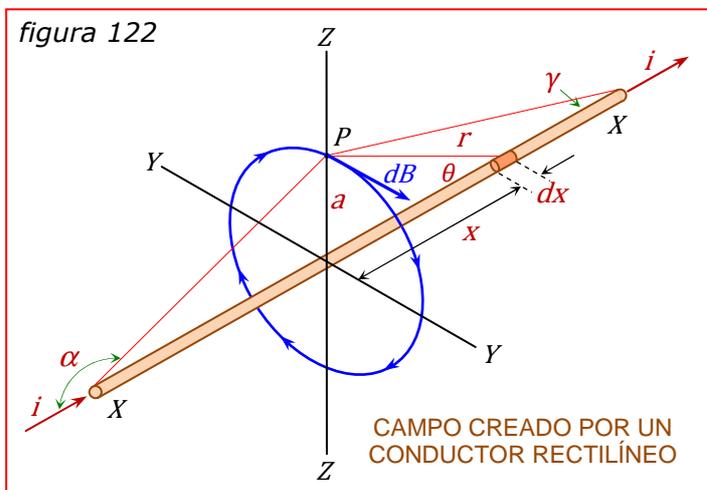


### ◆ Campo Magnético creado por un Conductor Recto:



Para calcular el **campo magnético  $B$**  en un **punto  $P$**  exterior a un **conductor recto** por el cual circula una **corriente  $i$** , nos serviremos de la Ley de Biot y Savart. En la **figura 122**, el eje  $X$  coincide con el conductor y el eje  $Z$  pasa por el punto  $P$ . La **dirección del campo  $dB$**  creado en el **punto  $P$**  por un **elemento de longi-**

**tud  $dx$** , se encuentra en el plano  $YZ$  y es perpendicular al plano  $XZ$ , puesto que tanto  $r$  como  $dx$  se encuentran en este plano. El **campo resultante** en  $P$  es, por lo tanto, la **suma algebraica** de todos los elementos  $dB$  de campo (pues son paralelos) y la **integración** puede realizarse directamente.

Adoptando como **variable independiente** el ángulo  $\theta$  en lugar de  $x$ , el cálculo se simplifica. Examinando la figura, encontramos que se verifica que:

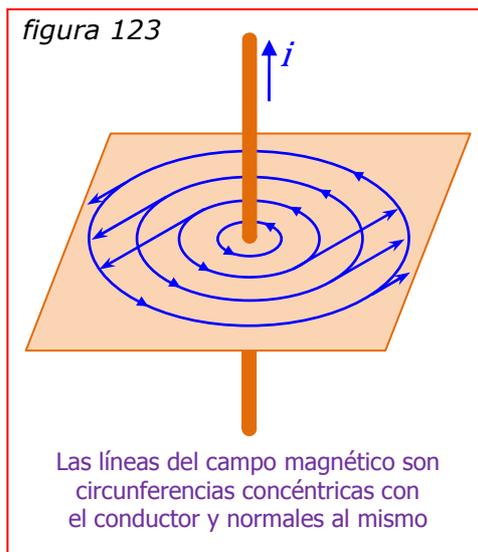
$$\begin{aligned}
 r &= a \operatorname{cosec} \theta \\
 x &= a \operatorname{ctg} \theta \\
 dx &= -a \operatorname{cosec}^2 \theta d\theta
 \end{aligned}$$

Por consiguiente, sustituyendo en la ecuación (149), se tiene:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i dx \operatorname{sen} \theta}{r^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a} \int_{\alpha}^{\gamma} \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a} (\cos \gamma - \cos \alpha)$$

Si el hilo es muy largo comparado con la distancia  $a$  y el punto  $P$  no está demasiado próximo a un extremo, se tiene  $\gamma = 0$  y  $\alpha = \pi$ . Entonces:

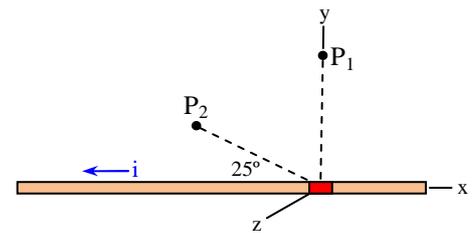
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{a}} \quad (151)$$



A diferencia del campo eléctrico que rodea a un hilo cargado, que es radial, las **líneas de campo magnético** son **circunferencias concéntricas** con el hilo y situadas en **planos perpendiculares** a él (figura 123). Se observa que **cada línea de campo magnético es una línea cerrada**, por lo que en este aspecto difieren también de las líneas de campo eléctrico que terminan sobre cargas positivas o negativas.

**Ejercicio N° 89:** Un hilo de cobre conduce una corriente constante de 155 A. Encontrar el campo magnético generado por un segmento de 5 mm de este hilo en un punto situado a 1,5 m de él, cuando el punto es: a) P<sub>1</sub>, normal al hilo; b) P<sub>2</sub>, ubicado sobre una línea a 25° del hilo (ver figura).

Rigurosamente, las ecuaciones (149) y (150) se deben usar sólo con elementos de corriente infinitesimales. No obstante, en este caso las podemos utilizar porque la longitud del segmento es mucho menor que la distancia al punto de campo.



a) **Vectorialmente con la fórmula (150):**

$$d\vec{l} \times \vec{r} = dl (-\hat{i}) \times r (\hat{j}) = dl r (-\hat{k}) = (5 \times 10^{-3} \text{ m})(1,5 \text{ m})(-\hat{k})$$

$$d\vec{l} \times \vec{r} = 7,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2 (-\hat{k})$$

$$\vec{B} (P_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = (10^{-7} \text{ Tm/A}) \frac{(155 \text{ A}) (7,5 \times 10^{-3} \text{ m}^2) (-\hat{k})}{(1,5 \text{ m})^3}$$

$$\vec{B} (P_1) = 3,44 \times 10^{-8} \text{ T} (-\hat{k})$$

La dirección de **B** es paralela al eje de las z y su sentido es el del semieje negativo.

