



UTN-FACUTAD REGIONAL RECONQUISTA

ANALISIS MATEMATICO II

UNIDAD 7

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Nociones generales

En muchos problemas las relaciones entre variables, se establecen en función de razones de cambio. De hecho al inicio de esta asignatura se plantaron y verificaron algunas de estas, como por ejemplo la Ecuación de Laplace $:\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$

En esta unidad se formalizara el concepto y se verán técnicas para resolver algunas de las ecuaciones diferenciales más usadas en ingeniería.

Introducción

Consideremos los siguientes problemas.

Problema 1

¿Cuáles serán las curvas que verifican que la pendiente en cada uno de sus puntos es igual al doble de la suma de las coordenadas del punto?

Teniendo en cuenta la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto podemos expresar simbólicamente este enunciado de la forma

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)$$

La incógnita en este caso es la función $y = f(x)$

Una ecuación de este tipo se llama ecuación diferencial ordinaria.

Problema 2

Desde una gran altura se deja caer un objeto de masa m . Determinar la velocidad de caída de este objeto en función del tiempo t , si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad.

Si llamamos R a la resistencia del aire tenemos:

$$R = kv$$

Siendo K el coeficiente de fricción con el aire.

En virtud de la segunda Ley de Newton tenemos que

$$m \frac{dv}{dt} = \sum F$$

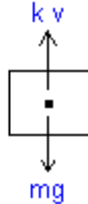
Donde dv/dt es la aceleración del cuerpo en movimiento, m su masa y F es una fuerza que actúa en la dirección del movimiento.

¿Cómo podemos expresar esta ley en este caso?

Evidentemente la suma de fuerzas que actúan sobre la masa es la resultante entre dos fuerzas, la ley de gravedad y la resistencia al aire.

Entonces

$$m \frac{dv}{dt} = mg - Kv$$



Como buscamos hallar la velocidad de caída del objeto podemos escribir:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{K}{m}v$$

Hemos obtenido una relación entre una función desconocida v y su derivada. Necesitamos encontrar $v(t)$, para ello debemos resolver esta ecuación.

¿Qué es una ecuación diferencial?

Definición

Una ecuación que contiene la derivada de una o más funciones que dependen de una o más variables, es una ecuación diferencial (ED).

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo con su tipo, orden y linealidad.

Clasificación según su tipo

1) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Si una ecuación diferencial solo contiene derivadas de una o más funciones con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una E.D. ordinaria (E.D.O).

Ejemplos

a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} = 5x$ b) $x'(t) = 2x(t)$

2) Ecuaciones Diferenciales en derivadas Parciales

Una ecuación diferencial que contiene las derivadas parciales de una o más funciones respecto de dos o más variables independientes, se llama E.D. en derivadas parciales

Ejemplos

$$\text{a) } \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \qquad \text{b) } \frac{\delta^2 u}{\delta y \delta x^2} + xy \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0$$

En este curso estudiaremos exclusivamente ecuaciones diferenciales ordinarias

Clasificación según el orden

Para poder efectuar esta clasificación necesitaremos incorporar previamente el concepto de orden de una ecuación diferencial.

El orden de una E.D (ordinaria o en derivadas parciales) es el orden de la derivada de mayor orden en la ecuación.

Ejemplos

a) $5xyy' + 3x^2y + 5x = 0$ Ecuación de primer orden

b) $4xy''' - 3y = \text{sen}x$ Ecuación de tercer orden.

c) $4x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$ Ecuación de primer orden

Esta última ecuación es de segundo grado y las dos primeras son de grado uno.

Se llama grado de la ecuación diferencial al máximo exponente al que se encuentra elevada la derivada de mayor orden.

Una E.D.O de orden **n**, se suele representar simbólicamente de la siguiente manera $F(x; y; y'; y''y'''; \dots y^{(n)}) = 0$, que es la forma implícita.

Si es posible despejar la derivada de orden **n** de la ecuación diferencial ordinaria de orden n, obtendríamos: $y^{(n)} = f(x; y; y'; y''y'''; \dots y^{(n-1)})$, que es la forma explícita.

Clasificación según su linealidad

Por el tipo de operación a la que está afectada la función incógnita

Lineal

Una ecuación diferencial es lineal si puede escribirse en la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_0(x)y = G(x)$$

A partir de esta ecuación podemos deducir las dos propiedades más importantes de una E.D. Lineal:

I) La variable dependiente y todas sus derivadas son de primer grado, esto es, la potencia de todo término donde aparece y es 1. Siendo el grado de un término la suma de los exponentes de la variable dependiente y de las derivadas que aparecen en él.

II) Cada coeficiente sólo depende de x que es la variable independiente.

Las funciones de y, como $\sen y$ o las funciones de las derivadas de y, como $e^{y'}$, no pueden aparecer en una E.D lineal.

Ejemplos

a) $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \sen x$

b) $y'' - 2y' + y = 0$

c) $(y - x)dx + 4xdy$

2) No lineal

Cuando una E.D no es lineal.

a) $(1 + y)y' + 2y = e^x$ (el coeficiente $1+y$, depende de y)

b) $\frac{d^2y}{dx^2} + \sen y = 0$ (el $\sen y$ es una función no lineal de y)

c) $\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$ (potencia distinta de 1)

Solución de una ecuación diferencial

Resolver o integrar una ecuación diferencial ordinaria es hallar todas sus soluciones

Una función $y = f(x)$ se denomina **solución** de una ecuación diferencial si la ecuación se satisface cuando y y sus derivadas se reemplazan por $f(x)$ y sus derivadas.

No todas las ED tienen solución. El tratamiento de la existencia y unicidad de la solución reviste cierta complejidad, por lo que no se aborda dicho problema en este curso.

Ejemplo

Determinar en cada caso si la función es una solución de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$

a) $y = \sen x$ b) $y = 4e^x$ c) $y = Ce^x$

a) Hallamos y' e y'' y reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$y = \sen x \quad y' = \cos x \quad y'' = -\sen x$$

$$y'' - y = 0$$

$-\sen x - \cos x \neq 0$ la función $y = \sen x$, no es solución de la ecuación diferencial

b) Hallamos y' e y'' y reemplazamos en la ecuación diferencial dada

$$y = 4e^x \quad y' = 4e^x \quad y'' = 4e^x$$

$$y'' - y = 0$$

$$4e^x - 4e^x = 0$$

Así $y=4e^x$ es solución de la ecuación

$$c) y = Ce^x \quad y' = Ce^x \quad y'' = Ce^x$$

$$Ce^x - Ce^x = 0$$

Entonces $y = Ce^x$, es solución de la ecuación para cualquier valor de C .

