posible (Indicación: seguir un método análogo al utilizado para las series geométricas)

28. Una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice *hipergeométrica* si verifica que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; estudiar el carácter de estas series y hallar su suma en los casos que sea posible.

29. Aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\log n}{n}$ con un error menor que 10^{-3}.

30. Aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con un error menor que 10^{-3}.

31. ♣ El objetivo de este ejercicio es demostrar el criterio del cociente: sea a_n una sucesión de términos positivos y supongamos que $\lim a_{n+1}/a_n = \ell < 1$; consideremos una constante $k \in (\ell, 1)$ y sea S_n su sucesión de sumas parciales.

a) Probar que existe un natural n_0 tal que $a_{n+1}/a_n < k$ para todo $n \geq n_0$; es decir, $a_{n+1} < ka_n$ para todo $n \geq n_0$.

b) De la desigualdad anterior deducir que $S_n + a_{n+1} - a_1 < kS_n$ y despejando S_n concluir que S_n es una sucesión acotada y por tanto convergente (que es lo que queriamos demostrar).

c) Sea N un numero natural; demostrar que $a_n < k^{n-N}a_N$ para todo $n > N$ y deducir que $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \sum_{n=N}^{\infty} k^{n-N}a_N$. Concluir que:

$$S - S_N < a_N \frac{k}{1-k}$$

d) A partir del punto anterior, demostrar que $S - S_N \leq a_N \frac{\ell}{1-\ell}$.

32. Estudiar el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^r} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{7n+4}\right)^{4n-2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{2n^3-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^a}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{2n}{n-1}\right]^{-n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+4+8+\cdots+2^n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos^2\frac{\pi n}{3}}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^1+\cdots+2^n}{4^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2n+\cdots+n^2}{n^5} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(-2)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n^2}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}; \quad a>0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}; \quad a\geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(9-a^2)n^3+3n^2+1}{7n^4-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^a(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^a+1}-\sqrt{n^a})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^c}{(3n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(an)!}$$

33. Sumar las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n(n+1)}{2^{n+1}n(n+1)}$ i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log[(1+\frac{1}{n})^n(n+1)]}{(\log(n+1)^{n+1})\log n^n}$

34. Sumar las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{10^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$

35. Sumar las siguientes series: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

36. Sumar las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,a^n}{(1+a)(1+2a)\cdots(1+na)}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)\cdots(a+n)}{n!}$

37. Sumar las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n-1}{n!}$

38. Utiliza la constante de Euler par calcular el límite de la sucesión de sumas parciales de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)}$