Con la fórmula (149):

$$B (P_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl \text{ sen } \theta}{r^2} = (10^{-7} \text{ Tm/A}) \frac{(155 \text{ A}) (5 \times 10^{-3} \text{ m}) (\text{sen } 90^\circ)}{(1,5 \text{ m})^2}$$

$$B (P_1) = 3,44 \times 10^{-8} \text{ T}$$

b) *Vectorialmente con la fórmula (150):*

$$\vec{r} = r \hat{r} = r [(\cos 155^\circ)\hat{i} + (\sin 155^\circ)\hat{j}] = r (-0,906 \hat{i} + 0,423 \hat{j})$$

$$d\vec{l} \times \vec{r} = (-dl \hat{i}) \times r (-0,906 \hat{i} + 0,423 \hat{j}) = -dl r (0,423) \hat{k}$$

$$d\vec{l} \times \vec{r} = (5 \times 10^{-3} m)(1,5 m)(0,423)(-\hat{k}) = 3,17 \times 10^{-3} m^2(-\hat{k})$$

$$\vec{B}(P_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = (10^{-7} Tm/A) \frac{(155 A) (3,17 \times 10^{-3} m^2) (-\hat{k})}{(1,5 m)^3}$$

$$\vec{B}(P_2) = 1,46 \times 10^{-8} T (-\hat{k})$$

La dirección de **B** es paralela al eje de las z  
y su sentido es el del semieje negativo.

*Con la fórmula (149):*

$$B(P_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i dl \sin \theta}{r^2} = (10^{-7} Tm/A) \frac{(155 A) (5 \times 10^{-3} m) (\sin 25^\circ)}{(1,5 m)^2}$$

$$B(P_2) = 1,46 \times 10^{-8} T$$

Obsérvese que estas magnitudes de campo magnético son muy pequeñas; en comparación, el campo magnético terrestre es del orden de  $10^{-4} T$ . Tengamos en cuenta que los valores no son los campos totales en los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , sino sólo las contribuciones de un segmento muy corto de conductor.

**Ejercicio N° 90:** Un conductor largo y recto transporta una corriente de 3 A. ¿A qué distancia del eje del conductor es la magnitud del campo magnético generado por la corriente igual a la del campo magnético terrestre en Rosario (alrededor de  $45 \mu T$ )?

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{a} \Rightarrow a = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{B} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} Tm/A)(3 A)}{(2\pi)(45 \times 10^{-6} T)} = 1,33 \times 10^{-2} = 1,33 \text{ cm}$$

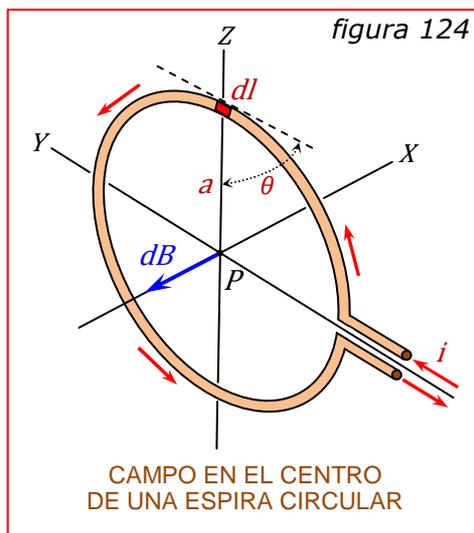
**Ejercicio N° 91:** Se desea generar un campo magnético con una magnitud de  $5,5 \times 10^{-4} T$  a una distancia de 0,04 m de un hilo conductor recto y largo. a) ¿Qué corriente se requiere para generar este campo? b) Con la corriente hallada en el punto anterior, ¿cuál es la magnitud del campo a las distancias de 0,08 m y 0,16 m desde el hilo?

$$a) \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{a} \Rightarrow i = \frac{2\pi a B}{\mu_0} = \frac{2\pi(0,04 m)(5,5 \times 10^{-4} T)}{(4\pi \times 10^{-7} Tm/A)} = 110 A$$

$$b) \quad B(0,08) = \frac{(4\pi \times 10^{-7} Tm/A)(110 A)}{(2\pi)(0,08 m)} = 2,75 \times 10^{-4} T$$

$$B_{(0,16)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A})(110 \text{ A})}{(2\pi)(0,16 \text{ m})} = 1,375 \times 10^{-4} \text{ T}$$

### ◆ Campo Magnético creado por una Espira Circular:



Consideremos la *espira circular* de hilo conductor representada en la *figura 124*, cuyo *radio* es *a* y por la cual circula una *corriente i*. Esta corriente entra y sale de la espira lateralmente mediante dos largos conductores. Las corrientes en estos conductores son de sentidos opuestos y sus efectos magnéticos se anulan mutuamente.

Calcularemos en primer lugar la *densidad de flujo B* en el *centro P* de la espira. Cada *elemento dl* se encuentra en el *plano YZ*, igualmente que

cualquiera de las distancias *a* al punto *P* desde cada uno de los elementos *dl*. Puesto que la dirección de cada *vector dB* en *P* es perpendicular al plano *YZ*, o sea que se encuentra a lo largo del eje *X*, el campo magnético resultante puede encontrarse directamente por integración de los *vectores dB* para cada elemento.

