FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA

ANALISIS MATEMATICO II

UNIDAD 2

CAMPOS VECTORIALES

El concepto de función se ha ido generalizando desde que comenzamos el cursado de Análisis Matemático I, hasta aquí nuestro estudio estuvo centrado en el tratamiento de las siguientes funciones:

- **Función Real de variable real.**

Una función real de una variable real es una regla que a cada número real de un cierto conjunto D le hace corresponder de manera única otro número real.

$y = f(x)$ / $f: D \to R$, D es un subconjunto de los números reales

- **Función vectorial de variable real**

Una función vectorial de una variable real es una regla que a cada número real de un cierto conjunto D de números reales, le hace corresponder un vector.

Si *t* es un número real → $r(t) = f(t)i + g(t)j$ $r(t): D \to R^2$

$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$ $r(t): D \to R^3$

- **Función de varias variables reales con valores reales.**

Una función de varias variables reales con valores reales es una regla que a cada punto del dominio le asigna un número real.

$f: R^n \to R$ $(n > 1)$ utilizamos en general *n*=2, *n*=3

$f: D \to R$ / $z = f(x; y)$

z es una función de dos variables independientes, y su representación gráfica es una superficie en el espacio

Si la función es de tres variables independientes, la definimos como:

$f: D \to R$ / / $w = f(x; y; z)$

Estas funciones definen un campo escalar, campo escalar en R^2 o campo escalar en R^3, según estemos en el plano o en el espacio.

Un ejemplo de campo escalar sería la presión atmosférica sobre la tierra, que si la designamos con la letra P, tenemos una función de tres variables P(x, y, z). Para cada punto geográfico (identificado con una longitud, latitud y altitud) existe un valor numérico de la presión expresado en Pascales.

CAMPOS VECTORIALES.

A partir de ahora nos dedicaremos a funciones vectoriales con valores vectoriales, a este tipo de funciones llamamos **campos vectoriales.**

Un campo vectorial, es una función que asocia a cada punto del plano o del espacio un vector.

Un ejemplo de campo vectorial sería la velocidad del viento en cada punto de la tierra. Dicha velocidad se expresa no solo con su valor, sino con la dirección en la que sopla el viento.

Los campos vectoriales son uno de los conceptos fundamentales de la física. Sin ellos es imposible entender el electromagnetismo, la óptica, o ramas más avanzadas de la física como la gravitación o la mecánica cuántica.

Otros ejemplos de campos vectoriales:

1. Campo de velocidades de una rueda que gira alrededor de un eje.
2. Campo de velocidades de un fluido dentro de un tubo.
3. Campos eléctricos.
4. Campos magnéticos.
5. Campos gravitatorios.

Ejemplos

Campos Gravitatorios

Los campos gravitatorios se definen mediante la Ley de gravitación de Newton que establece que la fuerza gravitacional entre dos objetos de masa m_1 y m_2 es: $F = -\frac{m_1 m_2 G}{|r|^2} u$ donde r es la distancia entre los dos objetos y G es la constante gravitacional y ***u*** es el vector unidad en la dirección que va del origen a $(x; y; z)$

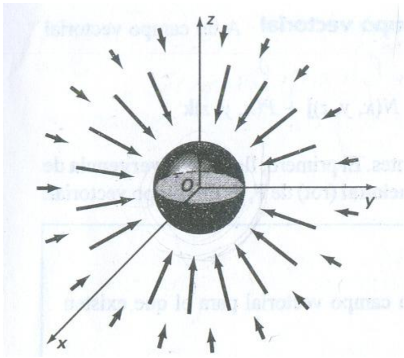
Supongamos que el objeto de masa m_1 está ubicado en el origen de R^3 (por ejemplo podría ser la masa de la tierra y el origen de coordenadas su centro). Para encontrar la fuerza de atracción debemos determinar la dirección y sentido del vector ***F***.

Sabemos que **r** es el vector posición, como la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto de masa m_2 actúa hacia el origen, el vector unitario en esta dirección es: $\vec{u} = \frac{r}{\|r\|}$ si tenemos $r = xi + yj + zk$

Se tiene que el módulo de ***r*** es la distancia del objeto al origen, y $(x; y; z)$ son las coordenadas de dicho objeto tenemos: $\|r\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

El campo gravitatorio tiene la propiedad de que todo vector ***F*** apunta hacia el origen y su magnitud es la misma en todos los puntos equidistantes del origen.

