I. Ondas Electromagnéticas

I.1 Ecuaciones de Maxwell

Corriente de Desplazamiento y Ley de Ampere Generalizada:

Al pasar al estudio de los campos variables dependientes del tiempo, es necesario considerar los fenómenos eléctricos y magnéticos no por separado sino en conjunto, teniendo en cuenta sus acciones recíprocas.

Hemos visto que un campo magnético variable da origen a un campo eléctrico inducido. Pero resulta además que, en uno de los ejemplos más notables de la simetría de la naturaleza, un campo eléctrico variable da origen a un campo magnético. Este efecto tiene una enorme y trascendental importancia, ya que explica y pone de manifiesto la existencia de las ondas de radio, los rayos gamma y la luz visible, como así también todas las demás formas de ondas electromagnéticas.

Para establecer el origen de la relación entre los campos eléctricos variables y los campos magnéticos, tenemos que volver a la formulación de la ley de Ampere *(Compendio de Electricidad y Magnetismo - pág. 179)*:

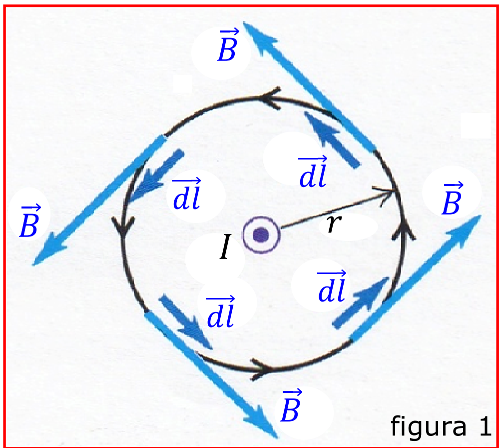

figura 1

$$\oint \vec{B}\,.\,d\vec{l} = \mu_0\, I_{enc}$$

En esta expresión, el primer miembro es la integral de línea del vector inducción $\vec{B}$ a lo largo de un contorno cerrado, mientras que I_{enc} es la corriente enlazada por dicho contorno.

La aplicación más simple de la ley de Ampere se representa en la *figura 1*. La misma fue formulada para un campo magnético inmóvil y una corriente eléctrica invariable en el tiempo, razón por la cual su expresión resulta incompleta. Para entender el porqué de esta aseveración, vamos a considerar el proceso de carga de un capacitor. En la *figura 2*, un conductor introduce una corriente i_C en una placa y otro conductor la extrae de la otra placa. La carga Q aumenta y el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las placas crece.

La notación i_C indica el valor instantáneo de lo que llamaremos *Corriente de Conducción* (*para distinguirla de otra que estamos por encontrar*).

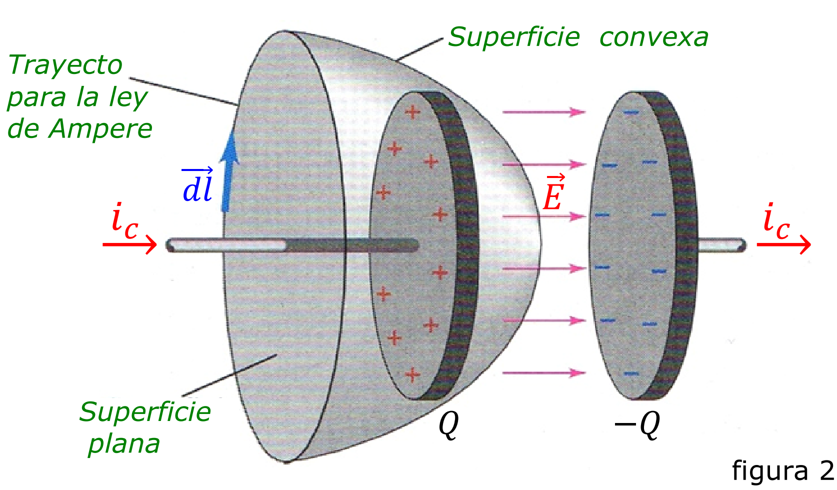

figura 2

Si ahora aplicamos la ley de Ampere al trayecto circular que se observa, la integral $\oint \vec{B}.\vec{dl}$ alrededor de este trayecto es igual a $\mu_0\, I_{enc}$. En el caso del área circular plana delimitada por el círculo, I_{enc} es simplemente la corriente i_C en el conductor izquierdo. Pero la superficie convexa está delimitada por el mismo círculo, y la corriente a través de esa superficie es cero. En consecuencia, $\oint \vec{B}.\vec{dl}$ es igual a $\mu_0\, i_C$ y al mismo tiempo es igual a *cero*. Esto evidentemente es una contradicción.