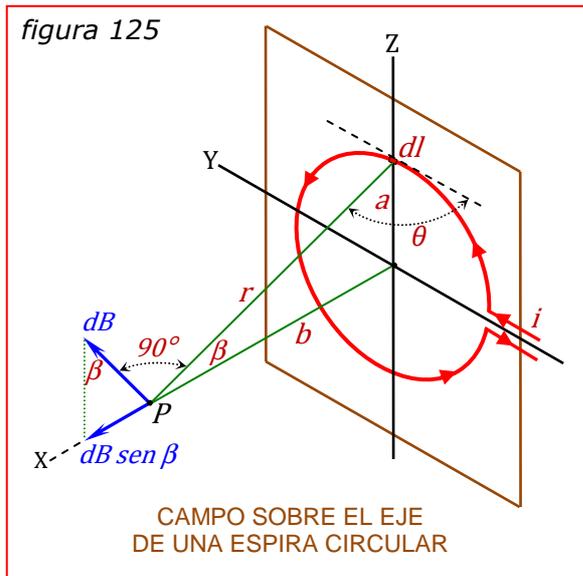
El ángulo  $\theta$  formado por *dl* y *a* es  $90^\circ$  y  $\text{sen } \theta = 1$ . Por consiguiente:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i \, dl \, \text{sen } \theta}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{a^2} \int dl$$

Pero  $\int dl$  es la longitud  $2\pi a$  de la circunferencia de la espira. Por tanto:

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i}{a} \quad (152)$$

Consideremos ahora un *punto P* sobre el eje de la espira distinto de su centro (*figura 125*). La *densidad de flujo dB* en *P*, producida por la corriente que circula por el *elemento dl*, se encuentra en el plano *XZ* y es perpendicular a *r*. Evidentemente, los demás *vectores dB* producidos por los otros elementos no tienen la misma dirección, sino que se encuentran sobre la superficie de un cono cuyo vértice está en *P*.



Por simetría, puede verse que las componentes perpendiculares al eje X se anulan entre sí, de modo que sólo han de sumarse las componentes  $dB \sen \beta$  a lo largo del eje X. El ángulo  $\theta$  formado por cada elemento  $dl$  y su correspondiente  $r$  es  $90^\circ$ . Por lo tanto:

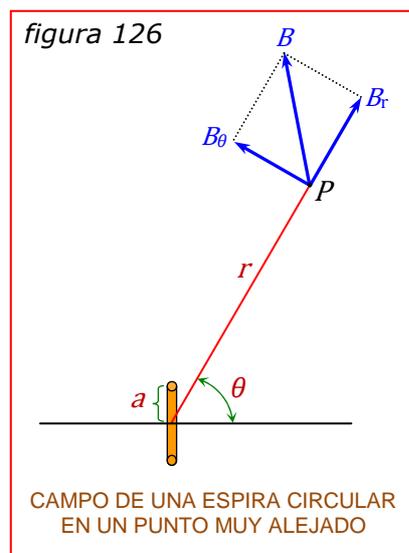
$$B = \int dB \sen \beta = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i dl \sen \theta \sen \beta}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i a \sen \beta}{r^2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{i a^2}{r^3}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{i a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (153)$$

Si  $b = 0$ , la ecuación (153) se reduce a la ecuación (152).

El campo magnético en puntos no situados sobre el eje de la espira puede determinarse por el mismo método, pero los cálculos resultan muy complejos. No obstante, cuando las distancias a la espira son grandes comparadas con su radio, las ecuaciones toman una forma sencilla cuando se utilizan coordenadas polares.



Sea  $B$  la inducción magnética en el punto  $P$  (figura 126) y descomongámosla en una componente  $B_r$  en la dirección de las  $r$  crecientes y otra  $B_\theta$  perpendicular a  $r$  y en el sentido de las  $\theta$  crecientes ( $r$  y  $\theta$  son ahora coordenadas polares y no tienen el mismo significado que en las figuras 124 y 125). Si  $a$  es despreciable frente a  $r$ , aproximadamente se tiene:

$$B_r = \frac{\mu_0}{2} i a^2 \frac{\cos \theta}{r^3} \quad ; \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4} i a^2 \frac{\sen \theta}{r^3}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\pi$ , estas ecuaciones quedan en la forma siguiente:

$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} i \pi a^2 \frac{\cos \theta}{r^3} \quad ; \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \pi a^2 \frac{\sen \theta}{r^3}$$

Pero el producto  $\pi a^2$  es el área  $A$  de la espira y el factor  $i \pi a^2$  es el momento magnético  $\mu = iA$  de dicha espira. Por lo tanto, las componentes de la densidad de flujo a distancias grandes de la espira, pueden escribirse:

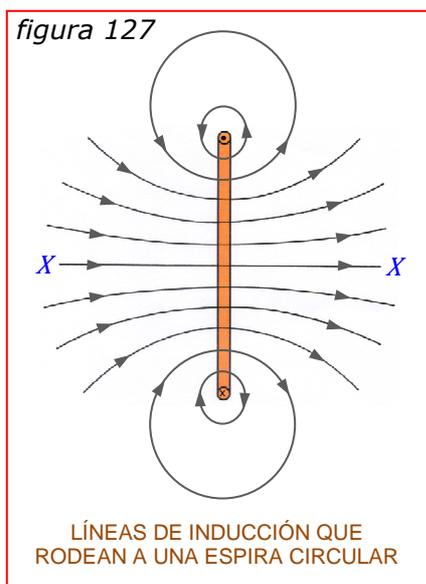
$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} 2 \mu \frac{\cos \theta}{r^3} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \mu \frac{\sen \theta}{r^3} \quad (154)$$

Observemos que estas ecuaciones tienen la misma forma que las dadas para las componentes  $E_r$  y  $E_\theta$  de la intensidad del campo creado por un dipolo eléctrico de momento  $p$  a una distancia grande comparada con la longitud del dipolo [fórmulas (13) y (14) de página 20]. Esto quiere decir que el campo  $B$  que rodea a una espira que transporta una corriente es geoméricamente idéntico al campo  $E$  que rodea un dipolo, cuando la distancia es grande comparada con las dimensiones de la espira o del dipolo. Cerca de la espira o del dipolo la analogía desaparece.

Si en lugar de una sola espira, se tiene una bobina de  $N$  espiras apretadas que tienen todas muy aproximadamente el mismo radio, cada vuelta contribuye de la misma forma a la creación del campo y las ecuaciones (152) y (153) se convierten en:

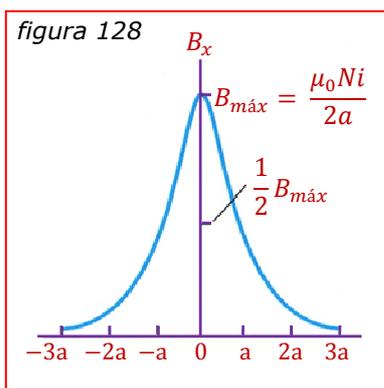
$$B = \frac{\mu_0 N i}{2 a} \quad B = \frac{\mu_0}{2} \frac{N i a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (155)$$

figura 127



En la figura 127 se han representado algunas de las líneas de campo que rodean a una espira circular y se encuentran en un plano que pasa por el eje. El campo, que es tridimensional, puede imaginarse si se supone que se hace girar el plano alrededor del eje  $XX$ . Observemos que cada línea de inducción es una curva cerrada.