Gráficamente vemos que los vectores equidistantes del origen tienen igual módulo.

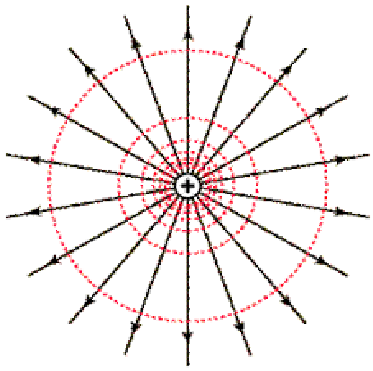


Un campo de vectores con estas dos propiedades se llama campo de fuerza central.

Campos eléctricos.

Los **campos de fuerzas eléctricos** se definen mediante la ley de Coulomb:

$$F = C\frac{q_1 q_2}{|r|^2}u$$



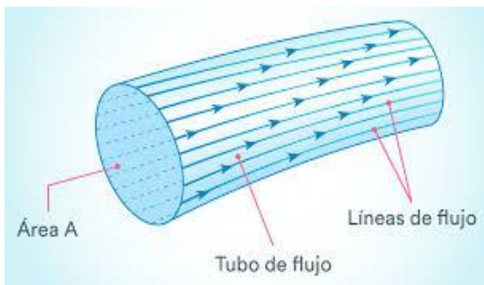
Si observamos vemos que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio

$$F = \frac{k}{|r|^2}u$$

Un campo de fuerzas de esta clase se llama campo cuadrático inverso.

Campo de velocidades

Cuando se pretende describir un fluido es conveniente indicar la velocidad con que pasa un elemento de fluido por un punto del espacio. En el caso de flujo estacionario (no depende del tiempo), se usa un campo vectorial de velocidades $V(x; y; z)$.Entonces V asigna un vector a cada punto $(x; y; z)$ en un cierto dominio. Una línea de flujo de un campo de velocidades marca la trayectoria seguida por una partícula del fluido moviéndose en dicho campo, de forma que los vectores que representan el campo de velocidades son tangentes a las líneas de flujo. La representación por medio de líneas de flujo es usada, por ejemplo, para mostrar el movimiento de un fluido alrededor de un objeto (como el ala de un avión); las corrientes oceánicas también se representan mediante líneas de flujo, así como las térmicas que son columnas de aire ascendente que son utilizadas por las aves para planear, y también para vuelos en aladeltas, parapentes y planeadores sin motor.



Definición:

Sea *D* un subconjunto de R^2, un campo vectorial sobre R^2 es una función que asigna a cada punto *(x, y)* de D un vector de dos dimensiones ***F(x, y).*** Es decir que para cada par ordenado del dominio, tiene asociado un vector bidimensional

Sea *D* un subconjunto de R^3, un campo vectorial sobre R^3 es una función que asigna a cada punto *(x; y; z)* de *D* un vector de tres dimensiones ***F(x, y, z).*** Para cada terna ordenada del dominio, se tiene asociado un vector tridimensional

Campo vectorial

$\mathbf{F}: D \to R^2$ donde $D \subset R^2$ $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\, i + N(x, y) j$

$\mathbf{F}: D \to R^3$ donde $D \subset R^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\, i + N(x, y, z)\, j + P(x, y, z)\, k$

Donde ***F* es la letra asignada al campo vectorial,** las funciones *M* , *N y P* son funciones escalares (campos escalares) de tres variables independientes, o de dos variables independientes para el caso de R^2.

Un campo vectorial ***F,*** es continuo si sus componentes *M*, *N y P* son continuas, de la misma manera, será diferenciable, si lo son sus componentes.

En general podemos escribir $\mathbf{F}: R^n \to R^m$ $\mathbf{F}: D$ con $n > 1$ y $m > 1$

Dominio e imagen.

El dominio de un campo vectorial en el espacio es un subconjunto de R^3 , y el de un campo vectorial en el plano es un subconjunto de R^2 . El dominio natural del campo está dado por la intersección de los dominios de sus funciones componentes. La imagen de un campo vectorial en el espacio consiste en un conjunto de vectores de tres componentes, y la de un campo vectorial en el plano, un conjunto de vectores de 2 componentes.