Pero algo más ocurre en la superficie convexa: *a medida que el capacitor se carga*, aumentan el campo eléctrico $\vec{E}$ y el flujo eléctrico ϕ_E a través de la misma. Podemos determinar la *velocidad de variación* en función de la carga y de la corriente.

La carga instantánea es $q = C\, v$, donde C es la capacidad y v la diferencia de potencial instantánea.

Para un capacitor de placas paralelas: $C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$, donde A es el área de las placas y d la separación.

La diferencia de potencial entre las placas es: $v = E\, d$.

Suponemos que la región está llena de un material de permitividad ε, por lo que sustituimos ε_o por ε.

Ahora podemos expresar la *carga del capacitor* en la siguiente forma:

$$q = C\, v = \frac{\varepsilon\, A}{d} E\, d = \varepsilon\, E\, A = \varepsilon\, \emptyset_E \qquad (1)$$

A medida que el capacitor se carga, la velocidad de variación de q es la corriente de conducción $i_C = dq/dt$. Derivando la ecuación *(1)* con respecto al tiempo, se obtiene:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \varepsilon \frac{d\emptyset_E}{dt}$$

Si ahora imaginamos una corriente ficticia i_D en la región comprendida entre las placas, podemos definir la misma como sigue:

$$\boxed{i_D = \varepsilon \frac{d\emptyset_E}{dt}} \qquad \textit{Corriente de Desplazamiento} \qquad (2)$$

Es decir, suponemos que, en la *ley de Ampere*, el flujo variable que atraviesa la superficie curva de la *figura 4* es equivalente a una corriente de conducción a través de la misma. Incluimos esta corriente ficticia i_D en la *ley Ampere*, junto con la corriente de conducción real i_C :

$$\boxed{\oint \vec{B} . d\vec{l} = \mu_0 \left(i_C + i_D\right)_{enc}} \qquad \textit{Ley de Ampere Generalizada} \qquad (3)$$

En esta forma, la ley se cumple para cualquier superficie que se utilice. En el caso de la *figura 2*, para la superficie plana i_D es cero y para la superficie curva i_C es cero; además, la i_C de la superficie plana es igual a la i_D de la superficie curva.

Esta ecuación sigue siendo válida en un material magnético, siempre y cuando la magnetización sea proporcional al campo externo y se sustituya μ_o por μ.

La corriente ficticia i_D fue ideada en 1865 por el físico escocés James Maxwell, quien la llamó *corriente de desplazamiento*. Existe además una *Densidad de Corriente de Desplazamiento*: $J_D = \frac{i_D}{A}$

A partir de $\emptyset_E = E\ A$ *y dividiendo la (2) por A* $\Rightarrow$ $$\boxed{J_D = \varepsilon \frac{dE}{dt}} \qquad (4)$$

Una ventaja adicional de la corriente de desplazamiento, es que permite generalizar la *Regla de los Nudos de Kirchhoff* (*"la suma algebraica de las corrientes en cualquier nudo es cero"*). Considerando la placa izquierda del capacitor, tenemos una corriente de conducción que entra en ella pero ninguna que salga. Cuando incluimos la corriente de desplazamiento, tenemos una corriente de conducción que entra por un lado y una corriente de desplazamiento equivalente que sale del otro lado. Generalizando el significado del término "corriente", podemos decir que *una corriente pasa a través del capacitor*.

Ahora nos preguntamos: *¿la corriente de desplazamiento tiene algún significado físico real o es simplemente un artificio para satisfacer simultáneamente la Ley de Ampere y la Regla de los Nudos de Kirchhoff?* En lo que sigue intentaremos responder a esa pregunta.