Hemos visto anteriormente que una espira de hilo conductor de forma cualquiera, que transporta una corriente, queda sometida a un par cuando se encuentra en un campo magnético exterior. También vimos que la posición final de equilibrio era tal que el plano de la espira resultaba perpendicular al campo exterior. Ahora vemos que dicha posición es aquella en la cual la inducción del propio campo de la espira tiene el mismo sentido que el campo exterior.



En otras palabras, si una espira puede girar libremente, se colocará en un plano tal que el flujo que pase a través del área encerrada por ella tenga el máximo valor posible. Por ejemplo, si se hace circular una corriente a través de una espira de hilo flexible y forma irregular, colocada en un campo magnético exterior, la espira tomará una forma circular con su plano perpendicular al campo y de modo que su propio flujo se sume al del campo.

La figura 128 muestra una gráfica del campo magnético a lo largo del eje de una bobina circular con  $N$  espiras (la separación entre espiras es muy pequeña, de modo que el plano de cada espira está prácticamente a la misma distancia  $x$  del punto  $0$ ). Cuando  $x$  es mucho mayor que  $a$ , el campo disminuye con la inversa de  $x^3$ .

**Ejercicio Nº 92:** Una bobina circular con devanado compacto y un radio de 2,4 cm tiene 800 espiras. a) ¿Cuál debe ser la corriente en la bobina si el campo magnético en el centro de ésta es 0,058 T? b) ¿A qué distancia  $x$  del centro de la bobina, sobre el eje de ésta, alcanza el campo magnético la mitad del valor que tiene en el centro?

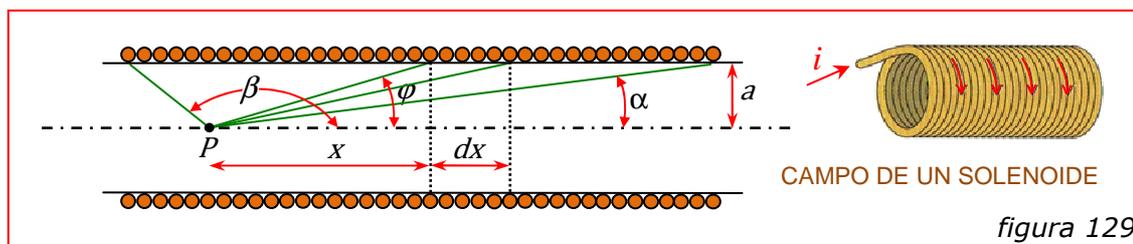
$$a) \quad B_0 = \frac{\mu_0 N i}{2 a} \Rightarrow i = \frac{2 a B_0}{\mu_0 N} = \frac{2(0,024 \text{ m})(0,058 \text{ T})}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}) 800} = 2,77 \text{ A}$$

$$b) \quad B_x = \frac{\mu_0 N i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} = \left(\frac{\mu_0 N i}{2 a}\right) \left(\frac{a^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\right) = B_0 \left(\frac{a^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}}\right) = \frac{1}{2} B_0$$

$$\frac{a^3}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (a^2 + x^2)^3 = 4 a^6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt[3]{4 a^6} - a^2}$$

$$\text{Para } a = 0,024 \text{ m} \Rightarrow x = 0,018 \text{ m}$$

### ◆ Campo Magnético de un Solenoide:



El campo magnético generado en cualquier punto por una corriente que circula en un **arrollamiento solenoidal**, es la resultante de los campos magnéticos creados en dicho punto por cada espira del solenoide. Para encontrar la densidad de flujo  $B$  en un punto

$P$  sobre el eje del solenoide (figura 129), consideramos un elemento longitudinal  $dx$  del mismo, a una distancia axial  $x$  de  $P$ . Representamos por  $l$  la longitud del solenoide y por  $N$  el número de espiras de su arrollamiento. El número de espiras por unidad de longitud es  $N/l$  y el número de espiras en la longitud  $dx$  es  $(N/l) dx$ .

En virtud de la ecuación (155), La **densidad de flujo** en  $P$  creada por la **corriente**  $i$  que circula por el **elemento**  $dx$ , es:

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{N i}{l} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

Utilizando como variable independiente el ángulo  $\varphi$  en lugar de  $x$ , se tiene:

$$x = a \operatorname{ctg} \varphi \quad ; \quad dx = -a \operatorname{cosec}^2 \varphi d\varphi$$

$$B = -\frac{\mu_0}{2} \frac{N i}{l} \int_{\beta}^{\alpha} \operatorname{sen} \varphi d\varphi = \frac{\mu_0}{2} \frac{N i}{l} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

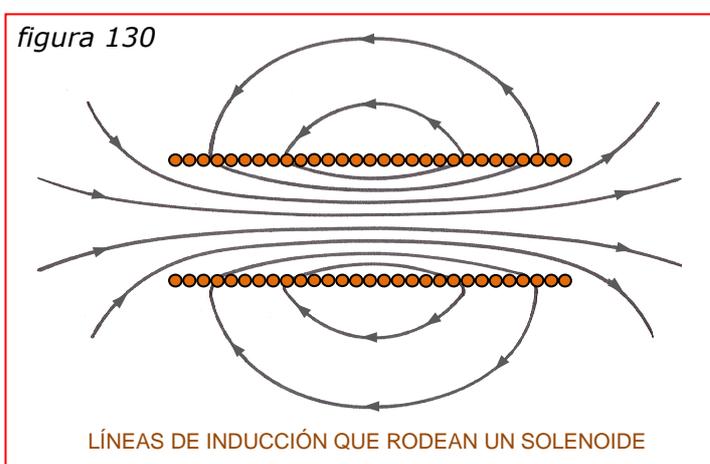
Esta ecuación se aplica a cualquier punto del eje y no está restringida a los puntos interiores del solenoide.

