Universidad Tecnológica Nacional

Unidad Académica Reconquista

Ingeniería Electromecánica

Apuntes

"Transformada de Laplace"

Índice

1. CONTINUIDAD SECCIONAL

Una función $f(t)$ es seccionalmente continua en un intervalo $[a,b]$ si existe una partición del mismo, en número finito de partes, en cada una de las cuales la función es continua y además, tiene límites laterales finitos en los extremos de cada subintervalo.

Es consecuencia de esta definición que una función continua en un intervalo $[a,b]$ es seccionalmente continua en el mismo.

En efecto, si se divide el intervalo $[a,b]$ en dos o más partes se comprueba que en cada una de ellas la función continua verifica las condiciones enunciadas anteriormente.

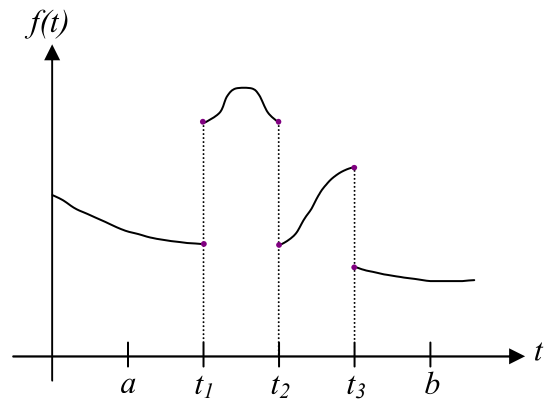

Figura 1

2. FUNCIONES DE ORDEN EXPONENCIAL

Se dice que una función $f(t)$ es de "orden exponencial α" cuando t tiende a infinito, o simplemente que es de orden exponencial, si existen dos constantes reales "M" y "α" mayores que cero, tales que a partir de cierto valor de $t > \mathrm{H}$, es

$$|f(t)| < M.e^{\alpha t}$$

Se dice también que $f(t)$ está dominada por $M.e^{\alpha t}$ o que es mayorante de la función $f(t)$.

Si la función es de orden exponencial, para todo $t > \mathrm{H}$, se verifica la doble desigualdad:

$$-M.e^{\alpha t} < f(t) < M.e^{\alpha t} \qquad \forall\, t > H$$

a gráfica de la función $f(t)$, a partir de $t > H$ se encuentra entre las curvas simétricas de las funciones exponenciales $M.e^{\alpha t}$ y $-M.e^{\alpha t}$.

En el gráfico siguiente aparecen algunas funciones de orden exponencial

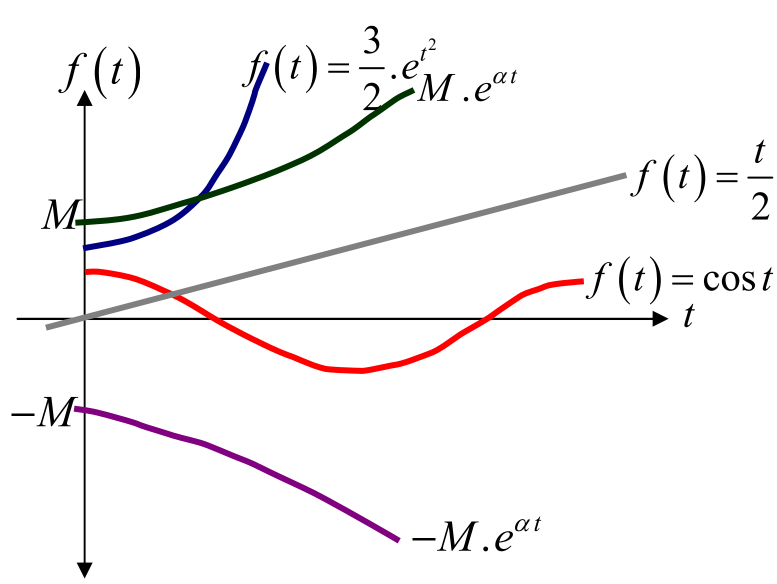

Figura 2

3. *TRANSFORMADA DE LAPLACE*

Sea $f(t)$ una función definida para todo t real positivo.

Si la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ existe, es decir, si esta integral converge para algún valor de $s>0$, será una función del parámetro s. Esta función recibe el nombre de "***TRANSFORMADA DE LAPLACE DE LA FUNCIÓN*** $f(t)$"

Denotaremos la *Transformada de Laplace de* $f(t)$ con cualquiera de las siguientes formas:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ se lee: La Transformada de $f(t)$ es $F(s)$

$f(t) \subset F(s)$ se lee: $f(t)$ tiene por transformada a $F(s)$

En la definición:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s)$$

$f(t)$ es la "función original",

$F(s)$ es la "imagen o transformada",

e^{-st} es el "núcleo de la transformación",

s es la "variable simbólica".

4. *EXISTENCIA DE LA TRASNFORMADA DE LAPLACE*

Si una función es seccionalmente continua en un intervalo finito, $0<t<H$, y es de orden exponencial α para todo $t>H$, existe la transformada de Laplace de $f(t)$ para todo $s>\alpha$.

Demostración:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Esta integral se puede descomponer dividiendo el intervalo de integración en el punto H. Resultará así la suma de dos integrales, la primera en el intervalo finito $[0,H]$ y la segunda en el intervalo infinito $[H,\infty]$.

Como $f(t)$ es seccionalmente continua en el intervalo $[0,H]$ la primera integral existe, de modo que nos ocuparemos de la segunda.

La función $f(t)$ es de orden exponencial α en el intervalo $[H,\infty]$, en consecuencia, para $t>H$, será:

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| \le \int_H^\infty \left|e^{-st}\right|\left|f(t)\right| dt \le \int_H^\infty e^{-st} M\, e^{\alpha t}\, dt$$

$$\left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right|\left|\int_H^\infty e^{-st} f(t) dt\right| < M\int_H^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt$$

Integrando el segundo miembro resulta:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = M\left|-\frac{-e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha}\right|^\infty$$

Si $s<\alpha \;\Rightarrow\; s-\alpha>0<H \;\Rightarrow\; e^{-(s-\alpha)t} \;\to$ o cuando $t\to\infty$

En consecuencia: $\left|\int_H^\infty e^{-st} f(t)\, dt\right| <= \dfrac{M\, e^{-(s-\alpha)H}}{s-\alpha}$ para todo $s>\alpha$

Por lo expuesto, la integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \text{ converge para todo } s > \alpha$$

Si α es el mínimo orden exponencial de $f(t)$, la Transformada de Laplace de esta función existe en el intervalo (α, ∞). No es posible asegurar la existencia de la integral en el $(0, \alpha)$.

Las condiciones expresadas anteriormente para la existencia de la transformada de Laplace ***son suficientes*** pero no necesarias. Esto significa que a la gran variedad de funciones seccionalmente continuas y de orden exponencial, se pueden agregar otras que a pesar de no cumplir estas condiciones admiten transformada.