Hay tres tipos de soluciones para las ED

a) Solución General

Es conveniente señalar que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden vendrá dependiente de una constante indeterminada, en el caso de las de segundo orden dependerá de dos constantes, tres para las de tercer orden

Se puede mostrar que una ecuación diferencial de orden n tiene una solución general con n constantes arbitrarias

b) Solución particular

Son soluciones que se obtienen a partir de la solución general, asignando valores particulares a las constantes arbitrarias.

En consecuencia $y = 4 - e^{-x}$ y $y = e^{-x}$ son dos soluciones particulares de $y'' - y' = 0$

En general estas soluciones se obtienen con datos adicionales sobre la función buscada, denominados condiciones de frontera, tales como $y(x_0) = y_0$ o $y(0) = y_0$

Ejemplo

Dada la ecuación diferencial $xy' - 3y = 0$, verificar que $y = Cx^3$ es una solución, y encontrar la solución particular determinada por la condición inicial $y = 2$ cuando $x = -3$.

Verificamos si $y = Cx^3$, es solución de la ecuación diferencial.

$$y' = 3Cx^2$$

Sustituimos en la ecuación

$$x(3Cx^2) - 3(Cx^3) = 0$$

Ahora hallamos la solución particular, a partir de la solución general, utilizando las condiciones iniciales

$$y = 2 \rightarrow x = -3$$

$$y = Cx^3$$

$$2 = -27C \rightarrow C = -\frac{2}{27}$$

La solución particular será

$$y = -\frac{2}{27}x^3$$

Para determinar una solución particular, el número de condiciones iniciales debe corresponder al número de constantes en la solución general

c) Solución Singular

Son funciones que satisfacen la ecuación diferencial y no se obtienen a partir de la solución general.

$$y' = xy^{1/2}$$

En este caso $y = 0$ es una solución singular de la ecuación, porque no se puede obtener de la familia; dándole a C valores adecuados

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden

Son de la forma $G(x; y; y') = 0$ o bien su forma explícita $y' = f(x; y)$, donde $y = f(x)$ es la función incógnita.

La ecuación diferencial $y' = f(x; y)$ tiene una familia infinita de soluciones que constituye la solución general.

Esta solución general, puede ser expresada como: $g(x; y; C) = 0$. (forma implícita) ó $y = f(x; C)$ (forma explícita), y representa geoméricamente a una familia de curvas planas, llamadas curvas soluciones o curvas integrales (una curva para cada valor de la constante C).

Una solución particular que satisface la condición inicial $y(x_0) = y_0$ será la curva (o las curvas) de la familia que contiene al punto $(x_0; y_0)$

Desarrollaremos algunos métodos que permiten resolver alguna de las más comunes de las EDO, en esta unidad abordaremos las EDO de primer orden.

Separación de Variables

Son ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma $y' = g(x)h(y)$ (1)

Es decir, se la pueden expresar de forma tal que en el miembro de la izquierda aparece y' , y en el de la derecha aparece un producto de dos funciones: una dependiente sólo de x , y otra sólo de y .

Para resolverla tenemos en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$, entonces la ecuación (1) puede escribirse

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

De donde para todo y tal que $h(y) \neq 0$ tenemos $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.

Se trata de arreglar la ecuación de tal forma que nos quede en un miembro solamente las x , y en el otro miembro sólo las y .

Luego se integra ambos miembros: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$

Si ambas integrales pueden ser resueltas tenemos una solución de la forma: $H(y) = G(x) + C$

Que es la solución general de la ecuación

Notar que al resolver cada integral aparecen en ambos miembros una constante de integración las que se reunirán en una sola.

Ejemplo 1

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x(y-3)}$$

Reescribimos la ecuación de forma tal que nos quede en un miembro solamente las x , y en el otro las y

$$\frac{(y-3)dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

y ahora integramos los dos miembros:

$$\int \frac{(y-3)dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int (1 - \frac{3}{y})dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$y - 3\ln y = \ln x + C$$

En este caso conviene expresar la constante como $\ln C$

$$y - 3\ln y = \ln x + \ln C$$

$$y = \ln x + 3\ln y + \ln C$$

$$y = \ln x + \ln y^3 + \ln C$$

$$y = \ln(xy^3C) \text{ O bien } e^y = xy^3C$$

Ejemplo 2

Resolver

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy + xy^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x(y + y^3)}$$

$$(y + y^3)dy = \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\int (y + y^3)dy = \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \frac{\ln^2 x}{2} + C \quad \text{o bien } y^4 + 2y^2 = 2\ln^2 + C$$

Cálculos auxiliares

Sustitución

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{u^2}{2} = \frac{\ln^2 x}{2}$$

Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = f(x; y)$, es homogénea si se la puede escribir como una función de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Para resolverla se hará la sustitución $v = \frac{y}{x}$, mostrando que dicha sustitución la transforma en una EDO de variables separables.

$$v = \frac{y}{x} \rightarrow y = vx, \text{ derivando miembro a miembro}$$

$$y' = v'x + v, \text{ reemplazando en } y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v'x + v = f(v), \text{ operando tenemos}$$

$$\frac{dv}{dx}x = f(v) - v, \text{ separando variables}$$

$$\frac{dv}{f(v)-v} = \frac{dx}{x}$$

Se procede como lo hicimos en el caso anterior para finalmente reemplazar $v = \frac{y}{x}$

Ejemplo 1

Resolver

$$xyy' = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Vemos si es una ED homogénea, o sea si la podemos expresar como una función de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Dividimos ambos miembros de la ecuación por xy

$$y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} \rightarrow y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ es una EDO homogénea}$$

$$\text{Hacemos la sustitución } v = \frac{y}{x} \rightarrow y' = v'x + v \quad (2)$$

$$y' = \frac{1}{v} + v \quad (3)$$

Igualamos (2) y (3)

$$v'x + v = \frac{1}{v} + v \rightarrow v'x = \frac{1}{v} \rightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{1}{v} \text{ se transformo en una EDO de variables separables}$$