En cualquier punto del eje dentro de un largo solenoide y no demasiado próximo a cualquiera de sus extremos,  $\alpha = 0$  y  $\beta = 180^\circ$ . Por tanto, para estos puntos es:

$$B = \mu_0 \frac{N i}{l} \quad (156)$$

En un punto del eje en uno de los extremos de un largo solenoide,  $\alpha = 0$  y  $\beta = 90^\circ$  (o viceversa). Por tanto, en cualquiera de los extremos:

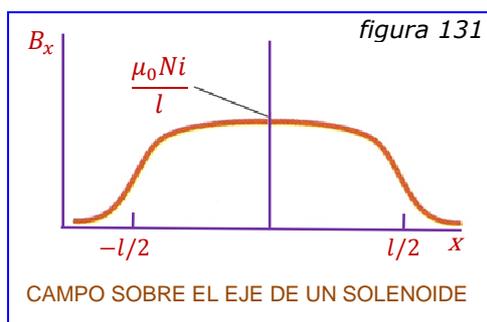
$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{N i}{l} \quad (157)$$



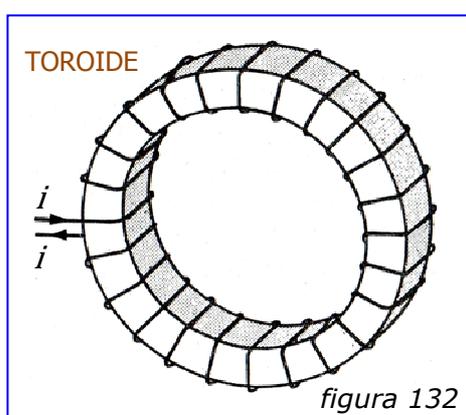
O sea que la **densidad de flujo** en cualquiera de los **extremos** es la **mitad** que en el **centro**. Sin embargo, el campo es muy aproximadamente constante, excepto cerca de los extremos. Las **líneas de inducción** entran y salen del solenoide en regiones relativamente pequeñas próximas a sus extremos (ver figura 130).

En el caso de **solenoides largos** con

devanado compacto, una mitad de las líneas de campo emergen de los extremos y la otra mitad se "fuga" a través de los devanados entre el centro y los extremos.



En la [figura 131](#) se representa la gráfica del campo magnético sobre el eje de un solenoide, en función de la posición  $x$  sobre dicho eje. La longitud del solenoide es 10 veces mayor que su radio. El campo interior al solenoide es casi constante (tanto más cuanto más largo es en relación a su diámetro), excepto cerca de los extremos.



Un arrollamiento tal como el esquematizado en la [figura 132](#), se denomina *solenoides toroidal* (también conocido como *toroide*). Puede imaginarse que es un solenoide que se ha encorvado hasta adquirir una forma circular, de modo que sus extremos se han unido (en la práctica las espiras estarían más próximas unas de otras que en la figura). Prácticamente *todo el flujo magnético se confina en el interior del toroide*. La *densidad de flujo* en cualquier punto, dentro del arrollamiento, está dada por la ecuación (156), en la cual  $l$  representa la *longitud de la circunferencia media del toroide*.

**Ejercicio N° 93:** Un solenoide cuya longitud es de 20 cm y su radio de 2 cm, está formado por 200 vueltas de hilo estrechamente arrolladas. La corriente que pasa por el solenoide es de 5 A. Calcular la inducción magnética en puntos situados sobre el eje del solenoide y a las siguientes distancias de su centro: 0 cm, 10 cm y 20 cm.

*Centro:* 
$$B_0 = \frac{\mu_0 N i}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}) (200)(5 \text{ A})}{0,2 \text{ m}} = 6,28 \text{ mT}$$

*Extremo:* 
$$B_{10} = \frac{\mu_0 N i}{2l} = \frac{6,28 \text{ mT}}{2} = 3,14 \text{ mT}$$

*Exterior:* 
$$B_{20} = \frac{\mu_0 N i}{2l} (\cos \alpha - \cos \beta) = 3,14 \text{ mT} (1 - 0,98) = 0,06 \text{ mT}$$

**Ejercicio N° 94:** Sobre un anillo de madera cuyo diámetro medio es de 10 cm, se ha arrollado muy apretado un devanado toroidal de 500 vueltas. Hallar la densidad de flujo en un punto de la circunferencia media del anillo, cuando la intensidad de la corriente en el devanado es de 0,3 A.

$$B = \frac{\mu_0 N i}{l} = \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}) (500)(0,3 \text{ A})}{\pi 0,1 \text{ m}} = 0,6 \text{ mT}$$

### ◆ Integrales Curvilíneas y de Superficie del Campo Magnético:

Puesto que *las líneas de inducción son siempre curvas cerradas*, se deduce que si se construye una superficie cerrada en un campo magnético, *toda línea de inducción que penetre en la superficie tiene que salir de ella*, dado que ninguna línea puede terminar ni engendrarse dentro del espacio limitado por la superficie. Por consiguiente, *la integral de superficie de la componente normal de  $B$  extendida a una superficie cerrada es siempre nula* (a diferencia de lo que ocurre con la integral de superficie de la componente normal de la intensidad  $E$  del campo eléctrico, que es igual a  $q/\epsilon_0$ , siendo  $q$  la carga encerrada dentro de la superficie):

