UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA

ANALISIS MATEMATICO II

UNIDAD 2

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Hasta el momento nosotros solo hemos considerado dos tipos de funciones:

- Las funciones reales de una variable real, trabajadas el año pasado.

Las que expresamos de la forma:

$y = f(x)$

$f(x): R \to R$

- También en la unidad I este año tratamos funciones vectoriales de una variable real

Las que escribimos:

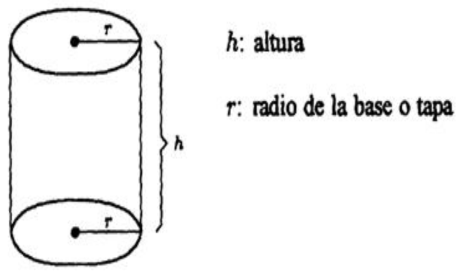
$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

$r(t): A \to B$ Donde A= $\{x/x \in R\}$ y B=$\{(x; y; z)\ /(x; y; z) \in R^3\}$

Sin embargo, constantemente se plantea la necesidad de considerar funciones de más de una variable. Por ejemplo:

- El volumen de un cilindro circular recto: esta dado por:
  $V = \pi r^2 h$

El volumen depende de r y de h. Por eso se puede escribir: V=f(r; h)



Cilindro circular recto

- El alcance de un proyectil lanzado con una cierta velocidad inicial v_0 y un cierto ángulo θ :

R=$\frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$;   R=f (v_0 ;θ)

- La temperatura de un punto P en el espacio, depende de dos coordenadas de la longitud *x,* y la latitud y del punto P.

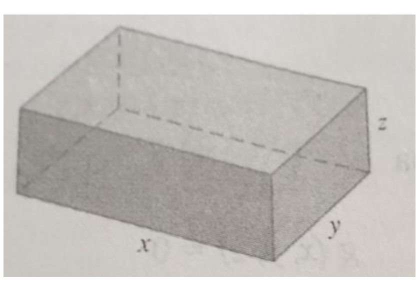
T=f(x, y)

Los ejemplos son muchísimos.

- El volumen de una caja rectangular :

$V = xyz$

V=f(*x, y, z*) es una función de tres variables: x, y, z.



En general, se puede hablar de funciones de varias variables

Funciones de dos variables

Definición

Una función real de dos variables f, es una regla que asigna a cada par ordenado (x; y) de números reales un número real único denotado por f $(x; y)$.

Lo simbolizamos: $z = f(x\,; y)$ $\quad Z: D \rightarrow R$

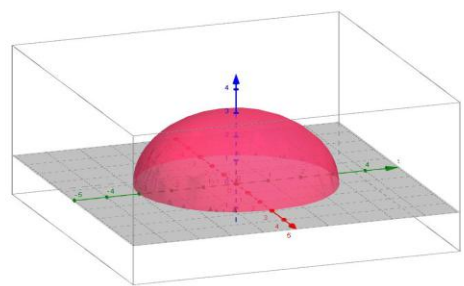
Siendo D un subconjunto del plano, en algunas ocasiones todo el plano.

D= { $(x; y)$ / $(x; y) \in R^2$ }

Para cada par de valores (x, y) tendremos un único valor de z.

Al igual que en las funciones de una variable, a las variables *x, y* las denominaremos **variables independientes** *y* a *z* **variable dependiente**.

Ejemplo 1



$f(x\,; y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Ejemplo 2

Dada la función $f(x; y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Hallar:

a) $f(0; 0)$

b) $f(1; 0)$

c) $f(2; 5)$

Solución

a) $f(0; 0) = \sqrt{1 - 0^2 - 0^2} = 1$

b) $f(1; 0) = \sqrt{1 - 1^2 - 0^2} = 0$

$c) f(2;5) = \sqrt{1-2^2-5^2} = \sqrt{1-4-25} = \sqrt{-28}$ no es un número real, por esta razón es importante saber para qué pares de valores está definida la función.

Dominio y Rango

Definición

El **dominio** D de la función $z = f(x;y)$ es el conjunto de pares de números reales para los cuales está definida la función. El dominio de una función de dos variables es un subconjunto del plano.

El **rango o Imagen** es el conjunto de valores que toma la variable dependiente

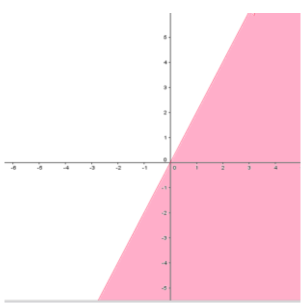
$Imf = \{z \in R/(x;y) \in D\}$

Ejemplos

Encontrar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

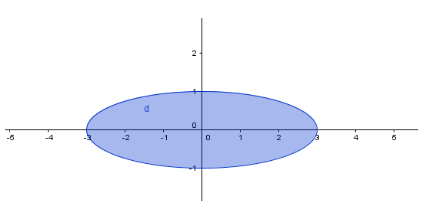
a) Z=$\sqrt{2x-y}$

El dominio está definido por: $2x - y > 0 \rightarrow y < 2x$ 0 sea D= $\{(x;y) \in R^2/y < 2x\}$



b) z=ln $(9 - x^2 - 9y^2)$

$9 - x^2 - 9y^2 > 0$, $x^2 + 9y^2 < 9$ $\therefore$ $\frac{x^2}{9} + y^2 < 1$, entonces D= $\left\{(x;y) \in R^2/\frac{x^2}{9} + y^2 < 1,\right\}$



c) $z = \frac{1}{sen(x-y)}$

$sen(x-y) \neq 0$ para que esto sea posible el argumento (x-y), debe ser tal que $x - y \neq n\pi, n \in Z$

