Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n (siendo n≥ 2) ,son aquellas que tienen la forma

$a_0(x)y(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y''(x) + \cdots + a_n(x)y^{(n)}(x) = G(x)$ (1)

Donde $a_0(x)$; $a(x)_{1;}$ $a_2(x)$;……….. y $a_n(x)$ son funciones continuas en un intervalo I y $a_n(x) \neq 0$ en I

Si $G(x) \neq 0$ en *I,* se dice que la ecuación es lineal no homogénea.
Si $G(x) = 0$ en *I,* se dice que la ecuación es lineal homogénea.

Si las funciones $a_0(x)$; $a(x)_{1;}$ $a_2(x)$;……….. y $a_n(x)$ son constantes la ecuación diferencial lineal es a coeficientes constantes, si son variables se tiene una ecuación diferencial a coeficientes variables.

Los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales de orden mayor a 1 son muy complicados, debiéndose emplear en la mayoría de los casos métodos numéricos, salvo casos especiales. Nosotros solo veremos en este curso las ecuaciones de coeficientes constantes.
Particularmente veremos métodos para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, lo que luego vamos a hacer extensivo para las ED de mayor orden.

Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene la forma:

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$ (1)

Donde $P(x)$; $Q(x)$ y $R(x)$ son funciones continuas.

Comenzaremos estudiando primero el caso cuando $G(x) = 0$, estas ecuaciones de acuerdo a lo visto anteriormente se llaman homogéneas.

La forma de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden es:

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ (2)

Dos hechos básicos nos permiten resolver las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, los cuales veremos en los siguientes teoremas que no vamos a demostrar, en este curso.

Teorema 1
Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$, son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2) y C_1 y C_2 son dos constantes, entonces la función:
$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, es también solución de la ecuación (2)

Ahora bien el teorema anterior nos dice que la combinación de dos soluciones también es solución de la ecuación (2), pero no afirma que esta sea la solución general. Lo que necesitamos para ello es lo que nos proporciona el teorema 2 que veremos a continuación.

Nota
Antes recordaremos lo siguiente:
Dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes si ni y_1, ni y_2 son múltiplos constantes entre sí.

Por ejemplo
$f(x) = e^x$ y $g(x) = 5e^x$, son linealmente dependientes porque:$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{5e^x} = \frac{1}{5}$

$f(x) = e^x$ y $g(x) = xe^x$, son linealmente independientes porque:$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{xe^x} = \frac{1}{x}$

$f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$, son linealmente independientes porque :$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{senx}{cosx} = tagx$

Teorema 2
Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$, son soluciones linealmente independientes de la ecuación lineal homogénea (2) entonces la solución general está dada por
$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$,
Donde C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias.

Como ya dijimos antes solo veremos métodos para resolver ecuaciones lineales de coeficientes constantes.
Por lo tanto en el caso de la ecuación (2), vamos a hacerlo si $P(x); Q(x)\ y\ R(x)$ son constantes, es decir tiene la forma:

$ay'' + by' + cy = 0$ (3)
Donde $a, b\ y\ c$, son constantes.

Para buscar las soluciones particulares $y_1(x)$ e $y_2(x)$, sugeridas en el teorema 2, usaremos el recurso muy común del "ensayo y error", que en otras palabras significa, proponer una solución elegida, ya sea azarosamente o con algún criterio intuitivo y aceptarla o descartarla, según se verifique o no la ecuación.

Dado que se buscan funciones tales que, una combinación lineal de sus derivadas se anule , es bastante lógico pensar que la misma debe tener la particularidad de que sus derivadas se parezcan entre si y a ella misma.
Una función que califica es: $y = e^{rx}$
Así $y' = re^{rx}$; $y'' = r^2 e^{rx}$
Reemplazando estas expresiones en la ecuación (3)

$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$
Sacamos factor común e^{rx}
$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$
Pero e^{rx}, nunca es cero por lo tanto $y = e^{rx}$, es solución de de la ecuación (3), si r es una raíz de la ecuación $ar^2 + br + c$ (4)

La ecuación (4) se llama ecuación característica o ecuación auxiliar de la ecuación homogénea
$ay'' + by' + cy = 0$

De acuerdo a lo analizado y concluido anteriormente estamos ahora en condiciones de enunciar el siguiente teorema

Teorema de la Ecuación Característica
Si $y = e^{rx}$ es solución de $ay'' + by' + cy = 0$, entonces $\boldsymbol{r}$ es solución de la ecuación
$ar^2 + br + c$

Observemos que la ecuación característica es una ecuación algebraica que se obtiene reemplazando y'' por r^2 ; y'por r e y por 1.