5. *TRANSFORMADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES*

A continuación deduciremos las fórmulas de transformación de algunas de las funciones elementales que aparecen con frecuencia en una ecuación diferencial lineal de orden "n".

5. a) $\boxed{\mathcal{L}\{1\} = 1/s}$ para $s > 0$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty 1.e^{-st}\, dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^p e^{-st}\, dt = \lim_{p\to\infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^p =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \left(-\frac{e^{-sp}}{s} \right) + \frac{e^{-s.0}}{s} = 0 + \frac{1}{s} \qquad \text{si } s > 0$$

5. b) $\boxed{\mathcal{L}\{t\} = 1/s^2}$ para $s > 0$

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty t^{-st}\, dt = \lim_{p\to\infty} \int_0^p t\, e^{-s\tau} dt$$

Para integrar por partes hacemos:

$u = t \quad \Rightarrow \quad du = dt$ y resulta:

$dv = e^{-st}\, dt \qquad v = e^{-st}/-s$

$$\mathcal{L}\{t\} = \lim_{p\to\infty} \left. \frac{t\, e^{-s\tau}}{-s} \right|_0^p + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, dt \qquad \textbf{(1)}$$

Cuando $s > 0$ el $\lim_{p\to\infty} \frac{p\, e^{-st}}{-s} = \lim_{p\to\infty} \frac{p}{-se^{-sp}} =$

Aplicando la regla de L´Hopital

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{1}{-s^2\, e^{-sp}} = 0$$

Para $t = 0$ es $\frac{t\, e^{-st}}{-s} = \frac{0\, e^0}{-s} = 0$

En consecuencia, la integral **(1)** se reduce a:

$$\mathcal{L}\{t\} \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} \frac{1}{s^2}$$

5. c) $\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}}$ para $s > 0$ $\qquad (n = 1, 2, 3, ...)$

Esta regla ya se demostró en el punto anterior para $n = 1$

Supongamos ahora que se verifica para un valor de $n = k$, o sea que

$$\mathcal{L}\{t^k\} = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

Para $n = k+1$ será: $\mathcal{L}\{t^{k+1}\} = \int_0^\infty t^{k+1} e^{-st}\ dt$

Desarrollando esta última integral por partes, es

$$\mathcal{L}\{t^{k+1}\} = \left.\frac{t^{k+1}e^{-st}}{-s}\right|_{\tau=0}^{\infty} + \frac{k+1}{s}\int_0^\infty t^k e^{-st}\ dt$$

Procediendo como en el punto anterior se demuestra que el primer término del segundo miembro es igual a cero, de donde

$$\mathcal{L}\{t^{k+1}\} = \frac{k+1}{s}\{t^k\} = \frac{k+1}{s}\frac{k!}{s^{k+1}} = (k+1)!/s^{k+2}$$

Así, por el principio de inducción completa, queda probada la validez de la fórmula para todo valor natural de n.-

5. d) $\boxed{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}}$ para $s > 0$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st}\ dt \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\ dt = \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right|_0^\infty$$

si $s > a \quad \Rightarrow \quad s-a > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t\to\infty} e^{-(s-a)t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{e^{(s-a)t}} = 0$

en consecuencia, resulta:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \left(\frac{0-e^0}{s-a}\right)\frac{1}{s-a} \quad \text{para } s > a$$

5. e) $\boxed{\mathcal{L}\{\text{sen } at\} = \left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)}$ para $s > a$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{\text{sen } at\} = \int_0^\infty e^{-st} \text{ sen } (at)\ dt$$

aplicamos el método de integración por partes, haciendo:

$$u = e^{-st} \quad \therefore \quad du = -s e^{-st}\ dt$$

$$dv = \text{sen}\, at\ dt \qquad\qquad v = -\frac{\cos at}{a}$$

$$I = \int e^{-st} \text{ sen } (at)\ dt = -e^{-st}\frac{\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\int e^{-st}\cos(at)\ dt \tag{1}$$

Reiterando el método de integración por partes para resolver esta última integral, y sustituyendo en **(1)** resulta:

$$I = e^{-st}\frac{\cos(at)}{a} - \frac{s}{a}\left(e^{-st}\frac{\text{sen } (at)}{a} + \frac{s}{a} I\right)$$

Desarrollando el paréntesis y pasando el último término al primer miembro,

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right) I = e^{-st}\,\frac{\cos(at)}{a}+\frac{s}{a^2}\text{sen }(a\,t)$$

Si $s>0 \;\Rightarrow\; e^{-st}\to 0$ cuando $t\to\infty$ y como $|\cos a\tau|<1$ y $|\text{sen}\,a\tau|<1$, el segundo miembro tiende a cero para $t\to\infty$

Cuando $t=0$ es; $e^{-st}=1$, $\cos at=1$, $\text{sen}\,at=0$, entonces el segundo miembro se reduce a: $-1/a$

De acuerdo con estas consideraciones podemos escribir:

$$\left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-st}\,sen(at)dt=-e^{-st}\left(\frac{\cos at}{a}+\frac{s}{a^2}\,sena\,\tau\right)\Bigg|_o^{\infty}=\frac{1}{a}$$

En consecuencia:

$$\frac{a^2+s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\text{sen }a\,t\}=\frac{1}{a}\quad\therefore\quad\mathcal{L}\{\text{sen }a\,t\}=\frac{a^2}{a^2+s^2}$$

5. f) $\boxed{\mathcal{L}\{\cos\,a\,t\}=\left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right)}$ para $s>a$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{\cos\,a\,t\}=\int_0^{\infty} e^{-st}\cos(a\,t)\,d\tau$$

Aplicando el método de integración por partes se obtiene:

$$\mathcal{L}\{\cos\,a\,t\}=e^{-st}\,\frac{\text{sen}(at)}{a}\Bigg|_0^{\infty}+\frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\text{sen}(at)\,d\tau$$

El primer término del segundo miembro es igual a cero y el segundo es la transformada de la función sen aτ, de donde

$$\mathcal{L}\{\cos\,a\,t\}=\frac{s}{a}\mathcal{L}\{\text{sen}\,at\}=\frac{s}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}=\frac{s}{s^2+a^2}$$

5. g) $\boxed{\mathcal{L}\{\text{Sh }at\}=\left(\dfrac{a}{s^2-a^2}\right)}$ para $s>a$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{\text{Sh }at\}=\mathcal{L}\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$$

Como la transformada de una función, por tratarse de una integral, posee propiedades lineales, podemos escribir:

$$\mathcal{L}\{\text{Sh }(at)\}=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{at}\right)-\mathcal{L}\left(e^{-at}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s-a}\right)$$

y efectuando las operaciones, resulta:

$$\mathcal{L}\{\text{Sh }(at)\}=\frac{1}{2}\frac{(s+a)-(s-a)}{s^2+a^2}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

5. h) $\boxed{\mathcal{L}\{\text{Ch } at\} = \left(\dfrac{a}{s^2 - a^2}\right)}$ para $s > a$