D= $\{(x; y) \in R^2 \ /y \neq x - n\pi \ \}$

Tarea: Representa gráficamente el dominio de esta función

d) $z = arc.\cos(x-y) \therefore \ \ cosz = x - y$

$-1 \leq x - y \leq 1$

D= $\{(x; y) \in /x - 1 \leq y \leq x + 1\}$

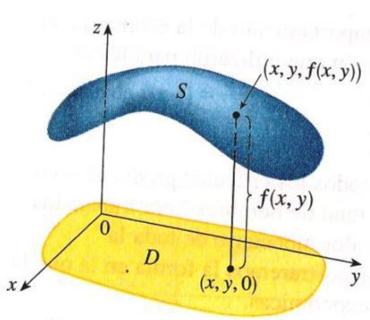
El dominio de esta función es la región del plano comprendida entre las rectas

$y = x - 1 \ \ e \ \ \ y = x + 1$, incluida ambas rectas.

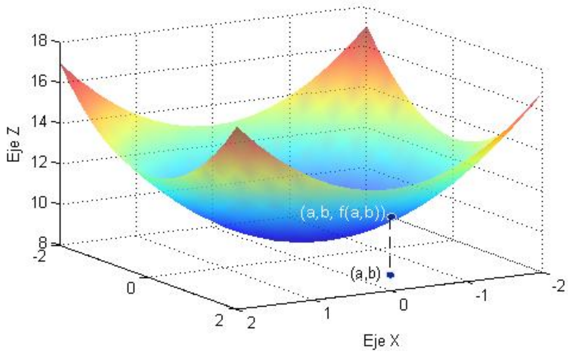
Grafica de una función de dos variables

En el caso de funciones de dos variables z=f(x, y), para cada par de valores (x, y) tendremos un valor z, por lo tanto, la gráfica de estas funciones será una superficie S en R^3(en general, difícil de dibujar a mano.)

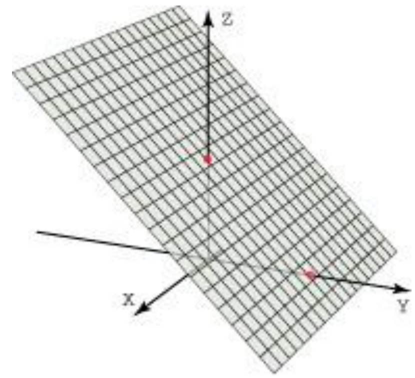
S= $\{(x, y, z) \in R^3/\mathrm{z} = \mathrm{f(x, y)}\}$



Grafica de $f(x;y) = 9 + x^2 + y^2$



Grafica de $f(x;y) = -y + 2$



Representar una función de dos variables, no es una tarea sencilla ya que su gráfica es una superficie en tres dimensiones. Por lo tanto puede recurrirse a un software como lo podemos ver en los ejemplos anteriores. Si se desea realizar un esbozo manual de las mismas pueden usarse conjuntos bidimensionales para obtener información tridimensional a través de los conceptos de trazas y de curvas de nivel.

Trazas de una superficie

Dada una superficie S en R^3 y un plano P cualquiera, la traza de S determinada por P se define como la curva obtenida de la intersección de la superficie S y el plano P.

Podemos redondear este concepto, diciendo que las trazas de una función son curvas en el espacio producidas por la intersección de su gráfica con un plano vertical.

Aunque el plano puede ser cualquiera, se suelen utilizar los planos coordenados.

Las trazas más utilizadas además de las curvas de nivel para el análisis de una superficie son los planos coordenados *x = 0*; *y = 0*; $z = 0$.

Ejemplo 1

Dibujar la grafica de la función:

$f(x; y) = 6 - 3x - 2y$

La grafica de esta función es un plano

Si recurrimos a las intersecciones con los planos coordenados tenemos:

Intersección con el plano x=0

$S \cap \{x/x = 0]$ →Obtenemos la recta z=6-2y , que pasa por los puntos (0;3;0) y (0;0;6)

Intersección con el plano y=0

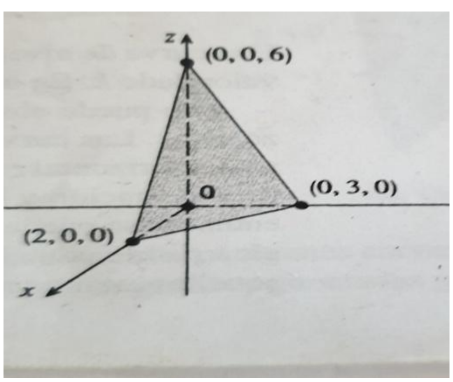
$S \cap \{y/y = 0]$ →Obtenemos la recta z=6-3x ,que pasa por los puntos (2;0;0) y (0;0;6)

Intersección con el plano z=0

$S \cap \{z/z = 0]$ → Obtenemos la recta $3x + 2y = 6$,que pasa por los puntos (2;0;0) y (0;3;0)

Con la información obtenida podemos tener una idea de la gráfica.