Ejemplo 1

Describe el dominio del campo vectorial:

$F(x; y) = \ln(xy)\, i + \cos(x + y)\, j$

Dominio de *M(x, y)* $=\ln(xy)$

$xy > 0 \to x \neq 0$ y $y \neq 0$

Por otro lado para que $xy > 0$ debe ser:

$x > 0$ y $y > 0$. En este caso serian todos los puntos del primer cuadrante

O bien $x < 0$ y $y < 0$, serian los puntos del tercer cuadrante

Dominio de *N(x, y)*= $\cos(x + y)\, j$

En este caso el dominio son todos los puntos del plano.Como el dominio del campo está dado por la intersección de los dominios de sus funciones componentes, el dominio son todos los puntos del primer y tercer cuadrante del plano, excepto los ejes coordenados.

Representación gráfica

El conjunto imagen de un campo vectorial, es un conjunto de vectores del plano o del espacio. Para su representación consideramos algunos vectores representativos del campo.

Ejemplo 2:

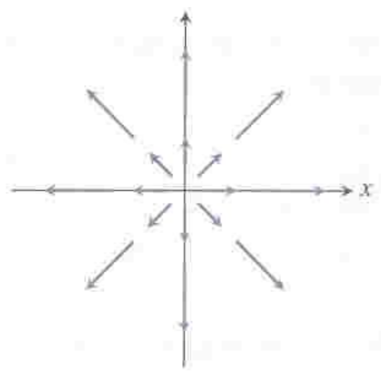
$F(x;y) = xi + yj$

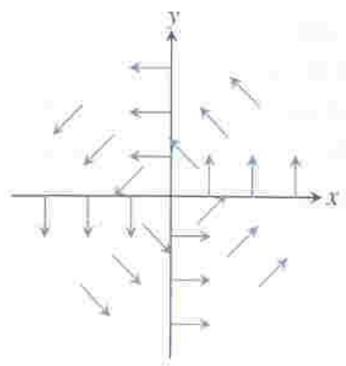
$(x;y)$	$F(x;y)$
$(0;\ 1)$	j
$(1;\ 0)$	i
(0; 2)	$2j$
(1; 1)	$i + j$
(1; 2)	$i + 2j$
(-1;-1)	$-i - j$

Ejemplo 2:

$F(x;y) = \frac{-yi+xj}{(x^2+y^2)^{1/2}}$

$(x;y)$	$F(x;y)$
$(0;\ 1)$	$-i$
$(1;\ 0)$	j
(0; 2)	$-i$
(1; 1)	$(-i + j)/\sqrt{2}$
(1; 2)	$(-2i + j)/\sqrt{5}$
(-1;-1)	$(i - j)/\sqrt{2}$
(-2; 2)	$(-i - j)/\sqrt{2}$





Se ha confeccionado una tabla de valores para cada ejemplo, para graficar algunos vectores de campo. Vemos que el origen de cada vector, es el punto (x, y). La dirección y sentido queda determinada por la función vectorial. En el ejemplo 2, la función no está definida en el origen.

Si comparamos las representaciones de los ejemplos 1 y 2, vemos que en el segundo caso los vectores representativos del campo parecen ser tangentes a una circunferencia con centro en el origen, para confirmarlo podemos hacer el producto escalar de F con el vector posición, que para una circunferencia esta dado por $r(t) = x(t)i + y(t)j$ cuyo módulo es $\|r(t)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$F.r(t) = \left[\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}i + \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}j\right](xi + yj) = \frac{-yx}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Este campo podría representar un campo de velocidades.

En el ejemplo 1, en cambio, los vectores parecen ser normales a una circunferencia con centro en el origen. Para verificarlo, graficamos los vectores que tienen igual módulo:

$\|F\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ los vectores de igual módulo se encuentran sobre una circunferencia con centro en el origen y radio c. Si estas circunferencias, representan curvas de nivel de una función *f(x, y),* los vectores representativos del campo corresponden al vector gradiente de la función en cada punto de la curva c.

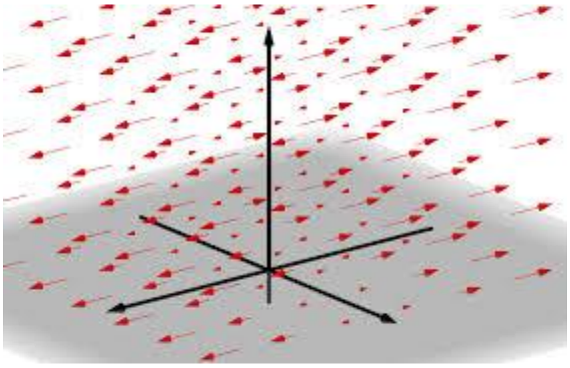
Ejemplo 3:

Describa el campo vectorial, $F(x; y; z) = (x; 0; 0)$.