Demostración:

$$\mathcal{L}\{\text{Ch }(at)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{a\tau} + e^{-a\tau}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(e^{a\tau}\right) + \mathcal{L}\left(e^{-a\tau}\right)$$

de donde $\mathcal{L}\{\text{Ch }(at)\} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{s-a} + \dfrac{1}{s+a}\right)$ para $s > a$

y efectuando las operaciones en el segundo miembro resulta:

$$\mathcal{L}\{\text{Ch }(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Sintetizando los resultados obtenidos podemos confeccionar la siguiente tabla de transformadas de funciones elementales:

Nº	$f(t)$	$F(s)$	s
1	L	$1/s$	$s > 0$
2	t	$1/s^2$	$s > 0$
3	t^n	$n!/s^{n+1}$	$s > 0$
4	e^{at}	$1/(s-a)$	$s > a$
5	$\text{sen}\, at$	$a/(s^2 + a^2)$	$s > a$
6	$\cos at$	$s/(s^2 + a^2)$	$s > a$
7	$\text{Sh }at$	$a/(s^2 - a^2)$	$s > \lvert a \rvert$
8	$\text{Ch }at$	$s/(s^2 + a^2)$	$s > \lvert a \rvert$

6. <u>*PROPIEDADES LINEALES DE LA TRANSFORMADA*</u>

Si $f(t)$ y $g(t)$, son dos funciones cuya transformada de Laplace existe, para $s > a$, y "A", "B", son dos constantes, es:

$$\mathcal{L}\{Af(t) + Bg(t)\} = A\mathcal{L}\{f(t)\} + B\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Esta propiedad es consecuencia inmediata de la definición de transformada de Laplace, en razón de las propiedades lineales de las integrales.

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\{t^2 - 5t + 1\} = \mathcal{L}\{t^2\} - 5\mathcal{L}\{t\} + 2\mathcal{L}\{1\} = \frac{2}{s^3} - \frac{5}{s^2} + \frac{2}{s}$$

7. <u>*PROPIEDAD DE TRASLACIÓN (PRIMER TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO)*</u>

Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

Demostración:

$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt$ por definición.

Podemos escribir entonces:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-(s-a)} f(t)\, dt$$

Si la Transformada de Laplace de la función $f(t)$ existe, esta última integral define una transformación de variable simbólica $(s-a)$, por lo tanto la propiedad queda demostrada.

Ejemplos: Hallar **a)** $\mathcal{L}\left\{t^2 e^{3t}\right\}$ **b)** $\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}\text{sen}\,4t$

a) $\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = 2/s^3 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{t^2 e^{3t}\right\} = 2/(s-3)^3$

b) $\mathcal{L}\left\{\text{sen}(4t)\right\} = \dfrac{4}{s^2+16} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\left\{e^{-2t}\,\text{sen}\,4t\right\} = \dfrac{4}{(s+2)^2+16}$

Con el empleo de esta propiedad podemos ampliar la tabla de Transformadas de las funciones elementales de la página anterior en la siguiente forma.

Nº	$f(t)$	$F(s)=\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$	s
9	$e^{at}t^n$	$n!/(s-a)^{n+1}$	$s>\lvert a\rvert$
10	$e^{bt}\cos(at)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	
11	$e^{bt}\,\text{sen}(at)$	$a/(s-b)^2+a^2$	
12	$e^{bt}\text{Ch}(at)$	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	
13	$e^{bt}\text{Sh}(at)$	$\dfrac{a}{(s-b)^2-a^2}$	

8. *TRANSFORMADAS DE LAS DERIVADAS DE UNA FUNCIÓN*

Sea $f(t)$ una función de orden exponencial, cuya transformada de Laplace es $F(s)$ y $f'(t)$ su derivada de primer orden.

a) Demostraremos en primer lugar que:

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = sF(s) - f(0)}$$

Demostración:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

para resolver esta última integral por partes, hacemos:

$u = e^{-st} \; dv = f'(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st}\, dt, \qquad v = f(t)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = \lim_{p\to\infty} e^{-st} f(t)\Big|_0^p + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{p\to\infty} e^{-st} f(t) - e^0 f(0) + sF(s) \quad \textbf{(1)}$$

Si $f(t)$ es una función de orden exponencial α, como hemos supuesto, cuando $t\to\infty$, se puede considerar $\left|f(t)\right| < M\, e^{\infty t}$ y por lo tanto:

$$\left|e^{-sp} f(p)\right| < M\, e^{\infty t} e^{-sp} = M\, e^{-(s-\alpha)} p$$

si $s>0$, el segundo miembro de esta desigualdad tiende a cero cuando p tiende a infinito. En consecuencia, de **(1)** se obtiene:

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = -f(0) + sF(s)$$

b) Si $f(t)$ posee derivada de segundo orden $f''(t)$, demostraremos que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)}$$

En efecto;

Aplicando la fórmula obtenida para la derivada de primer orden es:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = sl\{f'(\tau) - f'(0)\}$$

$$\mathcal{L}\{f''(\tau)\} = s\left[s \cdot F(s) - f(0)\right] - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(\tau)\} = s^2F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

Por el principio de inducción completa se puede generalizar la fórmula de transformación para una derivada enésima.

$$\boxed{\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)}$$

9. MULTIPLICACIÓN POR t^n $\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)}$$

a) Si $n = 1$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

Podemos derivar la función $F(s)$, aplicando la Regla de Leibniz, bajo el signo integral, entonces:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = -\int_0^\infty e^{-st} t\, f(t)\, dt$$

Resulta así:

$$F'(s) = -\mathcal{L}\{t\, f(t)\} \quad \therefore \quad \mathcal{L}\{t\, f(t)\} = -F(s)$$

Generalización:

Supongamos que la regla es válida para $n = k$, o sea:

$$\mathcal{L}\{t^k\, f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^k f(t)\, dt = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

Derivando nuevamente respecto de **s** se obtiene:

$$-\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} f(t)\, dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

de donde resulta:

$$\mathcal{L}\{t^{n+1}\, f(t)\} = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s)$$

con lo que, por el principio de inducción completa, la regla queda demostrada para todo valor natural de n.