El gráfico ilustra la porción de esa gráfica en el primer octante



Ejemplo 2

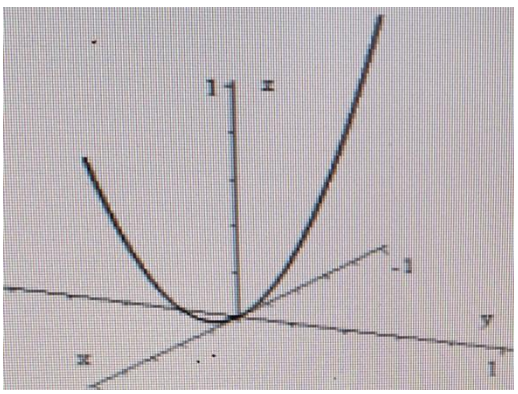
Calcular **las** trazas de la función:

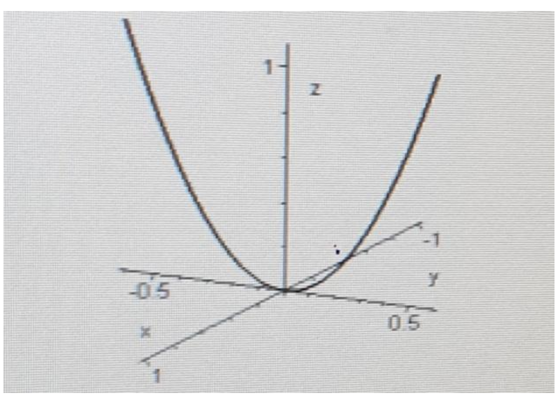
$z = x^2 + 3y^2$

S ∩ $\{x/x = 0]$ →Obtenemos la parábola $z = 3y^2$

S ∩ $\{y/y = 0]$ →Obtenemos la parábola $z = x^2$

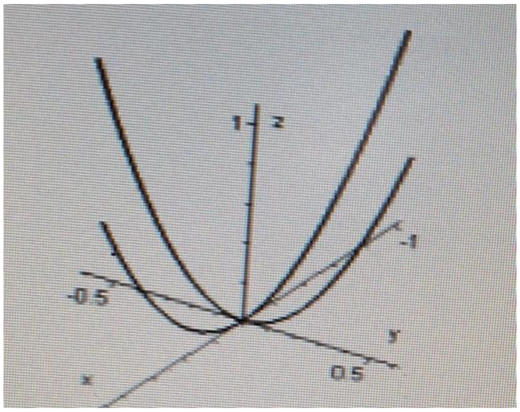
S ∩ $\{z/z = 0]$ → obtenemos el punto (0;0)

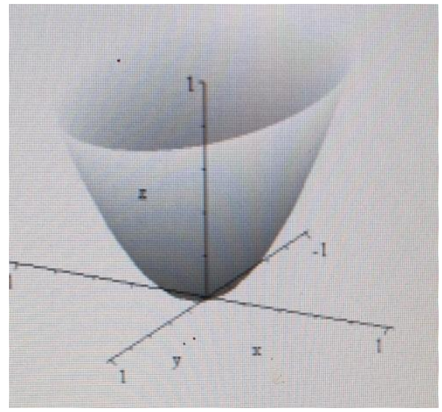




$z = x^2$ $\qquad\qquad$ $z = 3y^2$

Dibujando las dos trazas a la vez se puede obtener una idea bastante aproximada de la gráfica de la función.





La gráfica de la función está formada por los puntos de R^3de la forma (x; y, $x^2 + 3y^2$) estos puntos forman una figura llamada paraboloide elíptico.

Curvas de nivel

Las **curvas de nivel** de una función f(x, y) son los puntos (x, y) del dominio de f, tales que f(x, y)=k, donde k es una constante.

Para calcularlas debemos imaginar cortes a la superficie S con planos paralelo al plano “x y” a distintos niveles de z. Al cortar la superficie, las curvas resultantes son las curvas de nivel para distintos valores de k

Una curva de nivel f(x, y)=k es el lugar geométrico de todos los puntos del plano en los que la función toma un valor constante dado k. Muestra en dónde la grafica de f tiene la altura k.

Las curvas de nivel son las trazas de la grafica de f en el plano horizontal z=k proyectado sobre el plano “xy”.

Si uno dibuja las curvas de nivel de una función y las visualiza como si se elevaran hasta la superficie que indica la altura, entonces se puede conjuntar mentalmente el dibujo completo de la gráfica

Ejemplos de curva de nivel

Es frecuente usar este tipo de representación “plana” de una superficie mediante las curvas de nivel. ¿Dónde podemos encontrar curvas de nivel? Un ejemplo de curvas de nivel las encontramos en los mapas de cartografía donde es frecuente encontrar información correspondiente al relieve de la zona, marcando con curvas, los puntos que se encuentran a la misma altura., o sea con elevación constante arriba del nivel del mar. Si uno camina a lo largo de esas líneas de contorno no se asciende ni se desciende. Otro ejemplo lo encontramos en los mapas de previsión del tiempo. En ellos, se suelen marcar, por ejemplo, aquellas zonas que tienen la misma temperatura (isotermas) o la misma presión atmosférica (isobaras).