Entonces procedemos a separar las variables como lo hicimos antes

$$v dv = \frac{dx}{x} \text{ integramos m.am}$$

$$\int v dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln|x| + C \text{ volvemos a la variable original}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x| + C \rightarrow y^2 = 2x^2 \ln|x| + Cx^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{2x^2 \ln|x| + Cx^2}$$

Ejemplo 2

Prueba que la EDO $xy' = y + xe^{y/x}$ es homogénea y resuélvela

$$xy' = y + xe^{y/x}$$

Verificamos si la ecuación es homogénea

Dividimos ambos miembros por x

$$y' = \frac{y}{x} + e^{y/x} \quad (1)$$

La EDO es homogénea

$$\text{Resolvemos haciendo la sustitución } v = \frac{y}{x} \rightarrow y' = v'x + v \quad (2)$$

Sustituimos en (1)

$$y' = v + e^v \quad (3)$$

Igualamos (2) y (3)

$$v'x + v = v + e^v \quad v'x = e^v \rightarrow \frac{dv}{dx}x = e^v,$$

La ecuación dada se transformo en una EDO de variables separables, entonces procedemos a separar las variables.

$$\rightarrow \frac{dv}{e^v} = \frac{dx}{x}$$

Integramos ambos miembros

$$\int e^{-v} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-e^{-y} = \ln|x| + C$$

Volvemos a la variable original

$$-e^{-y/x} = \ln|x| + C \rightarrow e^{-y/x} = -\ln|x| - C \rightarrow e^{-y/x} = \ln|x|^{-1} - C$$

Aplicamos logaritmos para escribir la forma explícita de la solución

$$-\frac{y}{x} = \ln [\ln|x|^{-1} - C] \rightarrow y = -x \ln [\ln|x|^{-1} - C]$$

Modelado con ecuaciones diferenciales de primer orden

La descripción matemática de un fenómeno se llama modelo Matemático. Cuando las hipótesis acerca del sistema implican, con frecuencia la razón o tasa de cambio de una o más variables el modelo matemático es una ecuación o sistema de Ecuaciones Diferenciales.

En este curso vamos a ver algunos modelos matemáticos en los que la ecuación diferencial es la herramienta empleada.

Decaimiento Radiactivo

El núcleo de un átomo está formado por combinaciones de protones y neutrones. Muchas de esas combinaciones son inestables, esto significa que se desintegran o se convierten en átomos de otros elementos, o en otro isótopo del mismo. Se dice que estos núcleos son radiactivos. Por ejemplo el radio. Para modelar el fenómeno de desintegración se supone que la velocidad con que los núcleos de una sustancia se desintegran es directamente proporcional, a la cantidad de núcleos de la sustancia que quedan cuando el tiempo es t . Si consideramos una muestra de material que contenga $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo en el momento t , tendremos

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \quad (1)$$

Ésta es una ecuación con variables separables, donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

El valor de la constante de decaimiento k depende del isótopo particular que se está manejado.

Si k es grande, el isótopo decae con rapidez, mientras que si k está próximo a cero, el isótopo decae con lentitud.

Hallamos la solución de la ED (1)

$$\frac{dN}{dt} = kN(t) \rightarrow \text{separando variables tenemos } \frac{dN}{N} = kdt \text{ entonces integrando tenemos que}$$

$$\ln N(t) = kt + C \rightarrow N(t) = e^{kt+C}$$

$$N(t) = Ce^{kt}$$

Es común conocer la cantidad (inicial) de material existente en $t=0$, lo que se expresa

$$N(0) = N_0$$

Con esto podemos calcular la constante C :

$$N_0 = Ce^{k(0)} \rightarrow N_0 = C$$

Tenemos la solución general

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

Suele especificarse la constante de decaimiento en términos de otro parámetro, la vida media del isótopo. La vida media de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial. Mientras mayor es este dato más estable es una sustancia.

Crecimiento

La expresión (1) también se emplea como modelo de crecimiento. Por ejemplo en biología la rapidez de crecimiento de algunas poblaciones (bacterias o animales pequeños) es proporcional a la población presente en cualquier momento t . Lo que podemos expresarlo así:

$$\frac{dA}{dt} = kA \quad (2)$$

Procediendo de igual manera que en el caso anterior

$$A(t) = C e^{kt}$$

Considerando la cantidad inicial de la población para $t=0$:

$$A(0) = A_0$$

$$A_0 = C e^{k(0)} \rightarrow A_0 = C$$

Tenemos la solución general

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Las ecuaciones (1) y (2) son exactamente iguales, la diferencia radica en la interpretación de los símbolos y de las constantes de proporcionalidad. Como cabe de esperar en el caso de crecimiento $k > 1$ y en el caso de decaimiento $k < 1$. El modelo de desintegración también se aplica a sistemas biológicos, por ejemplo para determinar la vida media de una medicina, o sea el tiempo que tarda el organismo en eliminar el 50% de ella.

Ejemplo 1

Si el 5% de una sustancia radioactiva se descompone en 50 años:

- a) ¿Qué porcentaje habrá al final de 500 años?
- b) ¿Y después de 1 000 años?
- c) ¿Cuál es la vida media de esta sustancia?

a) Analizamos los datos que nos da el problema:

$$N(50) = 0,95N_0$$

Utilizando dicha condición procedemos a sustituir la información en la forma general

$$N(t) = C e^{kt}$$

$$N_0 = C e^{k(0)} \rightarrow N_0 = C$$

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

$$N(50) = 0,95N_0 \rightarrow 0,95N_0 = N_0 e^{50k} \text{ por lo tanto } \rightarrow 0,95 = e^{50k} \text{ aplicando logaritmos}$$

$$\ln 0,95 = 50k \rightarrow k = \frac{\ln 0,95}{50} \text{ por lo tanto } k = -0,001026$$

$$N(500) = N_0 e^{(-0,001026)500}$$

$$N(500) = 0,598N_0$$

A los 500 años habrá un 59% de la cantidad inicial.

$$b) N(1000) = N_0 e^{(-0,001026)1000}$$

$$N(1000) = 0,3584N_0$$

A los 1000 años habrá un 35,84% de la cantidad inicial.