Las raíces r_1 y $r_2$de la ecuación característica pueden encontrase mediante una factorización, en otros casos utilizando la resolvente.

Distinguimos tres casos, de acuerdo al signo del discriminante:$b^2 - 4ac$.

1) Las raíces r_1 y r_2 son reales y distintas
$b^2 - 4ac > 0$
Entonces las funciones $y_1 = e^{r_1 x}$ y $y_2 = e^{r_2 x}$son dos soluciones linealmente independientes, ($e^{r_1 x}$ no es múltiplo de $e^{r_2 x}$) luego la solución general será de acuerdo al teorema (2)

$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

Ejemplo 1
Resolver la ecuación diferencial
$y'' - 3y' + 2y = 0$

Escribimos la ecuación característica
Reemplazamos y'' por r^2 ; y'por r e y por 1.

La ecuación característica es $r^2 - 3r + 2 = 0$

Hallamos las raíces
Sus raíces son r_1 =2 y r_2 =1entonces las funciones $y_1 = e^{2x}$ y $y_2 = e^x$ son dos soluciones linealmente independientes,
Escribimos la solución general
La solución general será:

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias

2) Las raíces r_1 y r_2 son reales e iguales ($r_1 = r_2 = r$)
$b^2 - 4ac = 0$

En este caso $r_1 = r_2 = r = -\frac{b}{2a}$
Entonces $y_1 = e^{rx}$ es solución de la ecuación (4), el teorema de la ecuación característica solo aporta una de las soluciones. Se debe probar que bajo estas condiciones $y_2 = xe^{rx}$, es también solución (solución propuesta)
Vamos a probar que esta es la segunda solución:
Derivando $y_2 = xe^{rx}$ enemos:

$y_2{}' = e^{rx} + xre^{rx}$

$y_2{}'' = re^{rx} + re^{rx} + xr^2 e^{rx}$= $2re^{rx} + xr^2 e^{rx}$
Reemplazando en $ay'' + by' + cy = 0$ (3)

$a(2re^{rx} + xr^2 e^{rx}) + b(e^{rx} + xre^{rx}) + cxe^{rx} = 0$

$e^{rx}[(2ar + b) + (ar^2 + br + c)x]$

El primer termino $2ar + b = 0$ porque $r = -\frac{b}{2a}$
El segundo termino $ar^2 + br + c = 0$ porque r es raiz de la ecuacion caracteristica.
Se puede probar que $y_1 = e^{rx}$ e $y_2 = xe^{rx}$ son linealmente independiente por lo que
La solucion general será:

$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Ejemplo:
Resolver la ecuación diferencial
$y'' - 6y' + 9y = 0$

Escribimos la ecuación característica
$r^2 - 6r + 9 = 0$

La ecuación tiene dos raíces reales e iguales $r_1 = r_2 = r = 3$

Entonces: $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = xe^{3x}$ son dos soluciones linealmente independientes, luego la solución general será

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

3) Las raíces r_1 y r_2 son complejas
$b^2 - 4ac < 0$

Las raíces $r_1 y$ r_2 son números complejos conjugados, es decir
$r_1 = \alpha + \beta i$ y $r_2 = \alpha - \beta i$, vemos que $r_1 \neq r_2$, luego el teorema de la ecuación característica aporta las dos soluciones linealmente independientes

Estas son
$y_1 = e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $y_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}$, dos soluciones complejas de la ecuación diferencial
Así la solución general puede escribirse como
$y = Ae^{(\alpha+\beta i)x} + Be^{(\alpha-\beta i)x}$
Estas dos soluciones complejas pueden ser sustituidas por dos soluciones reales.

Veamos esto:
Primero recordamos que por la formula de Euler la forma exponencial de un numero complejo
Puede escribirse
$e^{\beta ix} = cos\beta x + isen\beta x$ y $e^{-\beta ix} = cos\beta x - isen\beta x$

Reescribimos la solución general
$y = Ae^{\alpha x} e^{\beta ix} + Be^{\alpha x} e^{-\beta ix} = Ae^{\alpha x} (cos\beta x + isen\beta x) + Be^{\alpha x} (cos\beta x - isen\beta x) =$
$= e^{\alpha x} [(\mathrm{A} + \mathrm{B})\cos\beta\mathrm{x} + \mathrm{i}(\mathrm{A} - \mathrm{B})\mathrm{sen}\beta\mathrm{x}] = e^{\alpha x} [C_1 \cos\beta\mathrm{x} + C_2 \mathrm{sen}\beta\mathrm{x}]$
Donde $C_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ y $C_2 = \mathrm{i}(\mathrm{A} - \mathrm{B})$