Ejemplo 1

Graficar la función:

$z = x^2 + y^2$

Observe que cuando interceptamos la superficie con planos z=k obtenemos circunferencia concéntricas

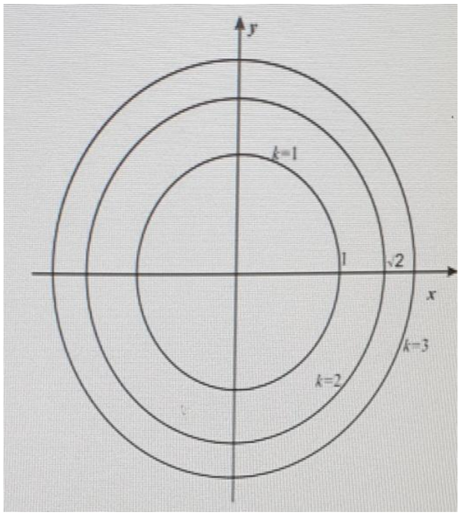
$x^2 + y^2 = k$

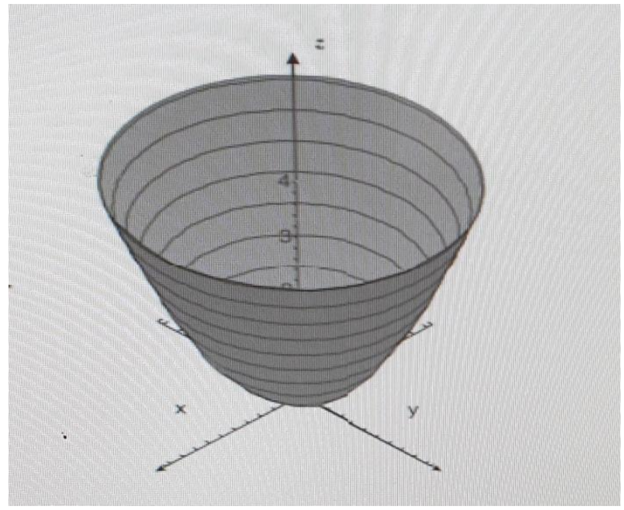
K=1 → $x^2 + y^2 = 1$ circunferencia de radio r=1

K=2 → $x^2 + y^2 = 2$ circunferencia de radio r=$\sqrt{2}$;

K=3 → $x^2 + y^2 = 3$ circunferencia de radio r=$\sqrt{3}$;

A medida que k aumenta las circunferencias tienen mayor radio





Si uno dibuja las curvas de nivel $x^2 + y^2 = k$ y las visualiza como si se elevara hasta la superficie que indica la altura, (k=1 ; k=2; k=3)entonces se puede tener una idea de el dibujo completo de la grafica .

La grafica es un paraboloide de sección circular

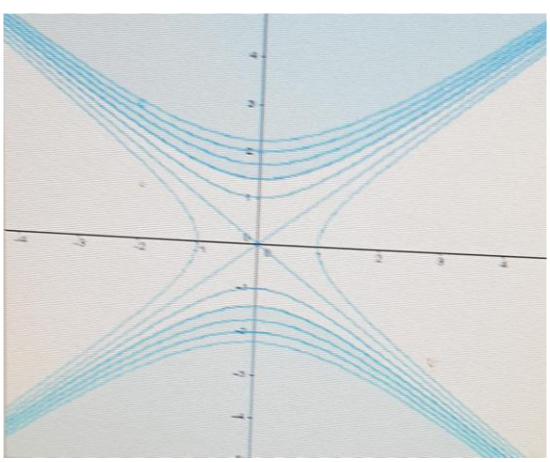
Ejemplo 2

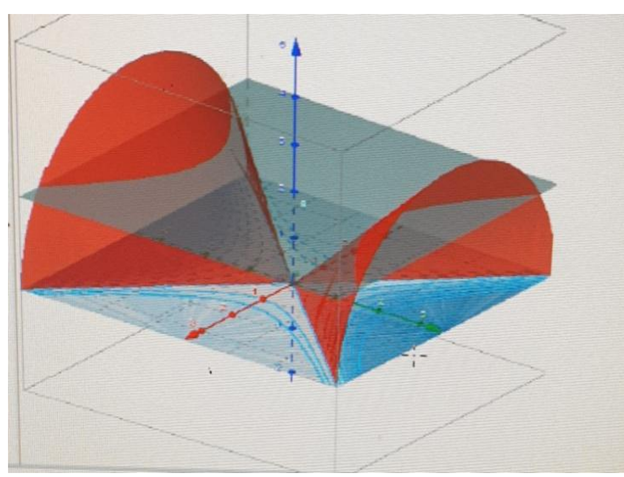
Dibujar algunas curvas de nivel para:

$f(x; y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

$y^2 - x^2 = k^2$

K= 1→ $y^2 - x^2 = 1^2$ K=2 → $y^2 - x^2 = 2^2$ K=3→ $y^2 - x^2 = 3^2$





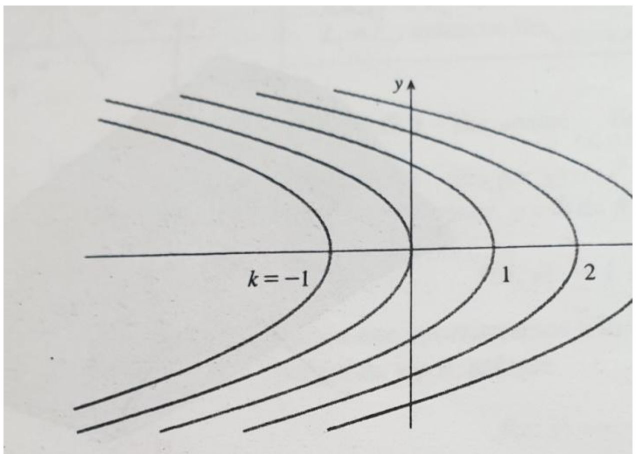
En el caso de la superficie del ejemplo anterior, las curvas de nivel son hipérbolas.

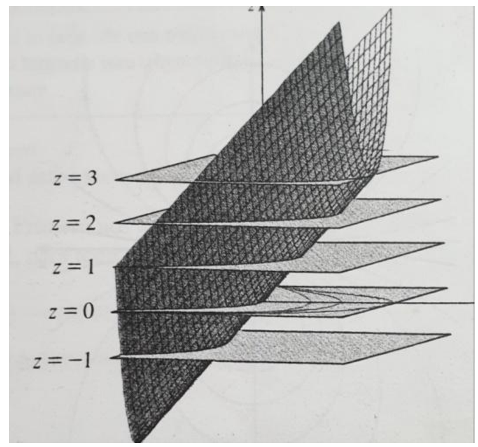
La grafica es

Ejemplo 3

Dibujar las curvas de nivel de $f(x; y) = x + y^2$

K=-1; 0 ; 1; 2; 3

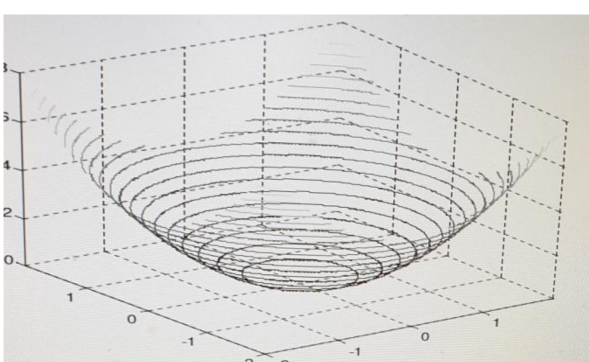


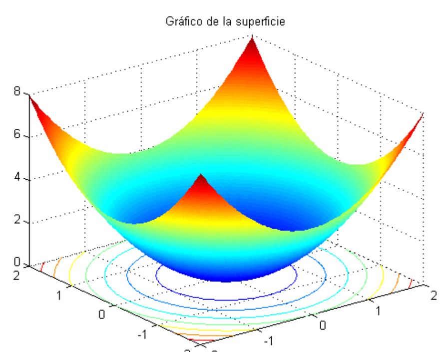


Grafica de $f(x; y) = x + y^2$

Ejemplo 4

$f(x; y) = 9 + x^2 + y^2$





Líneas de contorno Grafica de $f(x;y) = 9 + x^2 + y^2$

Trazado de gráficas.

Utilizando las curvas de nivel y las trazas es posible obtener la información suficiente para dibujar la gráfica de una función de la forma. z = f (x, y). Para ello es importante tener en cuenta que las curvas de nivel corresponden a cortes con planos horizontales y las trazas a cortes con planos verticales.

Funciones de tres variables o más

Una función de tres variables f, es una regla que asigna a cada punto (x; y, z) en un dominio D de R^3, un único número real denotado por $f(x\,;y;z)$

Lo simbolizamos: $u = f(x\,;y;z)$ / $u: D \to R$

D= { $(x;y;z)$ / $(x;y;z) \in R^3$ }

El **dominio D** de la función $u = f(x;y;)$ es el conjunto de ternas de números reales para los cuales está definida la función. El dominio de una función de tres variables es un subconjunto del espacio.

Ejemplo 1

$u = \log\,(4 - x^2 - y^2 - z^2)$

$4 - x^2 - y^2 - z^2$ >0

D= $\{(x;y;z) \in R^3 / \, x^2 + y^2 + z^2 < 4,\}$

El dominio de esta función es el interior de la esfera con centro en el origen y radio 2 sin incluir los puntos de la esfera.

Ejemplo 2

$$u = \frac{1}{\sqrt{2x - 3y + 4z - 6}}$$

$$2x - 3y + 4z - 6 \neq 0$$

D= $\{(x; y; z) \in\ R^3 /\ 2x - 3y + 4z - 6 \neq 0\ \}$

Se trata de la región del espacio determinada por el plano $2x - 3y + 4z = 6$ que queda del otro lado del origen sin incluir los puntos del plano.

Una función de n variables es una regla que asigna a cada n-upla ($x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n$) de números reales un único número real z.