c) La vida media de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que se desintegre o transmute la mitad de los átomos en una muestra inicial por lo que vamos a hacer el siguiente planteo

$$N(t_m) = \frac{N_0}{2} \rightarrow \frac{N_0}{2} = N_0 e^{(-0,001026)t_m}$$

$$\frac{1}{2} = e^{(-0,001026)t_m} \rightarrow = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{(-0,001026)}$$

$$t_m = 575 \text{ años}$$

Ejemplo 2

Si el número de bacterias contenidas en 1 litro de leche se duplica en 4 horas y suponiendo que la tasa de multiplicación es constante, calcular en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor

Sabemos que el modelo de crecimiento responde a:

$$A(t) = C e^{kt}$$

Primero calculamos k

$$A_0 = C e^{k(0)} \rightarrow A_0 = C$$

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

$$A(4) = 2A_0$$

$$2A_0 = A_0 e^{4k}$$

$$2 = e^{4k} \rightarrow 4k = \ln 2 \text{ por lo tanto } k = (\ln 2)/4$$

$$K = 0,3465$$

Debemos calcular el tiempo en que $A = 25A_0$

$$25A_0 = A_0 e^{(0,3465)t}$$

$$25 = e^{(0,3465)t}$$

$$0,3465t = \ln 25 \rightarrow t = (\ln 25)/0,3465$$

$$t = 9,28 \text{ Horas}$$

Ley de Newton del enfriamiento

Según la ley empírica de Newton acerca del enfriamiento, la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y el medio que lo rodea, que es la temperatura ambiente.

Si $T(t)$ representa la temperatura del objeto en el momento t , T_m es la temperatura constante del medio que lo rodea y $\frac{dT}{dt}$ es la rapidez con que se enfría el objeto, la ley del enfriamiento de Newton se traduce en el enunciado matemático

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Como supusimos que el objeto se enfría, se debe cumplir que $T > T_m$ en consecuencia, lo lógico es que $k < 0$

Ejemplo

Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es de $70^\circ F$ y se lleva al exterior, donde la temperatura es de $10^\circ F$. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica $50^\circ F$. ¿Cuál es la lectura cuando $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a $10^\circ F$?

Sea T la temperatura del termómetro

T_m la temperatura del medio externo

T_0 Temperatura inicial del termómetro.

$$T_m = 10^\circ F$$

$$T(0,50) = 50^\circ F$$

$$T(1) = ?$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad \frac{dT}{dt} = k(T - 10) \quad \text{ED de variables separables} \rightarrow$$

$$\frac{dT}{T-10} = k dt, \text{ integramos ambos miembros}$$

$$\int \frac{dT}{T-10} = \int k dt$$

$$\ln(T - 10) = kt + C \rightarrow T - 10 = e^{kt+C}, \text{ por lo tanto aplicando propiedades tenemos}$$

$$T = 10 + Ce^{kt}$$

$$T(0) = 70^\circ F$$

$$70 = 10 + Ce^{k(0)} \rightarrow C = 60$$

$$T = 10 + 60e^{kt}$$

Debemos hallar el valor de k

Al medio minuto el termómetro registra una temperatura de $50^\circ F$

$$50 = 10 + 60e^{0,5k}$$

$$40 = 60e^{0,5k} \rightarrow \frac{2}{3} = e^{0,5k}, \text{ aplicando logaritmo natural}$$

$$0,5k = \ln \frac{2}{3} \rightarrow k = \left(\ln \frac{2}{3} \right) : 0,5, \text{ tenemos que } k = -0,811$$

Ahora estamos en condiciones de hallar la temperatura al minuto.

$$T = 10 + 60e^{(-0,811).1}$$

$$T = 36,67^{\circ}F$$

Ahora vamos a hallar el tiempo que transcurre para que el termómetro llegue a los 20°F.

$$T = 10 + 60e^{(-0,811).t}$$

$$20 = 10 + 60e^{(-0,811).t}$$

$$\frac{1}{6} = e^{-0,811t} \rightarrow -0,811t = \ln(1/6) \rightarrow t = 2,21 \text{ minutos}$$

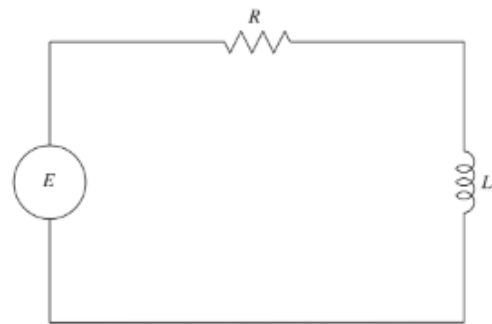
Circuitos eléctricos

Circuito RL

Cuando un circuito en serie contiene una resistencia y un inductor se llama circuito (RL), la segunda ley de Kirchhoff establece que las sumas de las caídas de voltaje a través del inductor ($L \frac{dI}{dt}$) y del resistor (IR) es igual al voltaje aplicado $E(t)$ al circuito. Con esto podemos obtener la ecuación diferencial lineal que describe la corriente $I(t)$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad (1)$$

Donde L y R son las constantes conocidas como inductancia y resistencia.



La ecuación (1) es una ecuación diferencial lineal

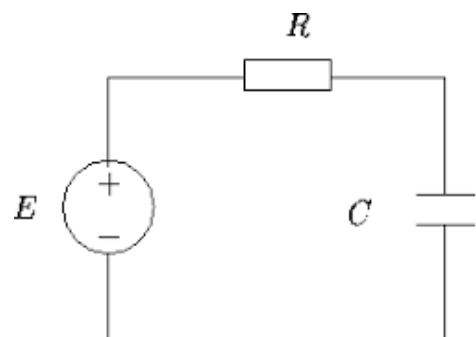
Circuito RC

La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es q/C , donde q es la carga del capacitor por lo tanto para el circuito en serie de la figura circuito (RC), la segunda ley de Kirchhoff establece:

$$RI + \frac{1}{C}q = E(t)$$

Pero la corriente I y la carga q se relacionan $I = \frac{dq}{dt}$, así tenemos la ED

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$$



Las ecuaciones (1) y (2) son ecuaciones diferenciales lineales

Ambas ecuaciones diferenciales se resolverán por el método del factor integrante

Problemas de Mezclas

Un tipo de problema que se puede describir en términos de una ecuación diferencial involucra mezclas químicas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 litros de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución de salmuera se bombea al tanque a una tasa de 3 litros por minuto. El contenido se agita perfectamente y es desalojado a la misma tasa. Si la concentración de la solución que entra es 2kg /litros, hay que formar un modelo de la cantidad de sal en cualquier momento

Para resolver este problema procedemos como sigue:

Consideremos primero la rapidez con que cambia la cantidad de soluto $A(t)$ en el tanque, la cual está dada por la rapidez con que entra el soluto menos la rapidez con la que sale.