Entonces la expresión
$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos\beta\mathrm{x} + C_2 \mathrm{sen}\beta\mathrm{x}]$ da las soluciones reales o complejas de la ecuación diferencial, aunque a nosotros nos interesan coeficientes que arrojan valores C_1 y C_2 reales
Se puede observar que
$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta\mathrm{x}$ y $y_2 = e^{\alpha x} \mathrm{sen}\beta\mathrm{x}$, son dos funciones linealmente independientes

Ejemplo3
Resolver la ecuación diferencial *y*''+ 4 *y* '+5 *y* = 0

La ecuación característica es
$r^2 + 4r + 5 = 0$
Las raíces son $r_1 = -2 + i$ y $r_2 = -2 - i$
$\alpha = -2$ y $\beta = 1$

Entonces por lo visto anteriormente la solución general es:
$y = e^{-2x} [C_1 \cos\mathrm{x} + C_2 \mathrm{sen}\mathrm{x}]$

El siguiente teorema resume lo visto anteriormente

Teorema 3

Sea $ay'' + by' + cy = 0$, una ecuación diferencial línea de segundo orden homogénea y de coeficientes constantes y $ar^2 + br + c$ =0 su ecuación característica y $r_1 y\ r_2$, raíces de esta ultima ecuación entonces:

a) Si $r_1 y\ r_2$ son dos raíces reales distintas → $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$

b) Si $r_1 y\ r_2$ son dos raíces reales iguales → $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx}$

c) Si $r_1 y\ r_2$ son dos raíces complejas conjugadas → $y = C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sen\beta x$

El teorema anterior puede generalizarse para una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes

Teorema 4

Sea la ecuación:

$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ \dots .+a_2y'' + a_1y' + \ a_0y = 0$ y su ecuación característica

$$a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ \dots .+a_2r^2 + a_1r + \ a_0 = 0$$

La solución general tendrá n términos que se determinaran de con las siguientes reglas

a) Por cada raíz real simple r de la ecuación característica la solución general tendrá un sumando de la forma Ce^{rx}

b) Por cada raíz real r de multiplicidad k de la ecuación característica la solución general tendrá k sumandos de la forma $C_ix^me^{rx}$, donde m=0,1, 2…..k-1

c) Por cada par de raíces complejas conjugadas $\alpha \mp \beta i$, de la ecuación característica la solución general tendrá dos sumandos $C_1e^{\alpha x}cos\beta x + C_2e^{\alpha x}sen\beta x$

c) Por cada par de raíces complejas múltiples $\alpha \mp \beta i$, de multiplicidad k, de la ecuación característica, la solución general tendrá 2k sumandos del tipo $x^me^{\alpha x}[C_1cos\beta x + C_2sen\beta x]$ con m=0,1, 2…..k-1

Ejemplo 4

Hallar la solución general de:

$4y''' - y' = 0$

Escribimos la ecuación característica

$4r^3 - r = 0$

Hallamos sus raíces

Factorizamos

$r(4r^2 - 1) = 0$ →Las raíces son: $r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{1}{2}$ y $r_3 = -\frac{1}{2}$

Las raíces son reales y simples

La solución general es:

$$y = C_1e^{0x} + C_2e^{\frac{1}{2}x} + C_3e^{-\frac{1}{2}x} = C_1 + C_2e^{\frac{1}{2}x} + C_3e^{-\frac{1}{2}x}$$

Ejemplo 5
Resolver:
$y^{(4)} - 2\mathrm{y}^{(3)} + 2\mathrm{y}^{(1)} - \mathrm{y} = 0$

Escribimos la ecuación característica
$r^4 - 2\mathrm{r}^3 + 2\mathrm{r} - 1 = 0$
Se calculan las raíces y tenemos $r_1 = 1$ $r_2 = 1$ y $r_3 = 1$ $r_4 = -1$
Tenemos tres raíces reales múltiples $r = 1$ (multiplicidad k=3) que da lugar a tres soluciones particulares , y una raíz real simple $r = -1$, que origina una solución particular.
La solución general es

$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + C_4 e^{-x}$

Ejemplo 6
Resolver:
$y''' + y'$ =0

Escribimos la ecuación característica
$r^3 + r = 0$
Hallamos sus raíces
Factorizamos
$r(r^2 + 1) = 0$
Las raíces son: Una raíz real $r_1 = 0$ y dos raíces complejas conjugadas $r_2 = 1i$ y $r_3 = -1i$
La solución general es:

$y = C_1 e^{ox} + e^{0x}(C_2 cosx + C_3 senx) = C_1 + C_2 cosx + C_3 senx$

Ejemplo 7
Resolver:
$y'''' + 6y'' + 9y = 0$

La ecuación característica es:
$r^4 + 6\mathrm{r}^2 + 9 = 0$
Al factorizarlo lo podemos expresar como
$r^4 + 6\mathrm{r}^2 + 9 = (\mathrm{r}^2 + 3)^2 = 0 \rightarrow (\mathrm{r}^2 + 3)^2 = (\mathrm{r}^2 + 3)(\mathrm{r}^2 + 3)$
Las raíces son el par de raíces complejas $\mp\sqrt{3}i$ de multiplicidad 2
$r_1 = \sqrt{3}i;$ $r_2 = -\sqrt{3}i;$ $r_3 = \sqrt{3}i;$ $r_4 = -\sqrt{3}i$

Luego la solución es
$y = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 sen\left(\sqrt{3}x\right) + C_3 xcos(\sqrt{3}x) + C_4 xsen(\sqrt{3}x)$

Ecuaciones lineales No homogéneas

Ahora vamos a aprender a resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes., es decir ecuaciones de la forma

$ay'' + by' + cy = G(x)$ (1)

Donde a, b y c son constantes y G(x) es una función continua.
La ecuación diferencial homogénea asociada

$ay'' + by' + cy = 0$ (2)

Se llama ecuación complementaria y desempeña un papel importante en la solución de la ecuación no homogénea original.
El siguiente teorema muestra que para determinar todas las soluciones de una EDO Lineal no homogénea ya sea de coeficientes constantes como variables solamente se necesita hallar una solución de ella y la solución general de su homogénea asociada (ecuación complementaria).

Teorema 1
La solución general de la ecuación diferencial lineal no homogénea puede expresarse como:

$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$
Donde $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea (1) y $y_c(x)$ es la solución general de la ecuación complementaria (2)

Ya sabemos la forma de resolver la ecuación complementaria.
Recordamos que $y_c(x) = y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes. Nuestro problema ahora se reduce a hallar una solución particular de la ecuación (1)
Para hallar la solución particular podemos utilizar dos métodos: el método de variación de los parámetros o el método de los coeficientes indeterminados.

Coeficientes Indeterminados

La idea básica de este método consiste en una conjetura o propuesta coherente acerca de la forma de $y_p(x)$, originada por los tipos de funciones que forman el dato G(x).
Este método es directo pero solo es útil para una clase restringidas de funciones G(x):
G(x) debe ser una función polinomica, una función exponencial e^{ox}, funciones seno, coseno como $cos\beta x$, $sen\beta x$ o sumas y productos finitos de estas funciones

Ejemplo 1
Resuelve la ecuación
$y'' + y' - 2y = x^2$

Hallamos $y_c(x)$
Escribimos la ecuación característica
$r^2 + r - 2 = 0$
Las raíces son $r_1 = -2$ y $r_2 = 1$
La solución y_c es:

$$y_c(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$$

Como G(x)=x^2 es un polinomio de grado 2, buscamos una solución particular de la forma
$y_p(x) = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}$
$y'_p(x) = 2Ax + B$
$y''_p(x) = 2A$
Sustituimos las derivadas en la ecuación diferencial dad.
$y'' + y' - 2y = x^2$
$2A + 2Ax + B - 2(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{Bx} + \mathrm{C}) = x^2$
Asociamos los términos de igual grado
$-2\mathrm{A}x^2 + (2\mathrm{A} - 2\mathrm{B})\mathrm{x} + (2\mathrm{A} + \mathrm{B} - 2\mathrm{C}) = x^2$
Los polinomios son iguales cuando los coeficientes son iguales, por lo tanto tenemos
$-2\mathrm{A} = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$
$2\mathrm{A} - 2\mathrm{B} = 0 \rightarrow \mathrm{A} = \mathrm{B}$ por lo tanto $B = -\frac{1}{2}$
$2\mathrm{A} + \mathrm{B} - 2\mathrm{C} = 0 \rightarrow -1 - \frac{1}{2} - 2\mathrm{C} = 0$; $-\frac{3}{2} - 2\mathrm{C} = 0$; $-2\mathrm{C} = \frac{3}{2}$ por lo tanto $C = -\frac{3}{4}$
Una solución particular es
$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{3}{4}$$
La solución general es

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\mathrm{x} - \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2
Resuelve la ecuación
$y'' + 4y = e^{2x}$