En símbolos:

z=$f(x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n)$ / z: $D \rightarrow R$

$D = \{(\ x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n) \quad /(\ x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n) \in R^n\}$

Definiremos el **dominio** de una función de varias variables $f(x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n)$ como el conjunto de puntos ($x_1; x_2\ ; x_3\ ; \dots \dots . x_n$) para los que la función está definida.

El **rango o Imagen** es el conjunto de valores que toma la variable dependiente

Observación: Para el caso de funciones de más de dos variables no es posible realizar una gráfica de la relación ya que necesitaríamos más de tres dimensiones.

Superficies de nivel

Para el caso de funciones de tres variables, como ya lo comentamos, es imposible hacer su gráfica por lo que siguiendo la idea anterior buscamos obtener información de un conjunto de dimensión cuatro a partir de conjuntos tridimensionales, las superficies de nivel, que son una generalización de las curvas de nivel por lo que podemos dar la siguiente definición:

Definición

Dada la función $u=f(x, y, z)$, sus superficies de nivel se definen como los conjuntos de puntos donde $f(x, y, z)=k$.

En Símbolos

$S= \{(x, y, z)/ f(x, y, z)=k\}$

Observa que los conjuntos definidos son superficies y al igual que para las curvas de nivel, una función de tres variables tiene un número infinito de superficies de nivel por lo que en la práctica sólo se toman algunas que sean representativas.

Así como las curvas de nivel sirven para señalar los puntos con la misma altitud, misma presión, etc., las superficies de nivel también tienen aplicaciones físicas.

Por ejemplo, si $V(x; y; z)$ representa el voltaje (o potencial) de un campo eléctrico en el punto $(x;y;z)$, entonces las superficies de nivel $V(x;y;z)= k$ se dicen superficies equipotenciales y representan a todos los puntos en el espacio con el mismo potencial.

Por otra parte, cualquier gráfica de una función $z=f(x, y)$, es una superficie de nivel, basta considerar $g(x;y;z)=z -f(x, y)$ y entonces la superficie de nivel $g(x ,y, z)=0$ es la gráfica de $z=f(x, y)$. Es por esto que a las gráficas de este tipo de funciones o de las ecuaciones de tres variables se les llama superficies.

Para trazar una superficie de nivel se usan sus trazas con planos de la forma $x=c$, $y=c$, $z=c$.

Las superficies de nivel más importantes son las llamadas superficies cuadráticas y es muy conveniente que las repases en cualquier libro de Geometría Analítica o de Cálculo. Dichas superficies son elipsoides, conos elípticos, paraboloides elípticos, paraboloides hiperbólicos, hiperboloides de uno y dos mantos, cilindros (o sábanas) elípticos, parabólicos e hiperbólicos.

Ejemplo 1:

Hallar las superficies de nivel de la función:

f (x, y, z) = $x^2 + y^2 - z^2$

k=1→ $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Viendo esta expresión se observa que el punto (0; 0;0) no pertenece a la superficie.

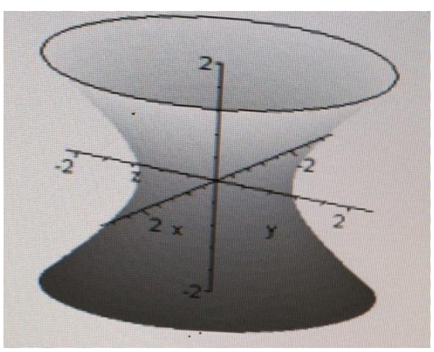
$x^2 + y^2$, esta suma debe ser siempre mayor o igual a 1

También se puede ver que

Las curvas de nivel de valor w son circunferencias $x^2 + y^2$ =1+w^2

Que las trazas son las hipérbolas $x^2 - z^2$= 1 y $y^2 - z^2$ =1

Con todos estos datos se puede concluir que esta superficie de nivel tiene la forma:

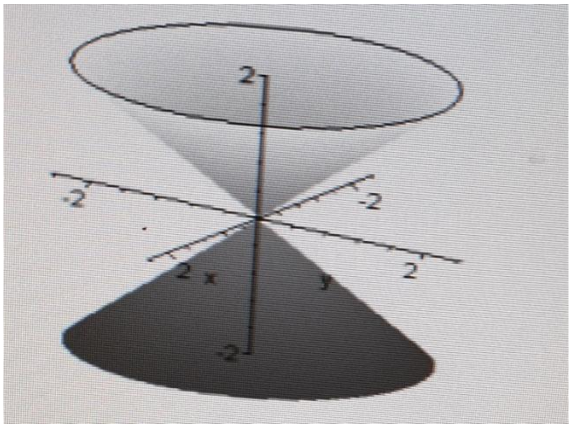


Esta figura recibe el nombre de **hiperboloide de una hoja.**

k=0→ $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$x^2 + y^2 - z^2 \rightarrow x^2 + y^2 = z^2$

Mediante razonamientos análogos a los anteriores se llega a la conclusión de que la superficie de nivel para este valor k= 0 tiene el siguiente aspecto:

