TÓPICOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

NEUMAN, CARLOS E.

6. Splines

Dada una malla $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, las diferencias entre los nodos se denotan h_i de modo que

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

6.1. Definición de spline de orden 4.

Dada la malla $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, el polinomio a trozos $s(x)$ es un spline de orden 4 si satisface

(1) $s(x)$ es un polinomio de orden 4 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$
(2) $s^{(r)}(x)$ es continua en $[x_0, x_n]$ para $0 \leq r \leq 2$

6.2. Derivadas del spline.

En el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$s_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)$$

$$s_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i)$$

$$s_i'''(x) = 6d_i$$

6.3. Ajuste del spline a un conjunto de valores.

Dado un conjunto de valores f_i, $i = 0, \ldots, n$ correspondientes a los nodos x_i, $i = 0, \ldots, n$, un spline ajustado a estos valores satisface

$$s(x_i) = f_i$$

es decir que se tienen las ecuaciones

$$f_i = s_i(x_i) = a_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

y

$$f_n = s_{n-1}(x_n) = a_{n-1} + b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}h_{n-1}^2 + d_{n-1}h_{n-1}^3$$

es decir que se tienen $n+1$ ecuaciones para los coeficientes de los polinomios.

Date: 23 de Abril de 2003.

Trabajo realizado con el apoyo parcial de la Universidad Nacional del Litoral.

6.4. Continuidad de s y sus derivadas en los nodos internos. Se tienen las siguientes $3(n-1)$ ecuaciones para $i = 1, \ldots, n-1$

$$a_i = a_{i-1} + b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1}^2 + d_{i-1}h_{i-1}^3$$

$$b_i = b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2$$

$$2c_i = 2c_{i-1} + 6d_{i-1}h_{i-1}$$

En consecuencia resultan $3(n-1) + n + 1 = 4n - 2$ ecuaciones para los $4n$ coeficientes de modo que se deben especificar dos ecuaciones adicionales

6.5. Splines naturales. En este caso se especifican como 0 las derivadas segundas del spline en los extremos del intervalo. Resulta así

$$0 = s_0''(x_0) = 2c_0$$

y

$$0 = s_{n-1}''(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1}$$

6.6. Splines completos. En este caso se especifican las derivadas primeras del spline en los extremos del intervalo. Resulta así

$$f_0' = s_0'(x_0) = b_0$$

y

$$f_n' = s_{n-1}'(x_n) = b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2$$

6.7. Splines not-a-knot. En este caso se considera que los nodos x_1 y x_{n-1}, es decir los primeros nodos internos no son nodos activos del polinomio a trozos lo que implica que a ambos lados de ellos se tiene el mismo polinomio, o, lo que es lo mismo, que en ellos se igualan las derivadas terceras. Resulta así

$$6d_1 = 6d_0$$

y

$$6d_{n-1} = 6d_{n-2}$$

6.8. Sistema de ecuaciones para cuatro nodos y spline not-a-knot. En este caso el sistema resulta

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & \\
1 & h_0 & h_0^2 & h_0^3 & -1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & h_1 & h_1^2 & h_1^3 & -1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & h_2 & h_2^2 & h_2^3 \\
 & 1 & 2h_0 & 3h_0^2 & & -1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2h_1 & 3h_1^2 & & -1 & & \\
 & & 2 & 6h_0 & & & -2 & & & & & \\
 & & & & & & 2 & 6h_1 & & & -2 & \\
 & & & 6 & & & & -6 & & & & \\
 & & & & & & & 6 & & & & -6
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ 0 \\ 0 \\ f_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo este sistema no es el que se utiliza para hallar los coeficientes de los splines en forma efectiva

6.9. **Determinación de los coeficientes de los splines.** En las siguientes secciones se construye el sistema de ecuaciones para obtener los splines

6.10. **Splines y sus derivadas.** Llamaremos z_i al valor de la segunda derivada del spline en el nodo x_i. Entonces en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$

$$s_i(x) = \frac{z_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3+\frac{z_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3+\left(\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x-x_i)+\left(\frac{f_i}{h_i}-\frac{z_ih_i}{6}\right)(x_{i+1}-x)$$

$$s_i'(x) = -\frac{z_i}{2h_i}(x_{i+1}-x)^2+\frac{z_{i+1}}{2h_i}(x-x_i)^2+\left(\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)-\left(\frac{f_i}{h_i}-\frac{z_ih_i}{6}\right)$$

$$s_i''(x) = \frac{z_i}{h_i}(x_{i+1}-x)+\frac{z_{i+1}}{h_i}(x-x_i)$$

$$s_i'''(x) = -\frac{z_i}{h_i}+\frac{z_{i+1}}{h_i}$$

Entonces la evaluación de la primera derivada en los nodos resulta

$$s_i'(x_i) = -\frac{1}{3}z_ih_i+\frac{1}{6}z_{i+1}h_i+\frac{f_{i+1}}{h_i}-\frac{f_i}{h_i}$$

y

$$s_{i-1}'(x_i) = \frac{1}{3}z_ih_{i-1}+\frac{1}{6}z_{i-1}h_{i-1}-\frac{f_{i-1}}{h_{i-1}}+\frac{f_i}{h_{i-1}}$$

e igualando las derivadas primeras se obtienen $n-1$ ecuaciones

$$h_{i-1}z_{i-1}+2(h_{i-1}+h_i)z_i+h_iz_{i+1} = \frac{6}{h_i}(f_{i+1}-f_i)-\frac{6}{h_{i-1}}(f_i-f_{i-1})$$

para $i = 1, \ldots, n-1$, en las $n+1$ incógnitas z_i.