Ejemplo: Hallar $\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{sen}(at)\}$

como $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$

$$s\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{sen}(at)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \frac{d}{ds}\left[\frac{-2as}{\left(s^2 + a^2\right)^2}\right] = \frac{-2as^2 - 2a^3 + 8as}{\left(s^2 + a^2\right)^3}$$

10. CAMBIO DE ESCALA

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)} \quad \text{donde } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at)\, dt \,.$$

haciendo $u = at \quad \Rightarrow \quad du = a\ dt \quad \therefore \quad dt = \dfrac{du}{a}$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{su}{a}} f(u)\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a}u} f(u)\, du = \frac{1}{a}F(s/a)$$

Ejemplos

1) $\mathcal{L}\{e^{t}\} = \dfrac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{\frac{s}{a}-1} = \dfrac{1}{s-a}$

11. DIVISIÓN POR t

$$\boxed{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\, du} \quad \text{si } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

12. SEGUNDO TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO

FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD O DE HEAVISIDE:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 1 & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st}\ dt = \int_a^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

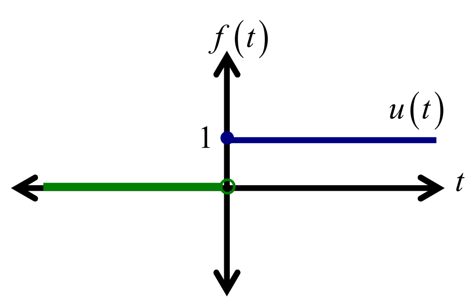

Figura 3

FUNCIÓN ESCALÓN UNIDAD DESPLAZADO:

$$(t-a) = \begin{cases} 0 & si \quad t < a \\ 1 & si \quad t \geq a \end{cases} \qquad a > 0$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^{\infty} u(t-a) e^{-st}\ dt = \int_a^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{e^{-as}}{s} \quad s > a$$

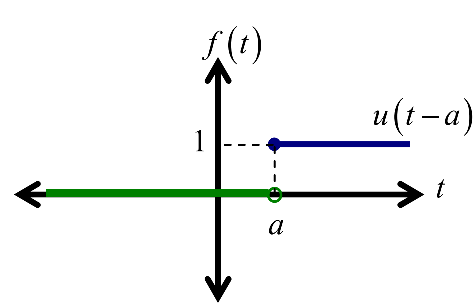

Figura 4

TEOREMA DEL DESPLAZAMIENTO:

$$\boxed{\mathcal{L}\{F(t-a)\cdot u(t-a)\}=e^{-a\cdot s}F(s)}$$

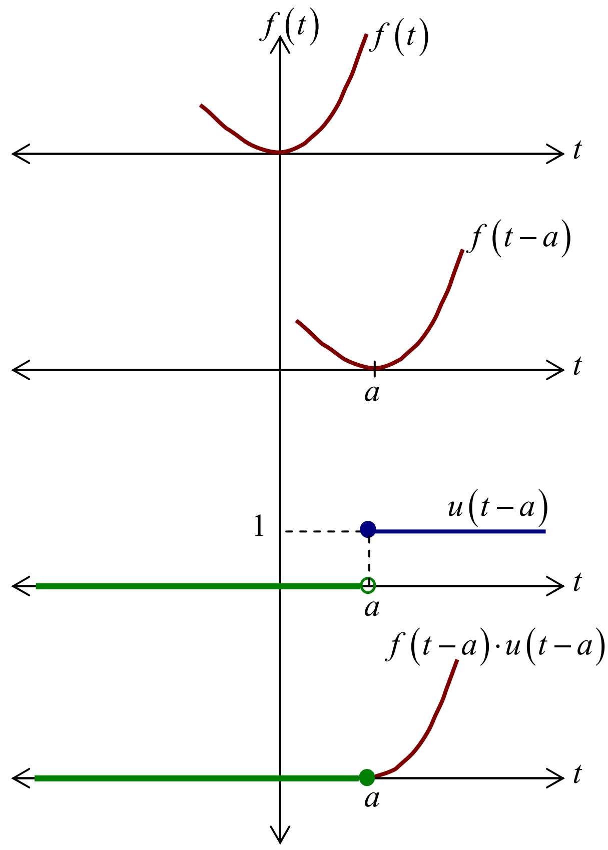

Figura 5

Ejercicios: Hallar las transformadas de Laplace de las siguientes funciones:

1) $f(t)=at+b$

2) $f(t)=at^2+bt+c$

3) $f(t)=8t^3-3$

4) $f(t)=\text{sen}\,3t$

5) $f(t)=\text{sen}^2\,t$

6) $f(t)=e^{at+b}$

7) $f(t)=e^{5t-4}$

8) $f(t)=\text{Ch}^2\,2t$

9) $f(t)=\text{sen}\,t\cdot\cos t$

10) $f(t)=a\ \text{sen}(wt+c)$

11) $f(t)=a\ \cos(wt+c)$

12) $f(t)=\text{sen}\,t\cdot\text{sen}\,2t$

13) $f(t)=\text{sen}\,t\cdot\cos 3t$

14) $f(t)=e^t\ \text{sen}\,t$

15) $f(t)=e^{at}\cos wt$

16) $f(t)=t^3e^{-3t}$

Soluciones:

1) $\mathcal{L}\{at+b\}=a\mathcal{L}\{t\}+b\mathcal{L}\{1\}=a\dfrac{1}{s^2}+b\dfrac{1}{s}=\dfrac{a+bs}{s^2}$

2) $\mathcal{L}\{at^2+bt+c\}=a\mathcal{L}\{t^2\}+b\mathcal{L}\{t\}+c\mathcal{L}\{1\}=a\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{b}{s^2}=\dfrac{c}{s}=\dfrac{2a+bs+cs^2}{s^3}$

3) $\mathcal{L}\{8t^3-3\}=8\dfrac{3!}{s^4}-\dfrac{3}{s}=\dfrac{48-3s^3}{s^4}$

4) $\mathcal{L}\{\text{sen}(3\text{t})\}=\dfrac{3}{s^2+9}$

5) $\mathcal{L}\{\text{sen}^2 t\}=\mathcal{L}\left\{\dfrac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{s}{s^2+4}$

6) $\mathcal{L}\{e^{at+b}\}=\mathcal{L}\{e^be^{at}\}=e^b\mathcal{L}\{e^{at}\}=\dfrac{e^b}{s-a}$

7) $\mathcal{L}\{e^{5t-4}\}=e^{-4}\mathcal{L}\{e^{5t}\}=\dfrac{e^{-4}}{s-5}$

8) $\mathcal{L}\{\text{Ch}^2 2t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(1+\text{Ch}\,4t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2-16}\right)$

9) $\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\cdot\cos(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\text{sen}\,2\text{t}\right\} = \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+4}$

10)
$$\mathcal{L}\{a\,\text{sen}(wt+c)\} = a\mathcal{L}\{\cos(c)\cdot\text{sen}(wt)+\text{sen}(c)\cdot\cos(wt)\} =$$
$$= a\cdot\cos(c)\frac{w}{s^2+w}+a\,\text{sen}\,c\frac{s}{s^2+w^2}$$

11)
$$\mathcal{L}\{a\cos(wt+c)\} = a\mathcal{L}\{\cos(c)\cos(wt)-\text{sen}(c)+\text{sen}(wt)\} =$$
$$= a\,\cos(c)\frac{s}{s^2+w^2}+a\,\text{sen}\,c\frac{w}{s^2+w^2}$$

12) $\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\,\text{sen}(2t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\cos(t)-\cos(3t)\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+9}\right)$

13) $\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\,\cos(3t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(\text{sen}(5t)-\text{sen}(t))\right\}$

Para esta sustitución se ha tenido en cuenta que :

$$\text{sen}(a)-\text{sen}(b) = 2\,\text{sen}\frac{a-b}{2}\,\cos\frac{a+b}{2}$$

si se hace $\frac{a-b}{2}=2t$ y $\frac{a+b}{2}=3t$, se obtiene

$$\text{sen}(2t)\,\cos(3t) = \frac{1}{2}(\text{sen}(5\text{t})\,\text{sen}(\text{t}))$$

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\,\cos(3t)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{s^2+1}\right)$$

14) $\mathcal{L}\{e^t\,\text{sen}(t)\}$

como $\mathcal{L}\{\text{sen}(t)\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^t\,\text{sen}(t)\} = \frac{1}{(s-1)^2+1}$

por la primera ley de traslación.