LEY DE GAUSS

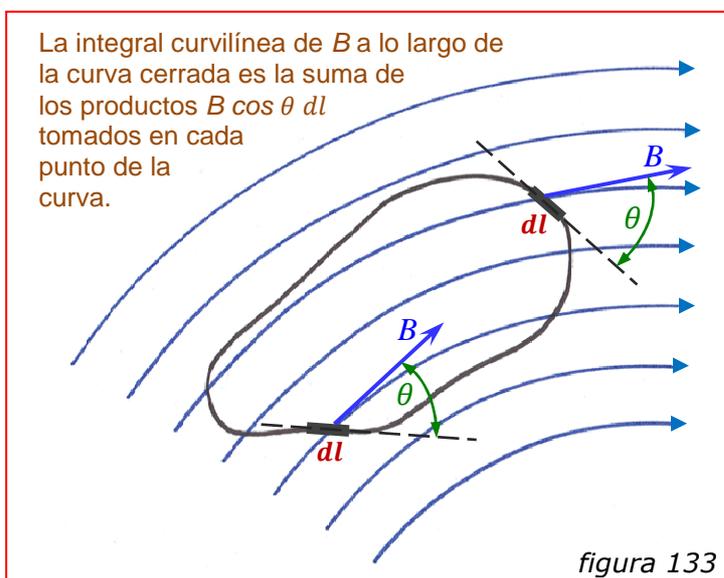
PARA EL MAGNETISMO  $\Rightarrow$

(ver página 140)

$$\int B \cos \varphi \, dA = 0 \quad (158)$$

En notación vectorial:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \quad (159)$$

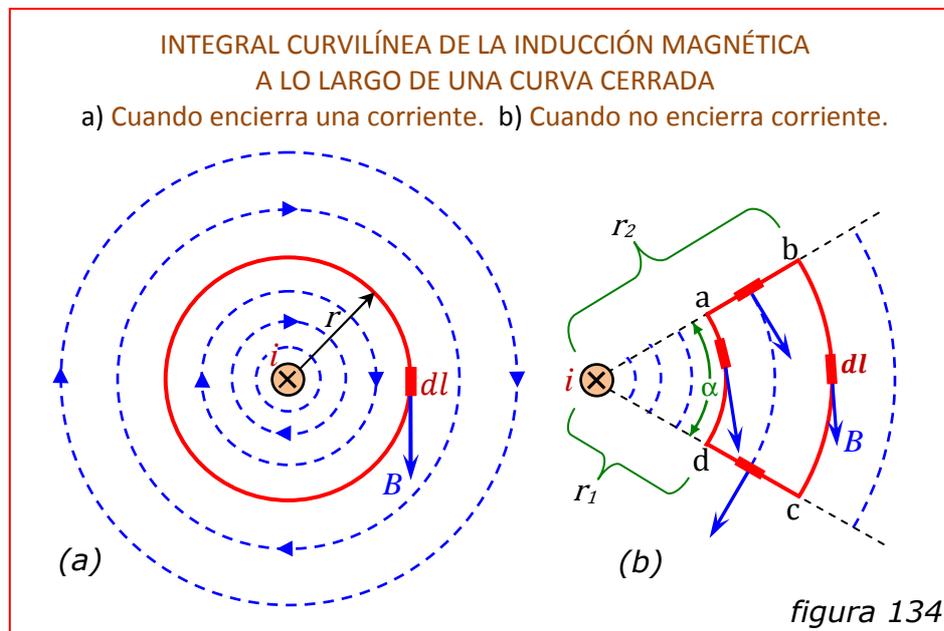


Considerando la integral curvilínea de la inducción a lo largo de una curva cerrada, puede obtenerse una generalización análoga a la anterior. Se recordará que dicha integral se obtiene formando en cada punto de la curva el producto de un elemento de longitud de la misma por la componente de la inducción en la dirección de este elemento e integrando luego estos productos (figura 133). La *integral curvilínea* a lo largo de una *curva cerrada* se escribe:

$$\oint B \cos \theta \, dl \quad (160)$$

siendo  $\theta$  el *ángulo* formado por un *elemento* cualquiera  $dl$  y la *dirección* de la *inducción*  $B$  en el elemento. Al recorrer la curva adoptaremos como *positivo* el sentido de las *agujas del reloj*.

Vamos a calcular la expresión general de la integral curvilínea estudiando el caso especial del *campo creado alrededor de un largo conductor rectilíneo*. Consideremos en primer lugar la *curva cerrada* representada por la *circunferencia de trazo lleno* de la *figura 134a*, de radio  $r$  y concéntrica con el conduc-



tor. La corriente  $i$  tiene el sentido indicado. Las *líneas de inducción* están representadas por *circunferencias de trazos*. La *densidad de flujo* en cada punto es *tangente* a la *circunferencia*, por lo que en la expresión (160) es  $\theta = 0$  y  $\cos \theta = 1$ . El valor de  $B$  en cada punto de la circunferencia es:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

y la integral se transforma en:

$$\oint B \cos \theta dl = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i$$

Consideremos a continuación el *contorno abcd* de la *figura 134b*, formado por los lados  $ab$  y  $cd$  dirigidos según los *radios* y los lados  $bc$  y  $da$  que son *arcos* que subtenden un *ángulo*  $\alpha$  y tienen por *radios*  $r_2$  y  $r_1$ . A lo largo de  $ab$  y  $cd$  el ángulo  $\theta$  es  $\pi/2$  y  $\cos \theta = 0$ , por lo que estos lados no contribuyen al valor de la integral. Un *elemento de longitud* situado a lo largo de  $ad$  o  $bc$  puede escribirse:

$$dl = r_1 d\alpha \quad ; \quad dl = r_2 d\alpha$$

La contribución del lado  $bc$  a la integral es:

$$\int \frac{\mu_0 i}{2\pi r_2} r_2 d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \alpha$$

ya que  $\theta = 0$  a lo largo de este lado.

La contribución del lado  $da$  es: 
$$-\int \frac{\mu_0 i}{2\pi r_1} r_1 d\alpha = -\frac{\mu_0}{2\pi} i \alpha$$

puesto que  $\theta = \pi$  a lo largo de este lado ( $dl$  y  $B$  tienen sentidos opuestos).

En consecuencia, la *integral curvilínea* alrededor del *contorno abcd* es *nula*.