Observamos que el campo es siempre un múltiplo escalar del versor i.

$F(x; y; z) = (x; 0; 0) = ix$ Entonces, se representa mediante flechas paralelas al eje x, con sentido alejándose del plano yz, de módulo creciente a medida que aumenta x en valor absoluto.

¿Cuándo se anula este campo vectorial? Siempre que la coordenada x del punto sea cero, o sea $F = 0$ para todos los puntos de la forma (0, y, z), esto es, para los puntos del plano yz. La siguiente figura es una representación gráfica de este campo.



Campo Vectorial Gradiente

Recordemos que si $z = f(x; y)$ es una función diferenciable de dos variables el gradiente de *f*, denotado por $\nabla f\ (x, y)$ es el vector $\nabla f\ (x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y)i + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y)j$

Se trata de un campo vectorial en R^2

Si $w = f(x; y; z)$ = es una función diferenciable de tres variables el gradiente de f es un campo vectorial en R^3

$\nabla f\ (x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x; y;\ z)i + \frac{\partial f}{\partial y}(x; y; z)j + \frac{\partial f}{\partial z}(x; y; z)$

Ejemplo 5

Dada la función

$f(x;y) = -x^2 - y^2$

El campo vectorial gradiente asociado a la misma esta dado por

$\nabla f\ (x,y) = -2xi - 2yj$

Ejemplo 6

Dada la función

$f(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Encuentra el campo vectorial gradiente

$\nabla f\ (x,y,z)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}i + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}j + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}k$

El gradiente ∇f en un punto es normal a las superficies de nivel que pasa por ese punto. Recordemos que $\nabla f\ (x,y)$ es un vector en el plano y $\nabla f(x,y,z)$ es un vector en el espacio. El vector gradiente marcará la dirección de máxima variación de la función en cualquier punto.

Si un objeto solido es calentado en un extremo y la temperatura en cada instante está dada por un función escalar T(x; y; z), el flujo de calor se puede representar por un campo vectorial que se llama campo vectorial flujo de calor o energía y esta dado por J=-$K\nabla T$, donde k >0 es una constante llamada conductividad del material. El calor fluye de las regiones más calientes hacia las frías ya que -∇T apunta en la dirección que T decrece.

Rotacional y Divergencia

Vamos ahora a definir dos operaciones que se pueden llevar a cabo sobre campos vectoriales y que desempeñan un papel muy importante en las aplicaciones del campo vectorial. Cada operación recuerda a la derivación, por eso son también llamadas derivadas de un campo vectorial, pero una da como resultado un campo escalar llamado divergencia y la otra produce un campo vectorial llamado rotor

Divergencia de un campo vectorial

Sea $F(x,y,z) = M(x,y,z)\ i + N\ (x,y,z)\ j + P(x,y,z)\ k$ un campo vectorial definido en R^3 para el que existen $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial y}$, y $\frac{\partial P}{\partial z}$

Entonces **Div.F =** $\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$

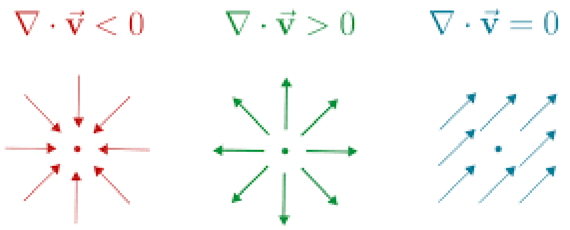
Si el campo vectorial está definido en R^2: $\boldsymbol{Div\ F}$ = $\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$ **campo escalar**

Una forma sencilla para obtener la divergencia, es expresarla como un producto escalar de vectores, para ello tenemos en cuenta el operador nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)$

$\boldsymbol{Div\ F = \nabla . F}$ **Donde:** $\nabla.\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)(Mi + Nj + Pk) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}$

Veamos una interpretación física de la divergencia.

Si F es el campo de velocidades de un fluido, entonces $divF$ mide la tasa de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto P. $Si\ divF > 0$ la tendencia del fluido es a alejarse de P, hay expansión, si $div\ F < 0$ la tendencia es a acumularse en P el fluido se está comprimiendo. Si $divF$=0 decimos que el campo es incompresible. En electromagnetismo se llama solenoidal a un campo de divergencia nula.