15) $\mathcal{L}\{e^{at}\cos(wt)\}$

como $\mathcal{L}\{\cos(wt)\} = \frac{s}{s^2+w} \Rightarrow \mathcal{L}\{e^{at}\cos(wt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$

por la primera ley de traslación.

16) $\mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\}$**:**

como $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\} = \frac{3!}{(s+3)^4}$ por la primera ley de traslación.

Aplicando multiplicación por t^3

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{(s+3)}$$

$$\mathcal{L}\{t^3e^{-3t}\} = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}F(s) = -\frac{d^2}{ds^2}\left(-\frac{1}{(s+3)^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(-\frac{2}{(s+3)^2}\right) = \frac{6}{(s+3)^4}$$

13. *TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE*

En la resolución de ecuaciones diferenciales, cuando se aplica la transformación de Laplace, se presenta al final el problema inverso de hallar la función cuya transformada se conoce.

Así, si $\mathcal{L}\{f(t)=F(s)\}$, se dice que la transformada inversa de la función $F(s)$ es $f(t)$. La transformada inversa de una función $F(s)$ se representa simbólicamente por:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)}$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\}=\frac{1}{s-3} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}=e^{3t}$$

14. *TABLA DE TRANSFORMADAS INVERSAS*

De la tabla de transformadas inmediatas deducimos la siguiente correspondiente a las antitransformadas de las funciones elementales:

Nº	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)=f(t)\}$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n \ (n=1,2,\ldots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/(s-a)$	e^{at}
5	$1/(s^2+a^2)$	$\frac{\operatorname{sen}(at)}{a}$
6	$s/(s^2+a^2)$	$\cos at$
7	$1/(s^2+a^2)$	$\frac{\operatorname{Sh}(at)}{a}$
8	$s/(s^2+a^2)$	$\operatorname{Ch}(at)$

15. *PROPIEDADES LINEALES DE LA TRANSFORMADA INVERSA*

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\}=G(s)$ a y b constantes, es

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{(aF(s)+bG(s))\}=af(t)+bg(t)}$$

En efecto, dado que:

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=aF(s)+bG(s)$$

entonces $\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)+bG(s)\}=af(t)+bg(t)$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}-\frac{3}{s^2-16}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}-\frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2-16}\right\}=e^{2t}-\frac{3}{4}\operatorname{Sh}4t$$

16. PRIMERA PROPIEDAD DE TRANSLACIÓN

Si

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)}$$

Esta propiedad es consecuencia de la primera ley de translación de la Transformada de Laplace.

17. CAMBIO DE ESCALA

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)} \text{ si } k=\text{cte. y } \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$$

Demostración:

Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t) \quad \Rightarrow \quad F(s)=\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \quad \therefore \quad F(ks)=\int_0^\infty e^{-ksu}f(u)\,du$

Sabiendo $t=ku \quad \Rightarrow \quad u=t/k \quad \Rightarrow \quad du=dt/k \quad \Rightarrow$

$$F(ks)=\int_0^\infty e^{-st}f(t/k)\frac{dt}{k}=\frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-st}f(t/k)\,du=\frac{1}{k}f(t/k)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\}=\frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right)$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t) \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2+4}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{2}{\sqrt{2}}t=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\sqrt{2}t=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

18. TRANSFORMADA INVERSA DE EXPRESIONES DE LA FORMA $P(s)/Q(s)$

Desarrollaremos a continuación un método para hallar la transformada inversa de una función algebraica de la forma $P(s)/Q(s)$ donde tanto el numerador como el denominador son polinomios enteros en s y además el denominador es de grado mayor que el numerador.

Consideraremos además que el polinomio denominador $Q(s)$ tiene como coeficiente del término de mayor grado a la unidad.

Se pueden presentar tres casos distintos, a saber:

a) cuando el denominador tiene raíces reales simples.

b) cuando el denominador tiene raíces reales múltiples.

c) cuando el denominador tiene raíces imaginarias.

RAÍCES REALES SIMPLES

Primer caso: Supongamos que $Q(s)$ se anula para $S=a$, $s=b$, $S=c$

Hacemos $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{B}{s-b}+\dfrac{C}{s-c}$

reduciendo a común denominador y eliminando los denominadores resulta:

$$P(s)\cong A(s-b)(s-c)+B(s-a)(s-c)+C(s-a)(s-b)$$

Si en la identidad anterior se dan a la variable "s" tres valores numéricos distintos se obtienen tres ecuaciones con tres incógnitas que nos permiten determinar los valores numéricos de los coeficientes A, B, C.

Así, para $s = a$, es:

$$P(a) = A(a-b)(a-c) \quad \Rightarrow \quad A = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}$$

Para $s = b$, es:

$$P(b) = B(b-a)(b-c) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{P(b)}{(b-a)(b-c)}$$

Para $s = c$, es:

$$P(c) = C(c-a)(c-c) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}$$

Obtenidos los coeficientes A, B, C, se procede a aplicar la propiedad lineal de la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-c}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\} = Ae^{at} + Be^{bt} + Ce^{ct}$$

Ejemplo: Hallar

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\}$$

Determinamos las raíces del denominador,

$$s^3+s^2-6s = 0 \quad \Rightarrow \quad s\left(s^2+s-6\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_1 = 0,\ s_2 = 2,\ s_3 = -3$$

Hacemos entonces:

$$\frac{s+1}{s^3+s^2-6s} = \frac{A}{B} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+3} \quad \therefore \quad s+1 = A(s-2)(s+3) + B(s+3) + C(s-2)$$

para $s = 0$ es $1 = A(-2)3 \quad \Rightarrow \quad A = -1/6$

para $s = 2$ es $3 = B \cdot 2 \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad B = 3/10$

para $s = -3$ es $-2 = C(-3)(-5) \quad \Rightarrow \quad C = -2/15$

Resulta entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^3+s^2-6s}\right\} = -\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{3}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{10}e^{2t} - \frac{2}{15}e^{-3t}$$

RAÍCES REALES MÚLTIPLES

Segundo caso: Supongamos que el denominador tiene dos o más raíces distintas, una de las cuales por lo menos, es múltiple. Por ejemplo, supongamos que,

$Q(s) = 0$ para $s_1 = a,\ s_2 = s_3 = s_4 = b$

a) En ese caso hacemos,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-b)^3} + \frac{C}{(s-b)^2} + \frac{D}{(s-b)}$$

Reduciendo a común denominador y eliminando los denominadores, se obtiene:

$$P(s) = a(s-b)^3 + B(s-a) + C(s-a)(s-b) + D(s-a)(s-b)^2$$

Esta identidad permite formar, para cuatro valores distintos de la variable independiente s, un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas A, B, C y D.

