M A T E M Á T I C A S   Y   C U L T U R A

B O L E T Í N

23.01.2002 **No. 197**

D E P A R T A M E N T O   D E   M A T E M Á T I C A S   B Á S I C A S

MATEMÁTICAS *MATEMÁTICAS*

UNA DEMOSTRACIÓN INTERESANTE

Dentro del tema de *Transformada de Laplace*, del programa de estudios de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, se utiliza frecuentemente la expresión:

$$\mathcal{L}\ \{ t^n \} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in N$$

En varias de las obras bibliográficas que pueden emplearse para el estudio de este tema, esta expresión no se demuestra [1]; o para su demostración se requieren conceptos fuera de los objetivos de la asignatura, como por ejemplo la función gamma [2]. En algunos otros casos se presenta la demostración como un ejercicio en el que más que demostrar, se deduce la generalización de la fórmula por recurrencia [3]. Es cierto que la enseñanza de las matemáticas para los ingenieros debe ser diferente que para otros profesionales. La demostración no es uno de los principales objetivos en nuestros cursos. Debe buscarse que las demostraciones que se presenten sean interesantes por el método empleado, o por la conclusión que de ella se desprenda. El abuso en esta práctica puede ocasionar la distracción de los principales objetivos de las asignaturas. Lógicamente, para un estudiante de la licenciatura de matemáticas la situación es totalmente diferente. Cada etapa en la construcción de las estructuras matemáticas debe estar debidamente fundamentada y demostrada.
Desgraciadamente se presentan con frecuencia situaciones que resultan frustrantes para algunos de los estudiantes de nuestra Facultad. Por ejemplo, cuando ingresan a sus primeras lecciones de Álgebra, se les recibe con el método de *inducción matemática.* Es común que el estudiante, acostumbrado más a la mecanización que al razonamiento en sus cursos del bachillerato, se encuentre con un obstáculo que en muchas ocasiones parece insalvable. Desesperadamente se trata de encontrar el *camino* que le permita *demostrar* lo que se le presenta en ese curso, sin intentar comprender en su esencia el método y su procedencia. Cuántas veces no se escucha en los pasillos una explicación de un estudiante a otro: "*únicamente sustituye n por uno, después n por k y después n por k+1. Para terminar, súmale a la hipótesis el siguiente término para llegar a la tesis y ya acabaste".* Es evidente que estos estudiantes no tendrán éxito con su procedimiento, sobre todo si la expresión por demostrar ni

siquiera contiene una suma.
Lo peor de todo es que una vez acreditado el curso, difícilmente vuelven a encontrarse con la necesidad de demostrar algo por inducción matemática. O en muy pocas ocasiones un profesor de cursos más avanzados usa dicho método para demostrar. Si acaso, lo mencionará como una posibilidad.
Otra situación similar se presenta con otros conceptos matemáticos o físicos. Por ejemplo, en un curso de geotecnia se hace referencia al método del Carbono-14 que permite conocer la edad geológica de algunas rocas. Este método se basa en la desintegración de un elemento radioactivo presente en los seres vivos. Lo ingenioso de dicho método se comprende mejor si se presenta con la ecuación diferencial en la que se fundamenta y su solución [4]; sin embargo, es raro que algún profesor de esa disciplina presente esa ecuación. Cuando mucho la mencionará y dirá algo como "*resolviendo una ecuación diferencial, se puede llegar a esto"*. Obvio que el estudiante se pregunte "*¿para qué habré aprendido tantas ecuaciones diferenciales?* O bien en lo que aquí se presenta "*¿Para qué me habrán enseñado inducción matemática?"*.
Volviendo a la expresión de la transformada de Laplace, aquí se tiene una demostración por medio de dicho método.
Para empezar, se tiene que comprobar que la expresión es válida para algún valor natural, en este caso para $n=1$

$$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1!}{s^{1+1}}=\frac{1}{s^2}$$

Para esta comprobación se utilizará la definición de la transformada:

$$\mathcal{L}\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}\,t\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,t\,dt$$

Cálculo de la primitiva:

$$I_1=\int e^{-st}\,t\,dt$$

Por partes:

$$u=t\,,\quad dv=e^{-st}\,dt$$

$$du=dt\,,\; v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$I_1=-\frac{t}{s}e^{-st}+\frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt$$

entonces:

$$\mathcal{L}\{t\}=\lim_{b\to\infty}-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^b+\frac{1}{s}\int_0^b e^{-st}\,dt=\lim_{b\to\infty}-\frac{b}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}\;\mathcal{L}\{1\}$$

Pero $\mathcal{L}\{1\}=\frac{1}{s}$ y $\lim_{b\to\infty}\frac{t}{s}e^{-st}=0$ al aplicar la regla de L'Hôpital, si $s>0$

entonces:

$\mathcal{L}\{t\}=\frac{1}{s^2}$, con lo que se comprueba.

Ahora se supone válida la expresión para algún valor de n, por ejemplo k, lo cual es cierto cuando menos para uno:

$\mathcal{L}\{ t^k \} = \frac{k!}{s^{k+1}}$ ... hipótesis de inducción.

Con base en la hipótesis, debe demostrarse la validez de la expresión para su término siguiente:

$\mathcal{L}\{ t^{k+1} \} = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}$ ... tesis o afirmación.

Al aplicar la definición de la transformada en el miembro izquierdo de la tesis:

$$\mathcal{L}\{ t^{k+1} \} = \int_0^\infty e^{-st} t^{k+1} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^{k+1} dt$$

Cálculo de la primitiva:

$I_2 = \int e^{-st} t^{k+1} dt$

De nuevo por partes:

$u = t^{k+1}$, $\quad dv = e^{-st} dt$

$du = (k+1) t^k dt$, $\quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$

por lo que:

$$I_2 = -\frac{t^{k+1} e^{-st}}{s} + \frac{k+1}{s} \int e^{-st} t^k dt$$

al sustituir los extremos de integración y tomar en cuenta la definición de la transformada:

$$\mathcal{L}\{ t^{k+1} \} = -\lim_{b\to\infty} \frac{b^{k+1} e^{-sb}}{s} + \frac{k+1}{s} \mathcal{L}\{t^k\}$$

pero, si se aplica k+1 veces la regla de L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{b^{k+1} e^{-sb}}{s} = 0 \text{ si } s > 0$$

además, tomando en cuenta la hipótesis de inducción:

$$\mathcal{L}\{ t^{k+1} \} = \frac{k+1}{s} \frac{k!}{s^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{s^{k+2}}$$

con lo que se concluye la demostración.

REFERENCIAS:

[1] Ecuaciones Diferenciales. Carmona Jover, Isabel. Cuarta edición, cuarta reimpresión. Addison Wesley Longman. México. 1998.

[2] Ecuaciones Diferenciales. Edwards C. Henry, Penney, David E. Segunda edición. México, D.F. 2001.

[3] Ecuaciones Diferenciales. Rainville, Earl D. Quinta edición Nueva Editorial Interamericana. México, D.F. 1984

[4] Boletín Matemáticas y Cultura. Facultad de Ingeniería, UNAM. Ejemplar 133, de fecha 23 noviembre 1993.

ÉRIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA
PROFESOR DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM.

CULTURA *CULTURA*

El aire es necesario para respirar.
Respirar, imprescindible para vivir.
Más importante que el aire es el amor.
Y aunque el amor te ahoga a veces,
ama, pues vivir sin amor es vivir muerto.

ANÓNIMO

---

http://dcb.fi-c.unam.mx

erik2306@servidor.unam.mx