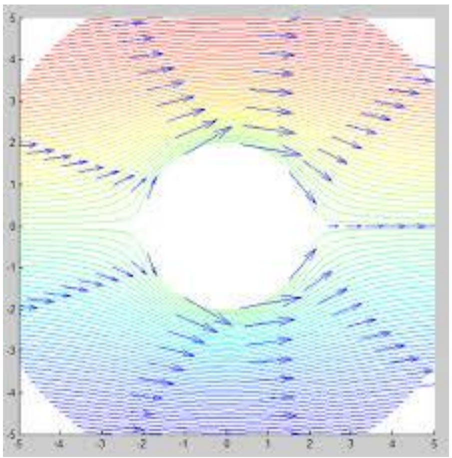


Imagen de campo incompresible

Ejemplo

Calcule la divergencia de $F(x, y, z) = e^x zsenyi + e^x zcosyj + x^2y^2z^2k$

$$Div\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} = e^x zseny - e^x zseny + 2zx^2y^2$$

Rotor de un campo vectorial

Se define en R^3 como:

$$\textbf{rot. F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

Podemos escribir el rotor como un producto vectorial:

rot. F = ∇ x F

Donde $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$

Calcule el rotor del campo vectorial $F(x, y, z) = e^x zsenyi + e^x zcosyj + x^2y^2z^2k$

$$\text{RotF}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x zseny & e^x zcosy & x^2y^2z^2 \end{vmatrix} =$$

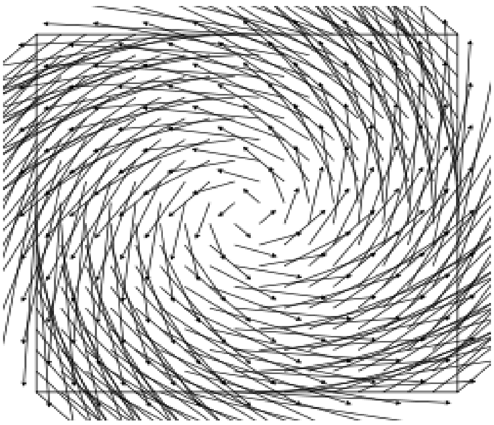
$= (2yx^2z^2 - e^x cosy)i + (e^x seny - 2xy^2z^2)j + (e^x zcosy - e^x zcosy)\text{k}=$

$=(2yx^2z^2 - e^x cosy)i + (e^x seny - 2xy^2z^2)j + 0k$

Veamos una interpretación física del rotor:

Se entiende por rotacional al operador vectorial que muestra la tendencia de un campo a inducir rotación alrededor de un punto.

Si un campo vectorial F representa el flujo de un fluido entonces rot F = 0 significa físicamente que el fluido no tiene rotaciones, o es irrotacional: esto es, no genera remolinos. La justificación de esta idea se verá más adelante, como consecuencia del teorema de Stokes; sin embargo, podemos decir informalmente que si el campo es irrotacional entonces una pequeña rueda con aspas colocada en el fluido se moverá con éste, pero no girará alrededor de su propio eje.



rotor$\neq$ 0

Campo vectorial conservativo

Un campo vectorial **F se llama campo vectorial conservativo** si es el gradiente de alguna función escalar, es decir, si existe una función f tal que $\boldsymbol{F = \nabla f}$**.** En este caso, $\boldsymbol{f}$ recibe el nombre de función potencial de F.

Se puede demostrar que el campo gravitacional es un campo vectorial conservativo.

- <u>**Condición de campo conservativo**</u>

Sea F(x, y) = M(x, y) i + N (x, y) j un campo vectorial, definido en R^2, M y N funciones con derivadas parciales continuas en un disco abierto R, el campo **F es conservativo** $\Leftrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$

Demostración de la condición necesaria:

- **Para R^2:**

Vamos a demostrar que **F es conservativo** $\Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ la igualdad de las derivadas es una condición necesaria.

Partimos de : $F = Mi + Nj$ es conservativo, esto quiere decir que $F = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j$

Por lo tanto $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$

Si derivamos M respecto de y: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Derivamos N respecto de x: $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Como la condición establece la continuidad de las derivadas, tenemos en cuenta el teorema de las derivadas cruzadas, por lo tanto si los segundos miembros son iguales nos queda:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

La condición suficiente $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \Rightarrow$ F es conservativo, se demuestra con el teorema de Green en el plano.