Hallamos $y_c(x)$
Escribimos la ecuación característica
$r^2 + 4 = 0$
Las raíces son $r_1 = -2\mathrm{i}$ y $r_2 = 2\mathrm{i}$
La solución y_c es:

$$y_c(x) = C_1 cos2x + C_2 sen2x$$

Como $G(x) = e^{3x}$, buscamos una solución particular de la forma $y_p(x) = \mathrm{A}e^{3x}$
Entonces tenemos
$y'_p(x) = 3Ae^{3x}$
$y''_p(x) = 9Ae^{3x}$
Sustituimos en la ecuación dada:
$y'' + 4y = e^{3x}$
$9Ae^{3x} + \ 4\mathrm{A}e^{3x} = e^{3x}$
$13Ae^{3x} = e^{3x} \rightarrow A = \frac{1}{13}$
Luego entonces una solución particular es
$$y_p(x) = \frac{1}{13}e^{3x}$$

La solución general es:

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$$

$$y(x) = C_1cos2x \ + C_2sen2x + \frac{1}{13}e^{3x}$$

Ejemplo 3
Resuelve
$y'' - y = cosx$

Hallamos $y_c(x)$
Escribimos la ecuación característica
$r^2 - 1 = 0$
Las raíces son r_1 =1 y $\mathrm{r}_2 = -1$
La solución y_c es:
$y_c(x) = C_1e^{-x} \ + C_2e^x$

Como $G(x) = cosx$, buscamos una solución particular de la forma $y_p(x) = \mathrm{A}senx + Bcosx$
$y'_p(x) = \mathrm{A}cosx - Bsenx$
$y''_p(x) = -\mathrm{A}senx - Bcosx$
Reemplazando en:
$y'' - y = cosx$
$-\mathrm{A}senx - Bcosx - \mathrm{A}senx - Bcosx = cosx$
$-2\mathrm{A}senx - 2Bcos = cosx$
De esta ecuación deducimos que
$-2\mathrm{A}senx = 0 \rightarrow A = 0$
$-2Bcos = cosx \rightarrow -2B = 1$ por lo tanto $B = -\frac{1}{2}$
La solución particular es
$y_p(x) = \mathrm{A}senx + Bcosx$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}cosx$

La solución general es
$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$

$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x - \frac{1}{2}cosx$

Ejemplo 4
Resuelve la ecuación
$y'' - 4y = xe^x + cos2x$

Hallamos $y_c(x)$
Escribimos la ecuación característica
$r^2 - 4 = 0$
Las raíces son r_1 =2 y $\mathrm{r}_2 = -2$
La solución y_c es:
$y_c(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$

Como $G(x) = xe^x + cos2x$
Para cada término proponemos una solución particular
$y_{p1}(x) = (\mathrm{A}x{+}B)e^x$
Trabajamos con esta solución particular primero
$y'_{p1}(x) = \mathrm{A}e^x + (\mathrm{A}x{+}B)e^x$
$y''_{p1}(x) = \mathrm{A}e^x + \mathrm{A}e^x + (\mathrm{A}x{+}B)e^x$
$y''_{p1}(x) = (2\mathrm{A} + \mathrm{B})e^x + \mathrm{Ax}e^x$
Sustituyendo en la ecuación
$y'' - 4y = xe^x$ tenemos que:
$(2\mathrm{A} + \mathrm{B})e^x + \mathrm{Ax}e^x - 4(\mathrm{A}x{+}B)e^x = xe^x$
Asociando
$(2\mathrm{A} - 3\mathrm{B})e^x - 3\mathrm{Ax}e^x = xe^x$
De aca deducimos que
$-3\mathrm{Ax}e^x = xe^x \rightarrow -3\mathrm{A} = 1$ por lo tanto $A = -\frac{1}{3}$
$2\mathrm{A} - 3\mathrm{B} = 0 \rightarrow 2A = 3B,\ \ B = \frac{2}{3}\mathrm{A} \text{-}\rightarrow B = -\frac{2}{9}$
$y_{p1}(x) = (\mathrm{A}x{+}B)e^x$
$y_{p1}(x) = (-\frac{1}{3}x{-}\frac{2}{9})e^x$
Proponemos ahora la solución particular para el segundo término

$y_{p2}(x) = \mathrm{Ccos2x + Dsen2x}$
$y'_{p2}(x) = -2\mathrm{Csen2x} + 2\mathrm{Dcos2x}$
$y''_{p2}(x) = -4\mathrm{Ccos2x} - 4\mathrm{Dsen2x}$