6.11. **Splines naturales.** Se agregan las ecuaciones $z_0 = 0$ y $z_n = 0$.

6.12. **Splines completos.** Se agregan las ecuaciones

$$f_0' = s_0'(x_0) = -\frac{1}{3}z_0h_0-\frac{1}{6}z_1h_0+\frac{f_1}{h_0}-\frac{f_0}{h_0}$$

y

$$f_n' = s_{n-1}'(x_n) = \frac{1}{6}h_{n-1}z_{n-1}+\frac{1}{3}h_{n-1}z_n+\frac{f_n}{h_{n-1}}-\frac{f_{n-1}}{h_{n-1}}$$

6.13. **Splines not-a-knot.** Se agregan las ecuaciones

$$-\frac{z_0}{h_0}+\frac{z_1}{h_0} = -\frac{z_1}{h_1}+\frac{z_2}{h_1}$$

y

$$-\frac{z_{n-2}}{h_{n-2}}+\frac{z_{n-1}}{h_{n-2}} = -\frac{z_{n-1}}{h_{n-1}}+\frac{z_n}{h_{n-1}}$$

6.14. **Expresión de los splines.** Los splines se expresan en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, de la siguiente forma

$$s_i(x) = \left(\left(\frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i}(x - x_i) + \frac{z_i}{2} \right)(x - x_i) - \frac{h_i z_{i+1}}{6} - \frac{h_i z_i}{3} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \right)(x - x_i) + f_i$$

es decir

$$s_i(x) = \left(\left(d_i(x - x_i) + c_i \right)(x - x_i) + b_i \right)(x - x_i) + a_i$$

donde los coeficientes resultan

$$d_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{6h_i}$$

$$c_i = \frac{z_i}{2}$$

$$b_i = -\frac{h_i z_{i+1}}{6} - \frac{h_i z_i}{3} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}$$

$$a_i = f_i$$

de este modo es posible pasar de una representación a la otra.

6. 6E: Ejercicios

6.1. **Interpolación y raices de ecuaciones.** Sea $f(x) = \pi/2 - \arccos x$

6.1.1. Hallar los polinomios p_1 y p_2 tales que p_1 interpola a f en $x = -1, 0, 1$, y p_2 que, además, es tal que coincide con f' y f'' en 0

6.1.2. Hallar una aproximación al máximo error de interpolación de f por cada uno de los p_i en $[-1, 1]$

6.1.3. Hallar las respectivas cotas del error dadas por el teorema de error de interpolación y comparar con los resultados de 6.1.2

6.1.4. Hallar el paso h de una tabla de f en $[-1, 1]$ que permita hallar f por interpolación lineal con tres decimales exactos por lo menos.

6.1.5. ¿p_1 y p_2, son únicos?

6.2. **Raices de ecuaciones.**

6.2.1. Ver que $x = 1 + \arctan x$ tiene una solución r. Hallar un intervalo $[a, b]$ que contenga a r tal que $\forall x_0 \in [a, b]$ la iteración $x_{n+1} = 1 + \arctan x_n$ produzca una sucesión $\{x_n\}$ que converja a r. Calcular las primeras iteraciones y estimar la velocidad de convergencia.

6.2.2. Considerar ahora $\tilde{x}_{n+1} = 1 + \varepsilon + \arctan \tilde{x}_n$, dar intervalos de convergencia y estimar la raiz $r(\varepsilon)$ para valores pequeños de ε

6.3. **Splines.**

6.3.1. Determinar todos los valores de $a, \ldots, g$ para los cuales la siguiente función es un spline cúbico

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1)^3 + 3(x-1)^2 - (9/2)(x-1) + 4 & x \in (-\infty, 2] \\ b(x-2)^3 + c(x-2)^2 + d(x-2) + 2 & x \in [2, 3] \\ e(x-3)^3 + f(x-3)^2 + g(x-3) + 3 & x \in [3, \infty] \end{cases}$$

6.3.2. Determinar los valores de los parámetros para que el spline cúbico de 6.3.1 interpole los puntos $(-1, 29)$, $(5, 2)$, $(6, -6)$.