Determinados los valores de estos coeficientes se procede a calcular la Transformada inversa por aplicación de la propiedad de linealidad, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-q}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)^3}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)^2}\right\} + D\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)}\right\} =$$

$$= A e^{at} + B e^{bt}\, t^2/2 + Ct\, e^{bt} + D e^{bt}$$

Nota: Aplicamos aquí la primera propiedad de traslación, ya que:

Si $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)^3}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)^2}\right\} + D\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-b)!}\right\}$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(n-1)!}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Por cada raíz múltiple de orden de multiplicidad "n" se obtiene "n-1" ecuaciones con "n-1" incógnitas.

$$\text{"n-1" ecuaciones}\left\{\underbrace{\begin{array}{l} \text{-- -- -- -- -- --} \\ \text{-- -- -- -- -- --} \\ \text{-- -- -- -- -- --} \\ \text{-- -- -- -- -- --} \end{array}}_{\text{"n-1" incógnitas}}\right.$$

Ver ej. Pág.17 $\Rightarrow$

$s=0$	Orden de multiplicidad	$=3 \rightarrow$	3 – 1 = 2 ecuaciones
		+	
$s=1$	" " "	$=2 \rightarrow$	2 – 1 = 1 ecuaciones
			3 ecuaciones con 3 incógnitas $(B;C;E)$

Ej.:

Hallar:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^5-2s^4-s^3}\right\}$$

Factoreando el denominador

$$a^5 - 2s^4 + s^3 = s^3\left(s^2-2s+1\right) = s^3\left(s-1\right)^2$$

se obtiene inmediatamente sus raíces: $s_1 = s_2 = s_3 = 0$, $s_4 = s_5 = 1$

Hacemos:

$$\frac{s+2}{s^5-2s^4+s^3} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{s-1} \qquad \textbf{(1)}$$

Después de reducir a común denominador y suprimir los denominadores se obtiene la siguiente identidad:

$$s+2 = A(s-1)^2 + Bs(s-1)^2 + Cs^2(c-1)^2 + Ds^3 + Es^3(s-1)$$

Para $s=0$ y $s=1$ se obtienen de inmediato los valores de los coeficientes:

$A=2$ $\qquad D=3$

Sustituyendo A y D por los valores obtenidos, podemos formar para tres valores distintos de s, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que nos permitirá calcular B, C y E. Así, para:

$$\left.\begin{array}{llrcrcrcr} s=1 & ; & 2B & + & 4C & + & 8E & = & -22 \\ s=3 & ; & 12B & + & 36C & + & 54E & = & -84 \\ s=-1 & ; & -4B & + & 4C & + & 2E & = & -4 \end{array}\right\}$$ Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas ($B\,;C\,;E$)

o bien;

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} B & + & 2C & + & 4E & = & -11 \\ 2B & + & 6C & + & 9E & = & -14 \\ -2B & + & 2C & + & E & = & -2 \end{array}\right\} \quad \therefore \quad B=5 \quad C=8 \quad E=-8$$

Sustituyendo en **(1)** los valores obtenidos para los coeficientes A, B, C, D, E resolvemos;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^5-2s^4-s^3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}+\frac{5}{s^2}+\frac{8}{s}+\frac{3}{(s-1)^2}-\left(\frac{8}{s-1}\right)\right\}$$
$$=t^2+5t+8+e^t\left(3t-8\right)$$

<u>OTRO MÉTODO PARA HALLAR LOS VALORES DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS:</u>

Si a partir de la expresión **(1)** de esta misma pág., multiplicamos ambos miembros por s^3, se obtiene:

$$\frac{s+2}{(s-1)^2}=A+Bs+Cs^2+\frac{Ds^3}{(s-1)^2}+\frac{Es^3}{s-1} \qquad \textbf{(2)}$$

Para $s=0$ se obtiene en forma inmediata $A=2$

Si se derivan los miembros de la igualdad **(2)**, resulta:

$$\frac{s+5}{(s-1)^3}=B+2Cs+W(s) \qquad \textbf{(3)}$$

En esta última igualdad hemos representado por $W(s)$ la función que resulta de derivar los dos últimos términos de **(2)**. Hacemos notar que esta función $W(s)$ debe contener un factor común s^2, entonces;

para $s=0$ es $B=5$

si se halla la derivada de la igualdad **(3)**, es:

$$\frac{(s-1)^3-3(s-1)^2(s+5)}{(s-1)^4}=2C+W'(s) \qquad \textbf{(4)}$$

Como la función $W(s)$ contiene un factor común s^2, su derivada contiene el factor s. Por lo tanto, para $s=0$, la igualdad **(4)** da:

$16=2C \quad \therefore \quad C=8$

Para determinar ahora los valores de los coeficientes D y F se multiplica la igualdad **(1)** por $(s-1)^2$ resultando:

$$\frac{s+2}{s^3}=D+E(s-1)+h(s)(s-1)^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Para abreviar el procedimiento se han representado los tres primeros términos del segundo miembro de la igualdad **(1)** por la función $h(s)$. Si hacemos $s=1$, de la igualdad **(5)** se obtiene en forma inmediata:

$D=3$

Derivando la igualdad **(5)**, es :

$$\frac{s^3-3s^2(s+2)}{s^6}=E+(s-1)\left(h'(s)(s-1)+2h(s)\right)$$

que para $s=1$, da: $E=-8$

Raíces imaginarias conjugadas simples

<u>Tercer</u> <u>caso</u>: El denominador $Q(s)$ posee dos raíces imaginarias conjugadas simples.