Sustituyendo en la ecuación $y'' - 4y = cos2x$

$-4\mathrm{Ccos2x} - 4\mathrm{Dsen2x} - 4(\mathrm{Ccos2x} + \mathrm{Dsen2x}) = \mathrm{cos2x}$
Asociando
$-8\mathrm{Ccos2x} = \mathrm{cos2x} \rightarrow -8C = 1$ por lo tanto $C = -\frac{1}{8}$
$-8\mathrm{Dsen2x} = 0 \rightarrow D = 0$
$y_{p2}(x) = \mathrm{Ccos2x} + \mathrm{Dsen2x}$
$y_{p2}(x) = -\frac{1}{8}\mathrm{cos2x}$
La solución general es

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{9})e^x - \frac{1}{8}\mathrm{cos2x}$$

Nota
En este método es neurálgico conocer la solución complementaria, porque a veces puede ocurrir que la solución particular que se recomienda sea una solución de esta ecuación y no pueda ser una solución de la no homogénea, cuando esto ocurre decimos que hay un solapamiento.
En tales casos multiplicamos la solución propuesta por la mayor potencia de x que elimina el solapamiento.

Ejemplo 5
Propone (no resolver) una solución particular para la siguiente EDO
$y'' + y = senx$

Escribimos la ecuación característica
$r^2 + 1 = 0$
Las raíces son r_1 =$1i$ y $\mathrm{r}_2 = -1\mathrm{i}$
La solución general es:
$y_c(x) = C_1cosx + C_2senx$
Como $G(x) = cosx$, buscamos una solución particular de la forma $y_p(x) = \mathrm{A}senx + Bcosx$
En este caso observamos que la solución propuesta es solución de la ecuación complementaria, es decir hay solapamiento, así que en su lugar proponemos

$$y_p(x) = \mathrm{Ax}senx + Bxcosx$$

Ejemplo 6
Propone (no resolver) una solución particular para la siguiente EDO
$y''' - y'' = 4x$

Escribimos la ecuación característica
$r^3 - r^2 = 0$
$r^2(r - 1) = 0$

Las raíces son r_1 =1 , $\mathrm{r}_2 = 0$ y $\mathrm{r}_3 = 0$
La solución de la ecuación complementaria es:
$y_c(x) = C_1e^x + C_2e^{0x} + C_3xe^{0x}$
$y_c(x) = C_1e^x + C_2 + C_3x$
Como $G(x) = 4\mathrm{x}$ ptoponemos $y_p(x) = \mathrm{Ax} + \mathrm{B}$

Sin embargo podemos observar que esta propuesta solapa con parte de la solución $y_c(x)$, el solapamiento se da con los dos últimos términos.

Si multiplico $y_p(x) = \mathrm{Ax} + \mathrm{B}$ por x tendríamos $y_p(x) = \mathrm{Ax}^2 + \mathrm{Bx}$

Seguiría solapando Bx con C_3x, por lo tanto vamos a multiplicar la solución particular propuesta por x^2 y tenemos

$y_p(x) = \mathrm{Ax}^3 + \mathrm{Bx}^2$

Ejemplo 7

Propone (no resolver) una solución particular para la siguiente EDO
$y''' - 4y' = \mathrm{x}^2 + \mathrm{xsen(2x)}$

Escribimos la ecuación característica
$r^3 - 4r = 0$
$r(r^2 - 1) = 0$
Las raíces son r_1 =1 , $\mathrm{r}_2 = -1$ y $\mathrm{r}_3 = 0$
La solución de la ecuación complementaria es:
$y_c(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{0x}$
$y_c(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3$
Proponemos una solución para cada término del segundo miembro
Si G(x)=x^2

$y_{p1}(x) = A\mathrm{x}^2 + Bx + C$, tenemos solapamiento con C_3 por lo tanto vamos a proponer

$y_{p1}(x) = A\mathrm{x}^3 + B\mathrm{x}^2 + Cx$

Si $G(x) = xsen(2x)$

$y_{p2}(x) = (\mathrm{Dx} + \mathrm{E})\mathrm{cos2x} + (\mathrm{Fx} + \mathrm{H})\mathrm{sen2x}$
No existe solapamiento por lo tanto tenemos
$y_p(x) = A\mathrm{x}^3 + B\mathrm{x}^2 + Cx + (\mathrm{Dx} + \mathrm{E})\mathrm{cos2x} + (\mathrm{Fx} + \mathrm{H})\mathrm{sen2x}$

Método de variación de los parámetros

Sea la ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes

$ay'' + by' + cy = G(x)$ y su ecuación diferencial homogénea asociada $ay'' + by' + cy = 0$

Supongamos que ya hemos resuelto $ay´´ + by´ + cy = 0$ y que hemos expresado su solución como
$y_c(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$
donde $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son soluciones linealmente independientes.