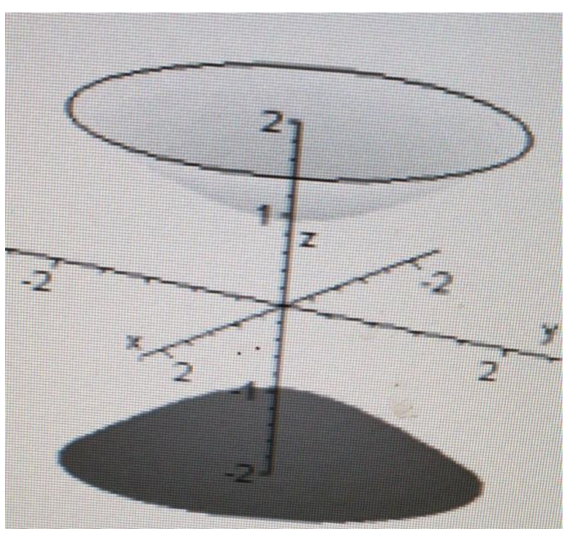


Esta figura recibe el nombre de **superficie cónica**.

k= -1→ $x^2 + y^2 - z^2 = -1$

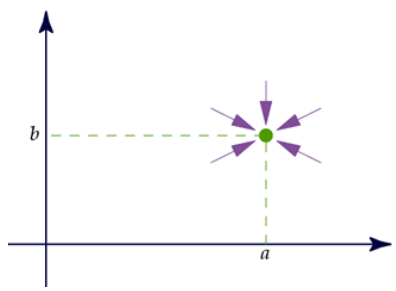
$x^2 + y^2 - z^2 = -1$

Realizando razonamientos similares a los anteriores llegamos a que la grafica tiene la siguiente forma, que recibe el nombre de hiperboloide de dos hojas



Límites y continuidad.

El estudio de los límites de funciones de varias variables es mucho más complejo que el de funciones de una variable pues en este, únicamente se tiene dos caminos para acercarse a un punto, por la derecha o por las izquierda; mientras que en el caso de varias variables existe una infinidad de caminos para acercarnos a un punto de coordenadas (a; b), como muestra la figura.



Disco de radio δy centro P o entorno circular

Definición

Se llama disco abierto o entorno circular abierto de centro P(a; b) y radio δ al conjunto de puntos (x; y) tales que su distancia al centro P son menores que δ.

Simbólicamente

E (P, δ)= { $(x; y) \in \; R^2, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$}

Observación: si en la definición se cambia en < por un $\leq$ obtenemos un disco cerrado.

Limite de una función de dos variables

Definición

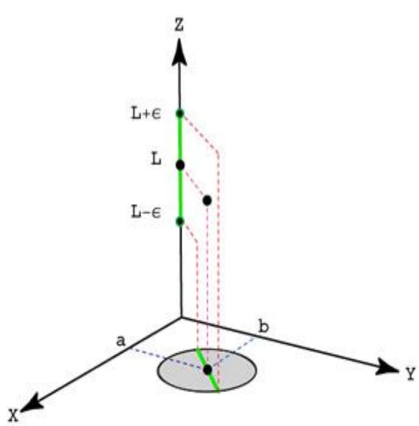
Sea f una función de dos variables definida en un entorno circular con centro en (a; b) excepto quizás en (a; b).Entonces decimos que el límite de f(x; y) cuando (x; y) se aproxima a (a; b) es L y escribimos:

$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L$$

Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un numero $\delta > 0$ tal que $|f(x;y) - L| < \varepsilon$ siempre que (x; y)

Verifique $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$

Observación: gráficamente, esta definición significa que para un punto cualquiera (x; y) que pertenece al entorno E (P, δ) el valor de f(x; y) correspondiente está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se ilustra en la figura.



Cuando escribimos que (x; y)→ $(a;b)$, queremos decir que el punto (x; y) se aproxima al punto $(a;b)$, en cualquier dirección.

Si el valor de $\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)$ no es el mismo, para todos los posibles caminos o trayectorias de acercarnos a $(a;b)$, entonces el límite no existe. Si dos trayectorias distintas que llevan a un mismo punto (a, b) se aproximan a dos valores de límites diferentes para la función f, el límite no existe en ese punto.

En símbolos:

Si $\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L_1$, cuando (x; y)→ $(a;b)$ a lo largo de una trayectoria C_1

Si $\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L_2$, cuando (x; y)→ $(a;b)$ a lo largo de una trayectoria C_2

Si $L_{1\neq}L_2$, entonces $\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y)$ no existe.

El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 1

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

D= R^2- {(0; 0)}

Si evaluamos la función en el punto se produce la indeterminación 0/0

El limite en el punto existiría si cualquiera sea la trayectoria que elijamos para acercarnos al punto (0; 0) la función se aproxima al mismo valor

Consideramos tres trayectorias diferentes de acercamiento al punto (0; 0).

Si y=0, nos acercamos a lo largo del eje x, y cada punto es de la forma (x ;0) entonces tenemos:

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(x;0)} \frac{0}{x^2} = 0$

Si x=0 nos acercamos a lo largo del eje y, cada punto es de la forma (0 ; y) entonces tenemos:

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;y)} \frac{0}{y^2} = 0$

Aunque hemos obtenido los mismos limites esto no prueba que el limite exista en (0; 0)

Ahora vamos a elegir una tercera trayectoria para aproximarnos al punto (0,0) a lo largo de la recta y=x, ahora cada punto es de la forma(x; x).