6.4. **Nota.** Derivadas: $(\frac{\pi}{2} - \arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

6.5. **Determinación de polinomio.**

6.5.1. Demostrar que existe un único polinomio de orden 4 para el que

$$p(x_0) = f(x_0), \qquad p(x_2) = f(x_2), \qquad p'(x_1) = f'(x_1), \qquad p''(x_1) = f''(x_1)$$

donde $f(x)$ es una función dada y $x_0 \neq x_2$. Deducir una fórmula para $p(x)$

6.5.2. Sean $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Suponiendo que f es $C^\infty[-1, 1]$ mostrar que para $-1 \leq x \leq 1$

$$f(x) - p(x) = \frac{x^4 - 1}{4!} f^{(4)}(\xi_x)$$

para un $\xi_x \in [-1, 1]$

6.6. **Polinomio cuadrático.** Considerar el problema de hallar un polinomio cuadrático $p(x)$ para el cual

$$p(x_0) = f_0, \qquad p'(x_1) = f_1', \qquad p(x_2) = f_2$$

con $x_0 \neq x_2$, y se conocen los datos $\{f_0, f_1', f_2\}$. Suponiendo que los nodos x_0, x_1, y x_2 son reales, ¿qué condiciones debe satisfacer $p(x)$ para existir y ser único?

6.7. **Método de secantes.** Verificar que en el método de secantes el error satisface

$$r - x_{n+1} = -(r - x_{n-1})(r - x_n) \frac{f[x_{n-1}, x_n, r]}{f[x_{n-1}, x_n]}$$

Comparar con la fórmula análoga para el método de Newton y estimar la relación entre los órdenes de convergencia.

6.8. **Tablas de funciones.**

6.8.1. Determinar el paso para una tabla de $f(x) = \arcsin x$ con cuatro decimales en la que se desea realizar interpolación lineal para fijar el quinto decimal.

6.8.2. Determinar el paso para una tabla de $f(x) = \arcsin x$ (y, eventualmente, el número de decimales) en la que se desea realizar interpolación con spline not-a-knot para fijar el quinto decimal.

Ejercicio precedente. p interpola a f en -1, 1 y a f', f'' en 0

$$\begin{aligned}
&G_1 = f - p - \lambda_0(x^4 - 1), \quad G_1(-1) = 0, \quad G_1(0) = 0 \text{ (para } \lambda_0), \quad G_1(1) = 0 \\
&G_1' = f' - p' - \lambda_0 4x^3, \quad G_1'(\xi_1) = 0, \quad G_1'(0) = 0, \quad G_1'(\xi_2) = 0 \\
&G_1'' = f'' - p'' - \lambda_0 12x^2, \quad G_1''(\xi_3) = 0, \quad G_1''(0) = 0, \quad G_1''(\xi_4) = 0 \\
&\ \vdots \\
&G_1^{(\mathrm{iv})} = f^{(\mathrm{iv})} - \lambda_0 24, \quad G_1^{(\mathrm{iv})}(\xi_0) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists \xi_0 \ \text{ s.t. } \ \lambda_0 = \frac{f^{(\mathrm{iv})}(\xi_0)}{24}$$

$$G_2 = G_1 - \tfrac{x^4 - x^2}{t^4 - t^2} G_1(t), \quad G_2(-1) = 0, \quad G_2(t) = 0, \quad G_2(0) = 0, \quad G_2(1) = 0$$

$$G_2' = G_1' - \tfrac{4x^3-2x}{t^4-t^2} G_1(t), \quad G_2'(\xi_5)=0, \quad G_2'(\xi_6)=0, \quad G_2'(0)=0, \quad G_2'(\xi_7)=0$$

$$\vdots$$

$$G_2^{(\mathrm{iv})} = G_1^{(\mathrm{iv})} - \tfrac{24}{t^4-t^2} G_1(t), \quad G_2^{(\mathrm{iv})}(\xi_t) = 0$$

$$\Rightarrow \exists \tilde{\xi}_t \ \text{ s.t. } \ G_1^{(\mathrm{iv})}(\tilde{\xi}_t) = \frac{24}{t^4-t^2} G_1(t)$$

$$f^{(\mathrm{iv})}(\tilde{\xi}_t) - \lambda_0 24 = 24 \tfrac{f(t)-p(t)-\lambda_0(t^4-1)}{t^4-t^2}$$

$$f^{(\mathrm{iv})}(\tilde{\xi}_t) \tfrac{t^4-t^2}{24} - \lambda_0(t^4-t^2) = f(t)-p(t)-\lambda_0(t^4-1)$$

$$\tfrac{f^{(\mathrm{iv})}(\tilde{\xi}_t)}{24}(t^4-t^2) - \tfrac{f^{(\mathrm{iv})}(\xi_0)}{24}(t^2-1) = f(t)-p(t)$$

$$\Rightarrow f(t)-p(t) = \frac{f^{(\mathrm{iv})}(\xi_t)}{24}(t^4-1)$$

Ejemplo. Determinar ξ_t en el caso del $\arcsin x$ (ejercicio anterior)

E-mail address: `naa@fiqus.unl.edu.ar`