Esto es:

$$\frac{dA}{dt} = \text{rapidez con que entra el soluto} - \text{rapidez con que sale el soluto} = R_e - R_s \quad (1)$$

Si tomamos en cuenta que:

r_e : la razón de entrada de la solución

r_s : la razón de salida de la solución

La rapidez con que entra el soluto es: $R_e = r_e C_e$

La rapidez con que sale el soluto es: $R_s = r_s C_s$

La concentración de salida de soluto que es $A(t)/V(t)$ ya que depende de la cantidad y volumen presente en el tiempo.



Entonces la expresión (1) se transforma en:

$$\frac{dA}{dt} = R_e - R_s \quad (1)$$

$$\frac{dA}{dt} = r_e C_e - r_s C_s = r_e C_e - r_s \frac{A(t)}{V(t)}$$

$$\frac{dA}{dt} = r_e C_e - r_s \frac{A(t)}{V(t)} \quad \text{Modelo general para cualquier problema de mezclas o soluciones}$$

$$R_e = \left(3 \frac{\text{litros}}{\text{min}}\right) \left(2 \frac{\text{kg}}{\text{litros}}\right) = 6 \text{ kg/min}$$

$$R_s = \left(3 \frac{\text{litros}}{\text{min}}\right) \left(\frac{A}{300} \text{ kg/litros}\right) = \frac{A}{100} \text{ kg/min} \quad (1)$$

$$v(t) = (r_e - r_s)t + V_0$$

V_0 Volumen inicial

La ecuación diferencial que se forma para el soluto puede resolverse usando el método del factor integrante (que se verá más adelante) o mediante separación de variables.

Si para el problema de mezcla descrito anteriormente, se supone que la solución salina del tanque sale a razón de 2 litor por minutos en lugar de tres litros por minuto. La diferencia entre la razón de flujo de entrada y salida es 1litros /min, de modo que el volumen del fluido en el tanque después de t minutos es (300+t) litros, por lo tanto la rapidez con la que sale el soluto del tanque es

$$R_s = r_e \frac{A(t)}{(r_e - r_s)t + V_0}$$

$$\frac{dA}{dt} = r_e C_e - r_e \frac{A(t)}{(r_e - r_s)t + V_0}$$

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{3A}{(300 + t)}$$

Trayectorias ortogonales

Un problema común en electrostática, termodinámica e hidrodinámica involucra encontrar una familia de curvas, cada una de las cuales es ortogonal a todos los miembros de una familia de curvas dada.

Por ejemplo, cada una de las circunferencias de la familia $x^2 + y^2 = C$, interseca a las rectas de familia $y = kx$, en ángulos rectos. Esas dos familias de curvas se dice que son mutuamente ortogonales, y cada curva en una de las familias se denomina como una trayectoria ortogonal de la otra familia. En electrostática, las líneas de fuerzas son ortogonales a las curvas equipotenciales. En termodinámica, el flujo de calor que atraviesa una superficie plana es ortogonal a las curvas isotérmicas. En hidrodinámica, las líneas de flujo (corriente) son trayectorias ortogonales a las curvas de potencial de velocidad.

Ejemplo

Describir las trayectorias ortogonales para la familia de curvas dada por $y = \frac{C}{x}$

Primero, hallamos la ecuación diferencial correspondiente a la familia dada.

Escribimos $yx = C$

Entonces, por derivación implícita con respecto a x, se obtiene la ecuación diferencial

$$y'x + y = 0 \rightarrow y' = -\frac{y}{x} \text{ Pendiente de familia dada.}$$

Dado que y' representa la pendiente de la familia de curvas dada en (x, y) , se deduce que la familia ortogonal tiene la pendiente recíproca negativa

$y' = \frac{x}{y}$ Pendiente de familia ortogonal. (Ecuación diferencial de la familia buscada)

Ahora se puede encontrar la familia ortogonal por separación de variables e integrando.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C \rightarrow y^2 - x^2 = 2C,$$

Por lo tanto $y^2 - x^2 = k$, es la familia de curvas ortogonales a la familia dada

Las trayectorias ortogonales son hipérbolas

Ecuaciones lineales de primer orden

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que pueden expresarse en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$

donde P y Q son funciones continuas en un intervalo I dado. Esta ecuación diferencial lineal de primer orden se dice que está en forma normal.

En la resolución de una EDO de primer orden, lineal podemos encontrar los casos siguientes:

a) $Q(x)=0$ **b)** $Q(x) \neq 0$

a) Si $Q(x)=0$, la ecuación lineal suele llamarse incompleta y puede resolverse separando variables.

b) Buscamos la solución de la ecuación utilizando un factor integrante.

Para resolver la EDO lineal de primer orden utilizamos un factor integrante $u(x)$, tal que al multiplicar ambos miembros de la ecuación (1) por el mismo, se transforme el miembro de la izquierda en la derivada del producto de $[u(x)y]$ respecto a x .

Se probará que la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ tiene un factor integrante, para ello lo vamos a calcular multiplicando ambos miembros por $u(x)$, entonces

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = u(x)Q(x)$$

Entonces deberá cumplirse

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = \frac{d[u(x)y]}{dx}$$

$$u(x) \frac{dy}{dx} + u(x)P(x)y = u(x)y' + yu'(x)$$

Cancelando términos tenemos:

$$u(x)P(x)y = yu'(x)$$

$$u(x)P(x) = u'(x)$$

$$P(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Integrando ambos miembros:

$$\ln|u(x)| = \int P(x)dx + C$$

$$u(x) = e^{\int P(x)dx + C}$$

$$u(x) = Ce^{\int P(x)dx}$$

Como no estamos interesados en el factor integrante más general hacemos $C = 1$

Multiplicando la ecuación (1) por el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$

$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)y = e^{\int P(x)dx} Q(x)$, se debía cumplir que el segundo miembro sea la derivada del producto de $u(x)y$ con respecto a x .