El método consiste en reemplazar las constantes C_1 y C_2 por funciones $u_1(x)$ *y* $u_2(x)$., y buscar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $ay´´ + by´ + cy = G(x)$ de la forma
$y_p(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x)$
Este método se llama variación de parámetros porque hemos variado los parámetros C_1 y C_2 para hacerlos funciones
Hallamos la derivada de $y_p(x)$
$y_p´(x) = u_1´y_1 + u_1 y_1´ + u_2´y_2 + u_2 y_2´$

A los efectos de simplificar los cálculos Imponemos la condición de que $u_1´y_1 + u_2´y_2 = 0$, (1)
Así tendremos entonces
$y_p´(x) = u_1 y_1´ + u_2 y_2´$
Hallamos
$y_p´´(x) = u_1´y_1´ + u_1 y_1´´ + u_2´y_2´ + u_2 y_2´´$
$y_p(x)$ Sera la solución particular de la EDO $ay´´ + by´ + cy = G(x)$, si la verifica

Reemplazando $y.\, y´\ e\ y´´$ en la ecuación diferencial no homogénea, resulta
$a(u_1´y_1´ + u_1 y_1´´ + u_2´y_2´ + u_2 y_2´´) + b(u_1 y_1´ + u_2 y_2´) + c(u_1 y_1 + u_2 y_2) = G(x)$

Agrupando los términos que tengan factor común u_1 y los que tengan facto común u_2
$u_1(ay_1´´ + by_1´ + cy_1) + u_2(ay_2´´ + by_2´ + cy_2) + \mathrm{a}(u_1´y_1´ + u_2´y_2´) = G(x)$

Los dos primeros términos que están entre paréntesis son nulos porque y_1 e $y_2$son soluciones de la ecuación complementaria, por lo que

$ay_1´´ + by_1´ + cy_1 = 0$ y $ay_2´´ + by_2´ + cy_2 = 0$ por lo que resulta:

$\mathrm{a}(u_1´y_1´ + u_2´y_2´) = G(x)$ (2)

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema de dos ecuaciones con las funciones desconocidas u_1 y u_2,

$$\begin{cases} u_1´y_1 + u_2´y_2 = 0 \\ \mathrm{a}(u_1´y_1´ + u_2´y_2´) = G(x) \end{cases}$$

Después de de resolver este sistema hallamos $u_1´$ y $u_2´$ y luego integramos para encontrar u_1 y u_2.De esta manera la solución particular está dada por $y_p(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x)$

Ejemplo 1
Hallar la solución general de
$y'' + y = secx$

Hallamos la solución de la ecuación característica
$y'' + y = 0$
$\mathrm{r}^2 + 1 = 0 \rightarrow \mathrm{r} = \mp 1\mathrm{i}$

$y_c(x) = C_1 \cos x + C_2 senx$

Usando la variación de parámetros se propone la solución

$y_p(x) = u_1 cosx + u_2 senx$
Planteamos el sistema a resolver

$$\begin{cases} u_1' cosx + u_2' senx = 0 \\ -u_1' senx + u_2' cosx = secx \end{cases}$$

Hallamos u_1'

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & senx \\ secx & cosx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}} = -\mathrm{senxsecx} = -\mathrm{tgx}$$

Hallamos u_2'

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & secx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}} = \mathrm{cosxsecx} = 1$$

Ahora hallamos u_1

$$u_1 = -\int \mathrm{tgxdx} = \ln|\cos x|$$

Ahora hallamos $u_2 = \int dx = x$

Luego $y_p(x) = u_1 cosx + u_2 senx$ por lo tanto $y_p(x) = \ln|\cos x| cosx + xsenx$

De acuerdo al teorema1

$y(x) = y_p(x) + y_c(x)$

$y(x) == C_1\cos x + C_2 senx + \ln|\cos x| cosx + xsenx$

Ejemplo 2
Hallar la solución general de
$y'' + y = cosx$

Hallamos la solución general de la ecuación característica
$y'' + y = 0$
$r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \mp 1i$

$y_c(x) = C_1\cos x + C_2 senx$
Usando la variación de parámetros se propone la solución

$y_p(x) = u_1 cosx + u_2 senx$
Planteamos el sistema a resolver

$$\begin{cases} u_1' cosx + u_2' senx = 0 \\ -u_1' senx + u_2' cosx = cosx \end{cases}$$

Hallamos u_1'

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & senx \\ cosx & cosx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}} = -\mathrm{senxcosx}$$