Si y=x

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x;y)\to(x;x)} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{(x;y)\to(x;x)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Esto quiere decir que en un disco abierto cualquiera centrado en (0; 0) existen puntos en los cuales el limite vale 1/2 y en otros 0 . Luego la función no puede tener límite cuando (x; y) se aproxima a (0;0)

Observación: En el ejemplo 1 pudimos concluir que el límite no existe porque encontramos dos caminos que conducen a límites diferentes. Sin embargo, aunque los dos caminos hubieran llevado al mismo límite, no podemos concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, debemos demostrar que el límite es el mismo para toda posible trayectoria. Esta tarea no es simple y excede a nuestro curso por tal razón no lo vamos a realizar

Ejemplo 2

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^4 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

D= R^2- {(0; 0)}

Si evaluamos la función en el punto se produce la indeterminación 0/0

El limite en el punto existiría si cualquiera sea la trayectoria que elijamos para acercarnos al punto (0; 0) la función se aproxima al mismo valor

Consideramos dos trayectorias diferentes de acercamiento al punto (0; 0).

Si y=0, nos acercamos a lo largo del eje x y cada punto es de la forma (x ; 0) entonces tenemos:

$\lim_{(x;\, y)\to(0;0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{(x;\, y)\to(x;0)} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{(x;\, y)\to(x;0)} x^2 = 0$

Si x=0 nos acercamos a lo largo del eje y, cada punto es de la forma (0; y) entonces tenemos:

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2} = \lim_{(x;y)\to(0;y)} \frac{-4x^2}{2x^2} = \lim_{(x;\,y)\to(0;y)} -2 = -2$

El límite no existe

Ejemplo 3

$\lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$, D= R^2

Por sustitución

$\lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{1+0}{1^2+0^2} = \lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{1}{1} = 1$

El límite existe.

Existen algunas técnicas que a veces resultan útiles en el cálculo de límites, veamos esto aplicado en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4

$\lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{1-1}{1^2-1^2} = \frac{0}{0}$

Para este límite, factorizamos el denominador

$\lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{x-y}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = \lim_{(x;y)\to(1;0)} \frac{1}{(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 5

Para este límite, racionalizamos el denominador

$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1}-1)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)} =$

$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^2-1^2} = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} =$

$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{x^2+y^2+1} + 1 = 2$

Propiedades de los límites

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades con respecto a las sumas, diferencias, productos y cocientes, que las funciones de una sola variable.

$\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = L_1$, $\lim_{(x;y)\to(a;b)} g(x;y) = L_2$

1. $\lim_{(x;y)\to(a;b)} K\, f(x;y) = KL_1$, $\forall K \in R$
2. $\lim_{(x;y)\to(a;b)} [f(x;y) + g(x;y)] = L_1 + L_2$
3. $\lim_{(x;y)\to(a;b)} [f(x;y) - g(x;y)] = L_1 - L_2$
4. $\lim_{(x;y)\to(a;b)} [f(x;y).\, g(x;y)] = L_1.\, L_2$
5. $\lim_{(x;y)\to(a;b)} \left|\frac{f(x;y}{g(x;y)}\right| = \frac{L_1}{L_2}$ siempre $\lim_{(x;y)\to(a;b)} g(x;y) \neq 0$

Continuidad en un punto

Definición

Sea f una función de dos variables definida en un entorno circular con centro en (a; b).

Decimos que f(x; y) es **continua** en (a, b) si:

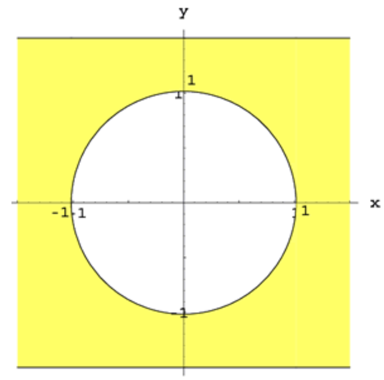
$$\lim_{(x;y)\to(a;b)} f(x;y) = f(a;b)$$

Decimos que la función f es continua en la región D si es continua en cada punto de la región.

El significado intuitivo de continuidad es que si (x; y) cambia en una pequeña cantidad entonces el valor f(x; y) cambia también en una pequeña cantidad. Esto quiere decir que la grafica de una función continua, no tiene ni agujeros, ni ruptura.

Las propiedades de funciones continuas para funciones de una variable son también validas para funciones de varias variables.

Ejemplo 1



¿En qué puntos es continua la función $f(x;y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$?

D=$\{(x;y) \in R^2 / x^2 + y^2 > 1\}$

Esta función va a ser continua en el conjunto anterior

Ejemplo 2

¿En donde es continua?

$$f(x;y) = \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2y^2}$$

La función es discontinua en (0;0), debido a que la función no está definida en el punto. Sin embargo podemos decir que es continua en su dominio o sea en : D= R^2- {(0; 0)}

Ejemplo 3

$$f(x;y) = \begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{x^2+2y^2} & \text{si } (x;y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

La función no es continua en el punto (0; 0) porque el límite de la función no existe en ese punto, recuerda que este ejercicio ya fue analizado anteriormente.