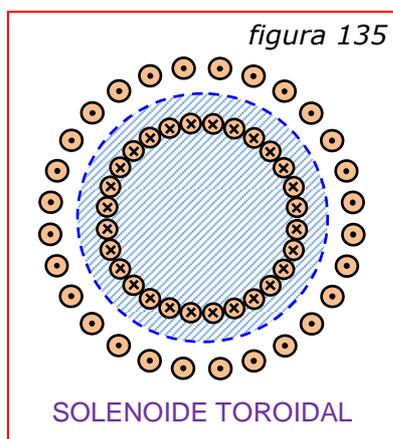
Estos dos casos especiales pueden generalizarse para un *contorno cerrado de forma cualquiera*, del siguiente modo: "La *integral curvilínea de la inducción magnética alrededor de cualquier curva cerrada es igual al producto de  $\mu_0$  por la corriente que circula a través de la superficie limitada por la curva*" (Si no existe corriente a través de la superficie limitada por la curva, la integral es *nula*. Si el sentido de giro adoptado sobre el contorno cuando se mira una de las caras es el de las agujas del reloj, la *corriente* se considera *positiva* si su sentido es el de *alejamiento del observador*, como sucede en la *figura 134*):

LEY DE AMPERE  $\Rightarrow$

$$\oint B \cos \theta dl = \mu_0 i \quad (161)$$

En notación vectorial:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (162)$$



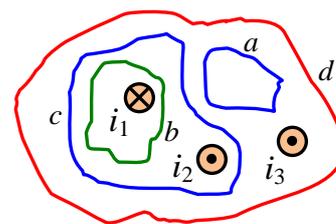
Como ejemplo de la simplificación que introduce en algunos problemas el uso de la relación deducida precedentemente, vamos a utilizarla para calcular por otro método la *densidad de flujo en el interior de un toroide*.

Calculemos la *integral curvilínea* a lo largo de la *trayectoria cerrada* representada por la línea de puntos de la *figura 135*. La *superficie* abarcada por la trayectoria es la rayada. Cada una de las  $N$  *espiras* del arrollamiento del toroide *atraviesa una vez esta superficie*, siendo  $Ni$  la *corriente total que la atraviesa*. La *inducción* a lo largo de la trayectoria es *paralela* a ella y, por simetría, es

*constante* en todos los puntos. Representemos por  $B$  la inducción y por  $l$  la longitud de la trayectoria. La *integral curvilínea* en este caso vale  $Bl$  y, en virtud de la ecuación (161),  $Bl = \mu_0 Ni$ . Luego:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l} \quad [\text{que coincide con la ecuación (156)}]$$

**Ejercicio N° 95:** La figura muestra, en sección transversal, tres conductores que transportan corriente a través del plano de la misma. Las magnitudes de las corrientes son  $i_1 = 4 A$ ,  $i_2 = 6 A$  e  $i_3 = 2 A$ , siendo las direcciones las que se indican. Se muestran cuatro trayectos identificados de *a* a *d*.



¿Cuál es la integral curvilínea  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$  correspondiente a cada trayecto? Cada integral recorre su trayecto en sentido contrario a las agujas del reloj.

a)  $i_{enc} = 0 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$

b)  $i_{enc} = -i_1 = -4 A \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0(4 A) = -5,03 \times 10^{-6} Tm \quad (\#)$

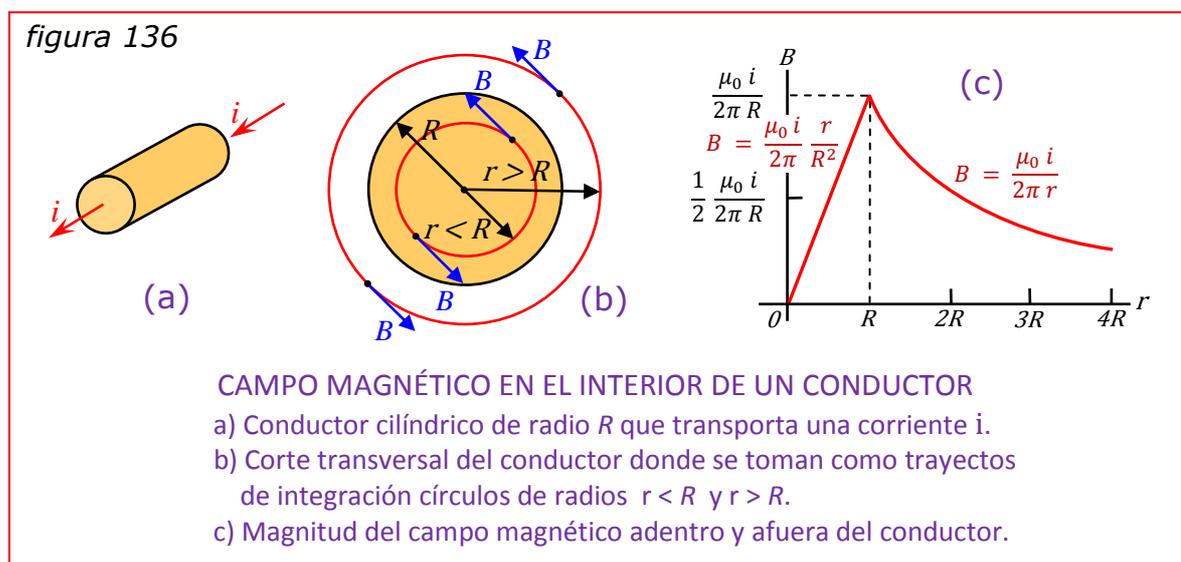
c)  $i_{enc} = -i_1 + i_2 = 2 A \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(2 A) = 2,51 \times 10^{-6} Tm$

d)  $i_{enc} = -i_1 + i_2 + i_3 = 4 A \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(4 A) = 5,03 \times 10^{-6} Tm$

(#) Recordar que la corriente se considera positiva si su sentido es de alejamiento del observador cuando el trayecto de la integral curvilínea es recorrido en sentido horario.

### ◆ Campo Magnético en el Interior de un Conductor:

Un **conductor cilíndrico** de **radio  $R$**  transporta una **corriente  $i$**  que se distribuye uniformemente en todo el área de la sección transversal del conductor. Hallaremos el **campo magnético** en función de la **distancia  $r$**  al eje del conductor.