Hallamos u_2'

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} cosx & 0 \\ -senx & cosx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} cosx & senx \\ -senx & cosx \end{vmatrix}} = \cos^2 x$$

$$u_1 = -\int \mathrm{senxcosxdx} = \frac{\cos^2 x}{2}$$

Por sustitución $u = cosx \longrightarrow du = -senxdx$

$$\int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{\cos^2 x}{2}$$

$$u_2 = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 + cos2x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{\mathrm{sen}2x}{4}$$

$y_p(x) = \frac{\cos^2 x}{2} cosx + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}sen2x)senx$

$\mathrm{sen2x} = \mathrm{2senxcosx}$

$y_p(x) = \frac{\cos^2 x}{2} cosx + \frac{1}{2}[x + \frac{1}{2}(2senxcosx)]senx$

$y_p(x) = \frac{\cos^3 x + xsenx + sen^2 xcosx}{2} = \frac{1}{2}cosx(\cos^2 x + sen^2 x) + \frac{1}{2}xsenx = \frac{1}{2}cosx + \frac{1}{2}xsenx$

Recordemos que
$y_c(x) = C_1 \mathrm{cosx} + C_2 senx$

Se omite el término $\frac{1}{2}cosx$ de la solución particular por estar incluido en la solución característica ($C_1\mathrm{cosx}$) →
$y_p(x) = \frac{1}{2}xsenx$

La solución general es:

$y(x) = y_p(x) + y_c(x$
$y(x) == C_1 \mathrm{cosx} + C_2 senx + \dfrac{1}{2}xsenx$
El teorema 1 aplicado para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden 2, puede extenderse a ecuaciones de mayor orden. Veamos como ilustración el siguiente ejemplo

Ejemplo 3
Hallar la solución general de
$y''' + y' = secx$

La ecuación característica es:
$r^3 + r = 0$
Factorizamos:
$r(r^2 + 1) = 0$

Las raíces son: $r_1 = 0$, $r_2 = 1i$ y $r_3 = -1i$
La solución y_c es:

$y_c = C_1 + C_2 cosx + C_3 senx$
Usando variación de los parámetros proponemos la solución

$y_p = u_1 + u_2 cosx + u_3 senx$

Planteamos el sistema a resolver

$$\begin{cases} u_1{}'y_1 + u_2{}'y_2 + u_3{}'y_3 = 0 \\ u_1{}'y'_1 + u_2{}'y'_2 + u_3{}'y'_3 = 0 \\ \mathrm{a}(u_1{}'y_1{}'' + u_2{}'y_2{}'' + u_3{}'y_3{}'') = G(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1{}' + u_2{}'cosx + u_3{}'senx = 0 \\ 0u_1{}' - u_2{}'senx + u_3{}'cosx = 0 \\ 0u_1{}' - u_2{}'cosx - u_3{}'senx = secx \end{cases}$$

$$u_1{}' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ secx & -cosx & -senx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ 0 & -cosx & -senx \end{vmatrix}} = \mathrm{secx} \rightarrow u_1 = \int \mathrm{secxdx} = \ln|\mathrm{secx} + \mathrm{tgx}|$$

$$u_2{}' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & senx \\ 0 & 0 & cosx \\ 0 & secx & -senx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ 0 & -cosx & -senx \end{vmatrix}} = -1 \rightarrow\text{--}\rightarrow u_2 = \int -\mathrm{dx} = -\mathrm{x}$$

$$u_3{}' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & cosx & 0 \\ 0 & -senx & 0 \\ 0 & -cosx & secx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & cosx & senx \\ 0 & -senx & cosx \\ 0 & -cosx & -senx \end{vmatrix}} = -\mathrm{tgx} \rightarrow u_3 == -\int \mathrm{tgxdx} = \ln|\mathrm{cosx}|$$

$$y_p = u_1 + u_2cosx + u_3senx$$

$$y_p = \ln|\mathrm{secx} + \mathrm{tgx}| - \mathrm{xcosx} + \ln|\mathrm{cosx}|senx$$

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x$$

$$y(x) = C_1 + C_2cosx + C_3senx + \ln|\mathrm{secx} + \mathrm{tgx}| - \mathrm{xcosx} + \ln|\mathrm{cosx}|senx$$

Luego de los ejemplos anteriores puede observarse que el método es eficaz, sin embargo muchas veces se vuelve muy tedioso por la cantidad de cálculos que hay que realizar, y en otras ocasiones es muy difícil de calcular las integrales que se plantean por lo que hay que recurrir a SAC

Prof. María Graciela Ribas