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = u(x)Q(x)$$

$$\text{Como } \frac{d[e^{\int P(x)dx} y]}{dx} = e^{\int P(x)dx} Q(x)$$

Integrando ambos miembros tenemos

$$e^{\int P(x)dx} y = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

La solución general es

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \right]$$

En lugar de memorizar la formula obtenida conviene recordar que al multiplicar la ecuación diferencial por el factor $e^{\int P(x)dx}$. Tenemos:

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = u(x)Q(x)$$

Ejemplo 1

Hallar la solución general de $xy' - 2y = x^2$

La forma canónica de la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$$y' - 2\frac{y}{x} = x$$

$$\text{Así } P(x) = -2/x \quad \text{y} \quad Q(x) = x$$

Hallamos el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$u(x) = e^{-2 \int (1/x)dx}$$

$$u(x) = e^{-2 \ln x} \rightarrow u(x) = e^{\ln x^{-2}} \rightarrow u(x) = \frac{1}{x^2}$$

Recordando que

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = u(x)Q(x)$$

$$\frac{d(\frac{y}{x^2})}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot x = \frac{1}{x}$$

Integrando ambos miembros tenemos

$$\frac{y}{x^2} = \int \frac{1}{x} dx \rightarrow y = x^2 [\ln|x| + C]$$

Ejemplo 2

Hallar la solución general de $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$

$$\text{Así } P(x) = -\frac{2}{x+1} \quad \text{y} \quad Q(x) = (x+1)^3$$

Hallamos el factor integrante $u(x) = e^{\int P(x)dx}$

$$u(x) = e^{-2 \int 1/(x+1)dx}$$

$$u(x) = e^{-2 \ln(x+1)} \rightarrow u(x) = e^{\ln(x+1)^{-2}} \rightarrow u(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Recordando que :

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = u(x)Q(x)$$

$$\frac{d[u(x)y]}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot (x+1)^3$$

$$\frac{d\left[\frac{y}{(x+1)^2}\right]}{dx} = (x+1)$$

Integrando ambos miembros tenemos

$$\frac{y}{(x+1)^2} = \int (x+1)dx \rightarrow \frac{y}{(x+1)^2} = \left[\frac{x^2}{2} + x + C \right]$$

$$\text{La solución es: } y = (x+1)^2 \left[\frac{x^2}{2} + x + C \right]$$

Ejemplo 3

Un acumulador de 12 volts se conecta a un circuito en serie RL ,con una inductancia de 0,5 Henry y una resistencia de 10 Omhs .Determinar la corriente I(t) si la corriente inicial es cero.

Planteamos la ecuación diferencial

Una de las leyes de Kirchoff establece que el voltaje que proporciona la fuente $E(t)$ es equivalente a la suma de las caídas de potencial en el circuito (en este debido a la resistencia y a la inductancia)

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

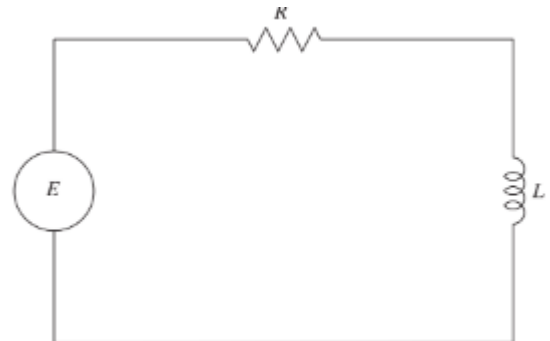
$$0,5 \frac{dI}{dt} + 10I = 12 \text{ EDO lineal}$$

Para resolver escribimos su forma canónica:

$$\frac{dI}{dt} + 20I = 24$$

$$P(t) = 20 \text{ y } Q(t) = 24 \rightarrow \text{el factor integrante es igual a } u = e^{\int 20dt}$$

$$u = e^{20t}$$



$$uI = \int 24 e^{20t} \rightarrow I = \frac{1}{e^{20t}} \left[\frac{6}{5} e^{20t} + C \right]$$

$$I(t) = \left[\frac{6}{5} + \frac{1}{e^{20t}} C \right]$$

$$\text{Para } t = 0, I(t) = 0$$

$$\left[\frac{6}{5} + \frac{1}{e^{20(0)}} C \right] = 0 \rightarrow C = -\frac{6}{5}$$

$$I(t) = \left[\frac{6}{5} - \frac{6}{5} e^{-20t} \right]$$

La ecuación de Bernoulli

La también conocida ecuación no lineal que reduce a una lineal con una apropiada sustitución, es la ecuación de Bernoulli, llamada así por James Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

Esta ecuación es lineal si $n = 0$, y es de variables separables si $n = 1$. Así, en el siguiente desarrollo se supone que $n \neq 0$ y $n \neq 1$

Para resolverla dividamos la ecuación (1) por y^n

$$\frac{dy}{dx} y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2)$$

Efectuemos ahora la siguiente sustitución: $z = y^{1-n}$

$$\text{Entonces } \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dz}{(1-n)dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo en la ecuación (2), obtendremos

$\frac{dz}{(1-n)dx} + P(x)z = Q(x)$ y si multiplicamos ambos miembros por $(1-n)$ tenemos la forma canónica de una ecuación lineal

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Al encontrar su solución general y sustituyendo z por su expresión $z = y^{1-n}$, obtenemos la integral general de la ecuación de Bernoulli

Ejemplo

Encuentre la solución general de $\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2 \quad (1)$

Dividimos la ecuación por y^2 y tenemos

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{y^2} \right) - y^{-1} = e^x \quad (2)$$