Tomaremos, como *trayecto de integración*, un círculo de radio  $r < R$  adentro del conductor y un círculo de radio  $r > R$  afuera del conductor, como se muestra en la *figura 136(a/b)*.

Adentro del conductor, por la *simetría* de su distribución,  $B$  tiene la *misma magnitud* en todos los puntos del trayecto circular de integración y es *tangente* al trayecto. En consecuencia, la *integral curvilínea* es simplemente  $B (2 \pi r)$ . Para hallar la *corriente encerrada* por el trayecto, tenemos en cuenta que la *densidad de corriente* es  $J = i/\pi R^2$ ; por lo tanto,  $i_{enc} = J (\pi r^2) = i r^2/R^2$ . Por último, la *ley de Ampere* nos da:

$$B (2 \pi r) = \mu_0 \frac{i r^2}{R^2}$$

ADENTRO  
 DEL CONDUCTOR ( $r < R$ )  $\Rightarrow$   $B = \frac{\mu_0 i r}{2 \pi R^2}$  (163)

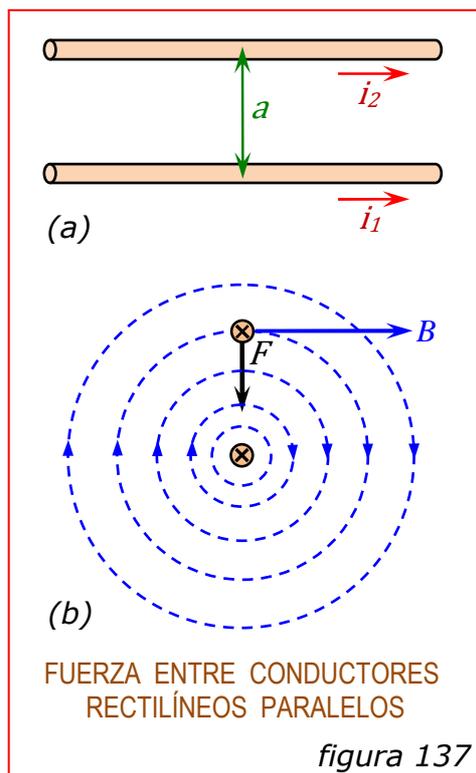
Afuera del conductor, aplicando los mismos argumentos de simetría, la integral es de nuevo  $B (2 \pi r)$ . La corriente encerrada es la corriente total  $i$ . Por la ley de Ampere resulta:

AFUERA  
 DEL CONDUCTOR ( $r > R$ )  $\Rightarrow$   $B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi r}$

La expresión precedente para el *campo magnético afuera del conductor* es idéntica a la ecuación (151), por lo que este campo es *igual al de un conductor recto y largo que transporta una corriente  $i$* . Al ser independiente del radio del conductor, *el campo es el mismo que si toda la corriente se concentrara a lo largo del eje de dicho conductor*. La *figura 136(c)* muestra una *gráfica de  $B$  en función de  $r$* , tanto adentro como afuera del conductor.

### ◆ Fuerza entre Conductores Paralelos:

La *figura 137(a)* representa una porción de *dos conductores largos, rectilíneos y paralelos*, separados por una *distancia  $a$* , que transportan *corrientes  $i_1$  e  $i_2$  del mismo sentido*. Cada conductor, puesto que se encuentra en el campo magnético creado por el otro, experimentará una fuerza. La *figura 137(b)* muestra algunas de las líneas de inducción creadas por la corriente del conductor inferior.



El valor del vector  $B$  en el *conductor superior* es:

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2 \pi a}$$

En virtud de la ecuación (135), la *fuerza* sobre un trozo del *conductor superior*, de longitud  $l$ , será:

$$F = i_2 B l = \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{i_1 i_2 l}{a} \quad (164)$$

y la *fuerza por unidad de longitud*:

$$\frac{F}{l} = i_2 B = \frac{\mu_0}{2 \pi} \frac{i_1 i_2}{a} \quad (165)$$

De acuerdo con la regla de la mano izquierda (o la del tornillo para productos vectoriales), el *sentido de la fuerza* sobre el *conductor superior* es *hacia abajo*. Hay una fuerza igual y opuesta sobre el

conductor inferior, como puede verse si consideramos el campo que rodea al conductor superior. En consecuencia, *cuando dos conductores paralelos transportan corrientes de igual sentido, se atraen mutuamente*.

Si se invierte el sentido de la corriente en cualquiera de los conductores, las fuerzas cambian también de sentido. Por lo tanto, *cuando dos conductores paralelos transportan corrientes de sentido contrario, se repelen mutuamente*.

**Ejercicio N° 96:** El niobio (*elemento químico metálico*) se convierte en un superconductor cuando es enfriado por debajo de 9 K. Su superconductividad se destruye cuando el campo magnético superficial excede 0,1 T. Determinar la corriente máxima que puede llevar un hilo de niobio de 2 mm de diámetro sin perder su propiedad superconductora, en ausencia de cualquier campo magnético externo.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2 \pi R} \Rightarrow i = \frac{2 \pi R B}{\mu_0} = \frac{2 \pi (0,002 \text{ m})(0,1 \text{ T})}{4 \pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}} = 1.000 \text{ A}$$

**Ejercicio N° 97:** Dos alambres paralelos largos están separados por una distancia de 2,5 cm. La fuerza por unidad de longitud que cada alambre ejerce sobre el otro es de  $4 \times 10^{-5} \text{ N/m}$  y los alambres se repelen mutuamente. En uno de los alambres la corriente es de 0,6 A. Determinar la corriente que fluye en el segundo alambre y precisar si ambas corrientes fluyen en el mismo sentido o en sentido opuesto.

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi a} \Rightarrow i_2 = \frac{F}{l} \frac{2 \pi a}{\mu_0 i_1}$$

$$i_2 = (4 \times 10^{-5}) \frac{2 \pi (0,025 \text{ m})}{(4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}) (0,6 \text{ A})} = 8,33 \text{ A}$$

Las corrientes fluyen en *sentidos opuestos*.