Supongamos que $Q(s)=0$ para $s_1=a+bi$, $s_2=a-bi$

Procediendo como en el caso de las raíces reales simples descomponemos el cociente $P(s)/Q(s)$ así:

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A}{s-(a+bi)}+\frac{B}{s-(a-bi)}$$

Los valores de los coeficientes A y B se determinan con los procedimientos vistos anteriormente para el caso de raíces reales, entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(a+ib)}\right\}+B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(a+ib)}\right\}=$$

$$=Ae^{(a+bi)t}+Be^{(a-bi)t}$$

Podemos transformar esta última expresión así:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=e^{at}\left(Ae^{ibt}+Be^{-ibt}\right)=$$

$$=e^{at}\left(A(\cos bt+i\text{ sen }bt)+B(\cos bt-i\text{ sen }bt)\right)=$$

$$=e^{at}\left((A+B)\cos bt+(A-B)i\text{ sen }bt\right)$$

Ej.: Hallar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-2}{s^2+9}\right\}$

$s^2+9=0$ para $s_1=3i$ $\quad s_2=-3i$

Hacemos $\frac{6s-2}{s^2+9}=\frac{A}{s-3i}+\frac{B}{s+3i}$ **(1)**

Si suponemos calculados los valores de los coeficientes A y B, pasamos a calcular la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-2}{s^2+9}\right\}=Ae^{i3t}+Be^{-i3t}=$$

$$=A(\cos 3t+i\text{ sen }3t)+B(\cos 3t-i\text{ sen }3t)= \quad \textbf{(2)}$$

$$=(A+B)\cos 3t+i(A-B)\text{ sen }3t$$

Calculamos ahora los valores de A y B. Multiplicamos la igualdad **(1)** por $(s-3i)$, y simplificamos:

$$\frac{6s-2}{s+3i}=A+B\frac{s-3i}{s+3i}$$

que para $s=3i$

da: $A=3+\frac{1}{3}i$

Multiplicando la igualdad **(1)** por $(s+3i)$ y simplificando, es:

$$\frac{6s-2}{s-3i} = A\frac{s+3i}{s-3i} + B$$, expresión esta última

que para: $s=-3i$

da: $B = 3 - \frac{1}{3}i$

En consecuencia, es $A+B=6$ y $(A-B)i = \frac{2}{3}i^2 = -\frac{2}{3}$

Sustituyendo estos valores en **(2)** resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-2}{s^2+9}\right\} = 6\cos 3t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t$$

19. CONVOLUCIÓN

Se llama convolución de las funciones $f(t)$ y $g(t)$, y se representa simbólicamente por f^*g, a la función definida por la siguiente integral:

$$f^*g = \int_0^t F(t-u)\,g(u)\,du$$

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCIÓN:

a) Demostraremos primero que si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f*g$$

En efecto,

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \int_0^\infty e^{-st}(f*g)\,dt$$ por definición de transformada

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \int_{t=0}^\infty e^{-st}\int_{u=0}^t f(t-u)\,g(u)\,du\,dt =$$
$$= \int_{t=0}^\infty e^{-st}\int_{u=0}^t e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du\,dt$$

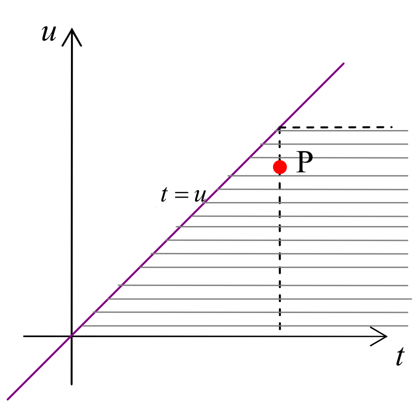

Figura 6

La región del plano t, u expresada por $0 \le u \le t$, se puede representar también por el par de inecuacines siguientes:

$0 \le u < \infty$; $u \le t < \infty$

de modo que la transformada de la convolución de f y g puede adoptar la siguiente forma:

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \int_{u=0}^\infty \int_{t=0}^t e^{-st} f(t-u)\,g(u)\,du\,dt =$$
$$= \int_{u=0}^\infty g(u)\int_{t=u}^\infty e^{-st} f(t-u)\,dt\,du$$

Para resolver primero la integral interior, respecto de la variable t, consideramos u como si se tratara de una constante y haciendo

$t-u=z \Rightarrow t=u+z$; $dt=dz$

si $t \to u \Rightarrow z \to 0$; si $t \to \infty \Rightarrow z \to \infty$

Sustituyendo en la integral anterior resulta:

$$\mathcal{L}\{f*g\}=\int_{u=0}^{\infty} g(u)\int_{z=0}^{\infty} e^{-s(u+z)} f(z)\bullet\, dz\; du =$$

$$=\int_{u=0}^{\infty} e^{-su} g(u)\, du \bullet \int_{z=0}^{\infty} e^{-sz} f(z)\, dz = G(s)\bullet F(s)$$

Hemos demostrado que:

$$\mathcal{L}\{f*g\}=F(s)\bullet G(s)\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\bullet G(s)\}=f*g$$

b) La convolución es una operación conmutativa.

En efecto:

$$f*g=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\bullet G(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\bullet F(s)\}=g*f$$

Aplicaciones:

Hallar la transformada inversa de $\dfrac{1}{s(s^2+1)}$

Sabemos que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}=1$ y $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\}=\operatorname{sen} t$

Entonces $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=1*\operatorname{sen} t=\int_0^t 1\operatorname{sen} u\; du=$$

$$=-\cos u\Big|_u^t = 1-\cos t$$

c) Hallar la transformada inversa de $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

Sabemos que las transformadas inversas de estos factores son las funciones t y $\operatorname{sen} t$, entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}=t*\operatorname{sen} t=\int_0^t (t-u)\operatorname{sen} u\; du=$$

$$=-(t-u)\cos u\Big|_{u=0}^{t}=t-\operatorname{sen} t$$

20. *Aplicación de la Transformada de Laplace para la Resolución de Ecuaciones Diferenciales con Condiciones iniciales*

a) Sea la ecuación diferencial

$y''-4y'+3y=0$ con las condiciones $y(0)=3$; $y(0)=7$

Aplicando la transformada a los dos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\mathcal{L}\{y''-4'+3y\}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

pero; $$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y''\}-s\,y\{0\}-y'(0)=s^2\,\mathcal{L}\{y\}-3s-7$$
$$\mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-y(0)=s\mathcal{L}\{y\}-3\Rightarrow 4\mathcal{L}\{y'\}=4s\mathcal{L}\{y\}-12$$

Aplicando la propiedad lineal de la transformada inversa y sustituyendo estos resultados en **(1)**,

$$s^2\mathcal{L}\{y\}-3s-7-4s\mathcal{L}\{y\}+12+3\mathcal{L}\{y\}=0$$

Podemos agrupar los términos que contienen $\mathcal{L}\{y\}$ en el primer miembro y los demás en el segundo, así:

$$\left(s^2-4s+3\right)\mathcal{L}\{y\}=3s-5 \qquad \therefore \qquad \mathcal{L}\{y\}=\frac{3s-5}{s^2-4s+3}$$

Obtenida la transformada de la función y, debemos hallar la transformada inversa, para ello hacemos,

$s^2-4s+3=0 \Rightarrow \qquad s_1=1 \quad s_2=3$

$$\frac{3s-5}{s^2-4s+3}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-3} \qquad \therefore \qquad 3s-5\equiv A(s-3)+B(s-1)$$

para $s=1$ $\qquad -2=A(-2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=1}$

para $s=3$ $\qquad 4=B(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=2}$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-5}{s^2-4s+3}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}+\frac{2}{s-3}\right\}=e^t+2e^{3t}$$

b) Resolver $y''-4y'+3y=e^{2t}$ siendo $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$\mathcal{L}\{y''-4y'+3y\}=\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$s^2\cancel{\mathcal{L}\{y\}}-\cancel{s\,y}(0)-y(0)-4\cancel{s\mathcal{L}}\{y\}+4\,y(0)+3\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s-2} \quad \text{siendo}$$