Sea $F = Mi + Nj + Pk$ un campo vectorial con: M, N, P y sus derivadas primeras continuas en una región abierta y simplemente conexa R. Decimos que F es conservativo si y solo si se cumple:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

- **Para R^3:**

Si tenemos en cuenta la condición de campo conservativo, la igualdad de las derivadas equivales a decir que el rotor de F es el vector nulo.

Si F es conservativo $\Rightarrow$ rot F = $\vec{0}$

Partimos de ∇ **x F =** $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$

Si F es conservativo: $Mi + Nj + Pk = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$ si reemplazamos $M, N \ y \ P$ en la expresión del rotor nos queda:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) i + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) k$$

Nuevamente por la igualdad de las derivadas cruzadas tenemos $rotF = \vec{0}$ decimos entonces que los campos conservativos son irrotacionales.
La condición suficiente se demuestra con el teorema de Stokes.

- **Obtención de la función potencial:**

Ejemplo 1:
Dado un campo F(x, y), queremos determinar si es conservativo, si se cumple la condición vamos a calcular la función potencial.

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (4x^3 + 9x^2y^2)i + (6x^3y + 6y^5)j$

Para esta función $M(x, y) = 4x^3 + 9x^2y^2$ y $N(x, y) = 6x^3y + 6y^5$

Vemos si cumple la condición necesaria: $\frac{\partial M}{\partial y} = 18x^2y$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 18x^2y$

Si el campo es conservativo, $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ $N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y^2$ para despejar $f(x, y)$, integramos respecto de x:

$\boxed{1}$ $f(x, y) = \int (4x^3 + +9x^2y^2)\, \mathrm{dx} = x^4 + 3x^3y^2 + \mathrm{H(y)}$ donde H (y) es una función arbitraria de integración

Se debe cumplir también:

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 6y^5$ para despejar $f(x, y)$, integramos respecto de y:

$\boxed{2}$ $f(x, y) = \int (6x^3y + 6y^5)\, \mathrm{d}y = 3x^3y^2 + y^6 + G(x)$ donde G(x) es una función arbitraria de integración

Si comparamos $\boxed{1}$ con $\boxed{2}$ tenemos: $3x^3y^2 + y^6 + \mathrm{G(x)} = x^4 + 3x^3y^2 + H(y)$
Para que se cumpla la igualdad deberá ser $G(x) = x^4$ y $H(y) = y^6$

La función potencial es: $f(x, y) = 3x^3y^2 + y^6 + x^4 + C$ C es la constante arbitraria de integración.

Ejemplo 2:

$F(x, y, z) = \frac{1}{y} i - \frac{x}{y^2} j + (2z - 1)k$

Ahora: $M(x, y, z) = \frac{1}{y}$ $N(x, y, z) = -\frac{x}{y^2}$ y $P(x, y, z) = (2z - 1)$

Verificamos si cumple la condición necesaria en R^3

$$\text{RotorF} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) k$$

El rotor debe F ser nulo, por lo tanto cada componente debe ser cero, para ello se debe cumplir:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = -1/y^2$$

Rotor $F = 0 \therefore$ el campo es conservativo

Si el campo es conservativo $\frac{\partial f}{\partial x} = M$; $\frac{\partial f}{\partial y} = N$ y $\frac{\partial f}{\partial z} = P$

Para hallar la función potencial cada una de estas derivadas respecto de la variable correspondiente:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}$ $\boxed{1}$ Integramos respecto de x: $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + H(y, z)$

siendo $H(y, z)$ una función arbitraria de integración

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{y^2}$ $\boxed{2}$ Integramos respecto de y: $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + G(x, z)$

siendo $G(x, z)$ una función arbitraria de integración

$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 1$ $\boxed{3}$ Integramos respecto de z: $f(x, y, z) = z^2 - z + Q(x, y)$

siendo $Q(x, y)$ una función arbitraria de integración

Si $\boxed{1} = \boxed{2} = \boxed{3}$ $\frac{x}{y} + H(y, z) = \frac{x}{y} + G(x, z) = z^2 - z + Q(x, y)$

Comparando: $Q(x, y) = \frac{x}{y}$ $G(x, z) = H(y, z) = z^2 - z$

La función potencial es: $f(x; y; z) = \frac{x}{y} + z^2 - z + C$

Profesora: Graciela Ribas