Hacemos la sustitución $z = y^{-1} \rightarrow$ derivando ambos miembros respecto de x

$$\frac{dz}{dx} = -1y^{-2} \frac{dy}{dx} \rightarrow -\frac{dz}{dx} = y^{-2} \frac{dy}{dx} \text{ sustituyendo en (2) tenemos}$$

$$-\frac{dz}{dx} - z = e^x \text{ multiplicando ambos miembros por } (-1)$$

$$\frac{dz}{dx} + z = -e^x \quad (3) \text{ EDO lineal en } z$$

Resolvemos (3)

$$P(x) = 1 \quad Q(x) = -e^x$$

Hallamos el factor integrante $u(x) = e^{\int p(x)dx} \rightarrow u(x) = e^{\int dx}$
 $u(x) = e^x \rightarrow$ Multiplicando la ecuación (3) por $u(x)$ tenemos que

$$\frac{d[u(x)z]}{dx} = Q(x)u(x)$$

$$\frac{d[u(x)z]}{dx} = -e^x e^x = -e^{2x}$$

Integrando ambos miembros

$$u(x)z = \int -e^{2x} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{2x} + C \right]$$

$$e^x z = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C \right]$$

$$z = e^{-x} \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C \right]$$

Volvemos a la variable original $z = y^{-1}$

$$y^{-1} = e^{-x} \left[\frac{1}{2}e^{2x} + C \right]$$

$$y = \frac{2e^x}{[e^{2x} + 2C]}$$

Ecuaciones diferenciales Exactas

Se trata de ecuaciones en la forma: $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$

Definición

La ecuación $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si existe una función $f(x; y)$, con derivadas parciales tales que

$$f_x(x; y) = M(x; y) \quad \text{y} \quad f_y(x; y) = N(x; y)$$

Toda solución general de una ecuación diferencial exacta está definida implícitamente por la ecuación $f(x; y) = C$

Para saber si una ecuación diferencial que tiene la forma: $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ es exacta debemos recurrir al criterio de Exactitud

Criterio de Exactitud

Suponiendo que $M(x; y)$ y $N(x; y)$ tienen derivadas parciales en un entorno abierto R , la ecuación diferencial $M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$ es exacta si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Ejemplo

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$$

Verificamos si la ecuación es exacta

$$M(x; y) = 2xy \quad N(x; y) = (x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

Se verifica el criterio de exactitud

Veamos ahora como hallar la función f , para ello partimos de

$$f_x(x; y) = M(x; y) = 2xy$$

$$f_x(x; y) = 2xy \rightarrow f(x; y) = \int 2xy dx = x^2 y + g(y) \quad (1)$$

Al integrar con respecto a x , la y se mantiene constante, por lo que la constante de integración se puede considerar como una función de y .

$$\text{Derivando (1) con respecto a } y \text{ tenemos } f_y(x; y) = x^2 + g'(y)$$

Pero $f_y(x; y) = N(x; y) \rightarrow$ igualando tenemos

$x^2 + g'(y) = x^2 - 1 \rightarrow g'(y) = -1$, entonces como necesitamos hallar $g(y)$, integramos $g'(y) = -1$, con respecto a y

$$g(y) = - \int dy = -y + C$$

Por lo tanto la función que es solución de la ecuación diferencial exacta dada es

$$f(x; y) = x^2 y + g(y) \rightarrow f(x; y) = x^2 y - y + C$$

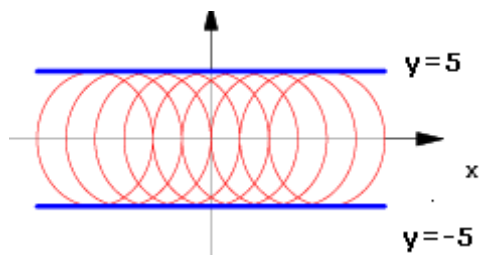
Luego la solución general está definida implícitamente por la ecuación $x^2 y - y + C$

Soluciones Singulares -Envolvente

Ilustremos lo que es una solución singular por medio del siguiente ejemplo.

Consideremos la familia de circunferencias representadas por la ecuación $(x - c)^2 + y^2 = 25$

Estas circunferencias tienen sus centros sobre la recta $y = 0$ siendo las rectas $y = 5$ e $y = -5$ tangentes a todas ellas.



Buscamos la ecuación diferencial que tiene por solución general la familia de curvas dadas.

Derivando en forma implícita ambos miembros de la ecuación obtenemos

$$-2(x - c) + 2yy' = 0 \rightarrow yy' = (x - c) \text{ elevando ambos miembros al cuadrado}$$

$$(yy')^2 = (x - c)^2$$

Reemplazando en la ecuación

$$(yy')^2 + y^2 = 25$$

Cualquier solución particular de esta E.D. es una circunferencia de radio 5, cuyo centro está sobre el eje x .

Por ejemplo:

$$\text{Si } C=0 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$\text{Si } C=2 \rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 25$$

$$\text{Si } C=-3 \rightarrow (x+3)^2 + y^2 = 25$$

Sin embargo podemos comprobar que, las rectas $y = 5$ e $y = -5$ no son soluciones particulares y verifican la ecuación diferencial.

$$\text{Si } y = 5 \rightarrow y' = 0, \text{ reemplazando en la ED } (yy')^2 + y^2 = 25$$

$$(5 \cdot 0)^2 + (5)^2 = 25; \text{ verifica la ecuación.}$$

Lo mismo sucede con $y = -5$

Cualquier solución de una E.D. que no esté incluida en la solución general es llamada solución singular. La curva correspondiente (en el ejemplo anterior las rectas $y = 5$ e $y = -5$) es llamada envolvente de la familia.

Definición

Solución singular

Una solución de una ecuación diferencial se llama singular si no se puede obtener de la solución general al sustituir las constantes por valores, es decir, no es una solución particular.

Envolvente

Dada una familia de curvas, puede darse el caso que exista una curva llamada envolvente que en cada uno de sus puntos sea tangente a una de las curvas de la familia. Cada curva de la familia se llama involuta. Las envolventes de una familia de funciones, si existen son solución singular de la EDD. Queda claro que puede haber otras soluciones singulares que no son envolventes.

En resumen se llama envolvente a una familia de funciones que dependen de un solo parámetro a : Cualquier curva tangente a un número infinito de miembros de una familia de curvas, y que es tangente en cada uno de sus puntos, por lo menos a una de dichas curvas.