Como de acuerdo con las condiciones iniciales $y(0)=y'(0)=0$ la transformada de la ecuación se reduce a:

$$\left(s^2-4s+3\right)\mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{s-2} \qquad \therefore \qquad \mathcal{L}\{y\}=\frac{1}{(s-2)\left(s^2-4s+3\right)}$$

el dominador de esta transformada se anula para

$s_1=2$, $s_2=1$, $s_3=3$

Entonces hacemos:

$$\frac{1}{(s-2)\left(s^2-4s+3\right)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 1=A(s-2)(s-3)+B(s-1)(s-3)+C(s-2)(s-1)$$

para $s=1$ $\qquad$ es $1=2A \Rightarrow \quad A=1/2$

para $s=2$ $\qquad$ es $1=-B \Rightarrow \quad B=-1$

para $s=3$ $\qquad$ es $1=2C \Rightarrow \quad C=1/2$

Sustituyendo los valores de estos coeficientes en **(1)**

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s-1}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s-3}\right\}$$

$$y=\frac{1}{2}e^t-e^{2t}-\frac{1}{2}e^{3t}$$

c) Resolver la ecuación:

$y''+y=2\cos t$ para valores iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$\mathcal{L}\{y''+y\}=2\mathcal{L}\{\cos t\}$$

$$s^2\cancel{\mathcal{L}\{y\}}-\cancel{s\,y}(0)-y'(0)+s\mathcal{L}\{y\}=\frac{2s}{s^2+1}$$

considerando las condiciones iniciales, se reduce a

$$\left(s^2+1\right)\mathcal{L}\{y\}=\frac{2s}{s^2+1} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}\{y\}=\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}$$

Raíces imaginarias múltiples

El denominador de esta transformada tiene ríes imaginarias dobles:

$$s_1=s_2=i \qquad s_3=s_4=i$$

Hacemos:

$$\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}=\frac{A}{\left(s+i\right)^2}+\frac{B}{s-i}+\frac{C}{\left(s^2+1\right)^2}+\frac{D}{s-i} \qquad \textbf{(2)}$$

Multiplicando por $\left(s-i\right)^2$, queda:

$$\frac{2s}{\left(s-i\right)^2}=A+B\left(s-i\right)+w\left(h\right)\left(s-i\right)^2$$

(Hemos representado por $w\left(s\right)$ a los dos últimos términos de **(1)**)

De **(2)** para $s=i$ se obtiene $A=-\frac{1}{2}i$

Derivando **(2)** resulta:

$$\frac{-2s+2i}{\left(s+i\right)^3}=B+\left(s-i\right)\left(w'\left(s\right)\left(s+i\right)+2w\left(s\right)\right)$$

Para $s=i$ la última expresión es $B=0$

Multiplicando ahora la igualdad **(1)** por $\left(s+i\right)^2$,

$$\frac{2s}{\left(s-i\right)^2}=C+D\left(s+i\right)+h\left(s\right)\left(s+i\right)^2$$

para $s=-i$ da: $C=\frac{1}{2}i$

Derivando la última identidad, se obtiene:

$$\frac{-2s-2i}{\left(s-i\right)^3}=D+h'\left(s\right)\left(s+i\right)^2+2\left(s+i\right)h\left(s\right)$$

para $s=-i$ da: $D=0$

Con estos resultados hacemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-i\right)^2}\right\}+B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-i\right)^2}\right\}=$$

$$=A\ e^{it}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+B\ e^{it}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \qquad \text{(por translación)}$$

$$=A\ e^{it}t+B\ e^{it}t=t$$

Resultada así:

$$y=At\ e^{it}+Bt\ e^{it}=$$

$$=At\left(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t\right)+Bt\left(\cos t+i\,\mathrm{sen}\,t\right)=$$

$$=t\left(A+B\right)\cos t+t\left(A-B\right)i\,\mathrm{sen}\,t$$

para: $A+B=-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}i=0$

y $\left(A-B\right)=1 \qquad \Rightarrow \qquad y=t\,\text{sen}\,t$

21. *Sistemas de Ecuaciones Diferenciales*

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x''+x'-y'=\cos t & si \quad x(0)=1;\ x'(0)=-1;\ x=f(t) \\ x''+x+y''+y=0 & si \quad y(0)=0;\ y'(0)=2;\ \ y=g(t) \end{cases}$$

Por razones de brevedad, podemos hacer $\mathcal{L}\{x\}=F$, $\mathcal{L}\{y\}=G$

Transformando el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{cases} s^2F-sx(0)-x'(0)-sG'+y(0)=s/\left(s^2+1\right) \\ s^2F-sx(0)-x'(0)+F+s^2G-sy(0)-y'(0)+G=0 \end{cases}$$

Si se tienen en cuenta las condiciones iniciales del sistema anterior se reduce a:

$$\begin{cases} s^2F-s+1+sF-1-sG=s/\left(s^2+1\right) \\ s^2F-s+1+F+s^2G-2+G=0 \end{cases}$$

de donde:

$$\begin{cases} \left(s^2+s\right)F-sG=\dfrac{s}{s^2+1}+1 & (1) \\ \left(s^2+1\right)F+\left(s^2+1\right)G=s+1 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación **(1)** por $\left(s^2+1\right)$ y la **(2)** por s y sumando,

$$\left[\left(s^2+1\right)\left(s^2+s\right)+s\left(s^2+1\right)\right]F=s+s\left(s^2+1\right)+s\left(s+1\right)\left(s^2+1\right)\left(s^2+2s\right)F=$$
$$=s\left(s^2+1\right)+\left(s^2+2s\right)$$

y para $s>0$

$$F=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s^2+1} \quad \text{como } x=\mathcal{L}^{-1}\{F\} \qquad \Rightarrow \qquad x=e^{2t}+\text{sen}\,t$$

Multiplicando la ecuación **(1)** por $-\left(s^2+1\right)$ y la ecuación **(2)** por $\left(s^2+1\right)$ y la ecuación **(2)** por $\left(s^2+s\right)$, se obtiene:

$$s\left(s^2+1\right)+\left(s^2+1\right)\left(s^2+s\right)G=\left(s+1\right)\left(s^2+s\right)-s-s\left(s^2+1\right)$$

de donde

$$\left(s^2+1\right)\left(s^2+2s\right)G=-s\left(s^2+1\right)+s\left(s^2+2s\right) \qquad \text{y para } s=0$$

$$G=\frac{-s}{s^2+2s}+\frac{s}{s^2+1}=-\frac{1}{s+2}+\frac{s}{s^2+1}$$

Como $y=\mathcal{L}^{-1}\{G\} \qquad \Rightarrow \qquad y=-e^{-2t}+\cos t$