Teorema

Si una curva es envolvente de una familia de curvas $f(x; y; c) = 0$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x; y; c) = 0 \\ f_c(x; y; c) = 0 \end{cases}$$

lo cual nos permite hallarla

Ejemplo 1

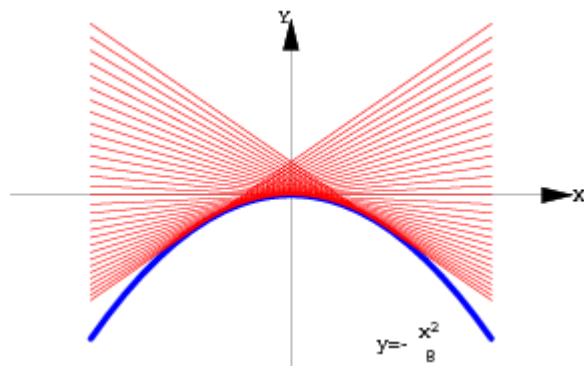
Hallar la envoltura de la familia de rectas $y = cx + 2c^2$ que es la solución general de la ecuación diferencial $y = xy' + 2(y')^2$.

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = cx + 2c^2 & (1) \\ x + 4c = 0 & (2) \end{cases}$$

Reemplazamos $x = -4c$ en (1)

$y = -\frac{x}{4}x + 2\left(\frac{x}{4}\right)^2 \rightarrow y = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{8}$ por lo tanto $y = -\frac{x^2}{8}$ es una solución singular de la ecuación diferencial y constituye la envoltura de la familia de rectas que es solución general, como se puede apreciar en la figura.

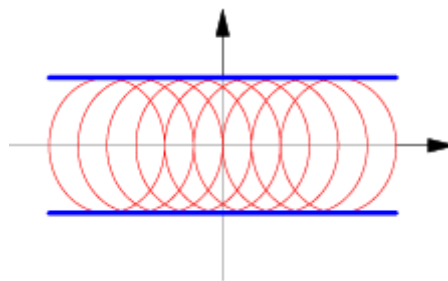


Ejemplo 2

Hallar la envoltura de la familia de circunferencias $(x - c)^2 + y^2 = 1$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} (x - c)^2 + y^2 = 1 \\ -2(x - c) = 0 \end{cases}$$



Obteniendo que $x = c$. Al sustituir en la ecuación de la familia obtenemos que la envoltura está formada por las rectas $y = \pm 1$.

Ejemplo 3

La familia de parábolas $y^2 = 2cx - c^2$, es la solución general de la ecuación diferencial $y = 2xy' - y(y')^2$. Hallar las soluciones singulares.

Resolvemos el sistema:

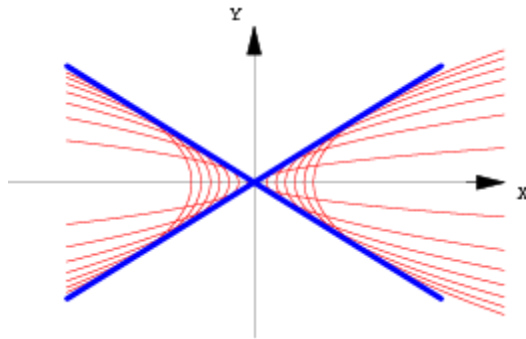
$$\begin{cases} y^2 = 2cx - c^2 & (1) \\ 2x = 2c & (2) \end{cases}$$

Entonces de (2) $x = c$ y sustituyendo en (1) tenemos que :
 $y^2 = 2x^2 - x^2 \rightarrow y^2 = x^2$

Por lo tanto tenemos que las rectas $y = \pm x$ son soluciones singulares.

En la figura se muestran las soluciones singulares y varias soluciones particulares.

Las rectas $y = \pm x$ son la envolvente de la familia de parábolas.



Ecuación Diferencial de Clairaut

La ecuación diferencial de Clairaut, así llamada en honor a su inventor, el físico Alexis Claude Clairaut, es una EDO de la forma:

$$y(x) = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Para resolver la ecuación diferenciamos respecto a x, quedando:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + x \frac{d^2y}{dx^2} + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2y}{dx^2}$$

Cancelando y sacando factor común tenemos:

$$0 = \frac{d^2y}{dx^2} \left[x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) \right]$$

$$\text{Y así } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = C \quad \text{o} \quad x + f'\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

En el primer caso tenemos que $\frac{dy}{dx} = C$ tenemos la familia de funciones dadas por:

$y(x) = Cx + f(C)$, que constituye la solución general de la ecuación de Clairaut.

La otra expresión coincide con la derivada de la solución general y define solo una solución $y(x)$, que es la llamada solución singular, cuyo grafico es envolvente de las graficas de las soluciones generales, como vimos en el tema tratado anteriormente

El interés que presenta este tipo de ecuación se debe al hecho de que tiene como solución a una familia de rectas. Además, la envolvente, es decir, la curva cuyas tangentes están dadas por la familia, también es solución, en este caso una solución singular, de la ecuación de Clairaut. Ésta fue una de las primeras ocasiones en la historia en que este tipo de solución (la solución singular) se puso de relieve.

Para hallar la solución singular resolvemos entonces:

$$\begin{cases} f(x; y; c) = 0 \\ f_c(x; y; c) = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Hallar las soluciones de la ecuación diferencial

$$y = xy' + (y')^2$$

Haciendo $y' = C$ tenemos la solución general

$$y = Cx + (C)^2 \text{ Solución general}$$

Para hallar la solución singular

$$\frac{dy}{dC} = x + 2C = 0 \rightarrow x = -2C \rightarrow C = -\frac{x}{2} \text{ reemplazando en la solución general tenemos}$$

$$y = \left(-\frac{x}{2}\right)x + \left(-\frac{x}{2}\right)^2$$

$$y = \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$$

$$y = -\frac{x^2}{4} \text{ Solución Singular}$$

Ejemplo 2

Hallar las soluciones de la ecuación diferencial

$$xy' = y + e^{y'}$$

Haciendo $y' = C$

$$Cx = y + e^C \rightarrow y = Cx - e^C \text{ solución general}$$

Para hallar la solución singular derivamos respecto de C

$$\frac{dy}{dC} = x - e^C = 0 \rightarrow x = e^C \rightarrow \ln x = C$$

reemplazando en la solución general tenemos

$$y = x \ln x - e^{\ln x} \rightarrow y = x \ln x - x \text{ Solución Singular}$$