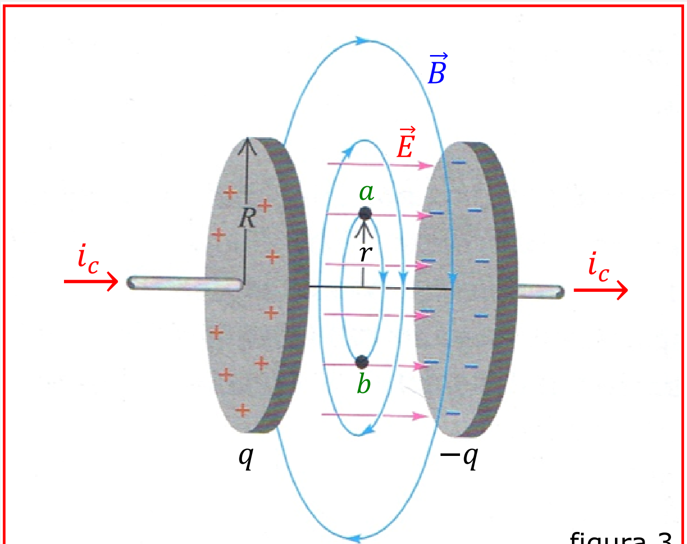

figura 3

Consideremos un área circular plana entre las placas paralelas de un capacitor circular de radio R, como se muestra en la *figura 3*. Si la corriente de desplazamiento desempeña realmente el papel que hemos supuesto, durante la carga del capacitor debe haber un campo magnético en la región comprendida entre sus placas.

Para hallar el campo magnético en un punto de dicha región ubicado a una distancia r del eje del capacitor, aplicamos nuestra <u>*ley de Ampere generalizada*</u> a un círculo de radio r que pasa por ese punto *(en la fig. 3 por a y b)*, con $r < R$.

La corriente total encerrada por el círculo es J_D multiplicada por su área, o sea: $(i_D/\pi R^2)(\pi r^2)$. La integral $\oint \vec{B}.d\vec{l}$ es simplemente el producto de B por la circunferencia $2\pi r$ del círculo. Puesto que $i_D = i_C$ en el capacitor en proceso de carga, la *ley de Ampere* se convierte en:

$$\oint \vec{B}.d\vec{l} = 2\pi r\, B = \mu_0 \frac{r^2}{R^2}\, i_C$$

de donde:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}\, i_C} \qquad (5)$$

Este resultado predice que, <u>*en la región entre las placas*</u> del capacitor, el vector inducción $\vec{B}$ es *cero en el eje y aumenta en forma lineal con la distancia al eje*. Mediante un cálculo similar se demuestra que <u>*afuera de la región entre las placas*</u> *($r > R$)*, $\vec{B}$ es el mismo que si *el alambre fuera continuo y las placas no estuviesen presentes*.

Cuando se mide el campo magnético en esta región, se encuentra que realmente está ahí y que se comporta exactamente como lo predice la ecuación *(4)*. Esto confirma claramente el papel de la corriente de desplazamiento como fuente de campo magnético y que, lejos de ser la misma un simple artificio, es un hecho fundamental de la naturaleza. Este descubrimiento de Maxwell fue un paso audaz de un genio extraordinario.

◆ <u>*Ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo*</u>*:*

Las <u>*Ecuaciones de Maxwell*</u> se componen de un paquete de cuatro ecuaciones. Maxwell no descubrió las mismas por sí solo *(aunque sí ideó el concepto de corriente de desplazamiento)*, sino que las juntó y reconoció su importancia, en particular para predecir la existencia de las ondas electromagnéticas.

Enunciaremos estas ecuaciones en su forma más simple, que es el caso en que se tienen *cargas y corrientes en un espacio vacío*. Más adelante veremos cómo se modifican estas ecuaciones si está presente un *material dieléctrico* o *magnético*.

- PRIMERA ECUACIÓN: *"Ley de Gauss de los Campos Eléctricos"*

La ley de Gauss establece que *"el flujo eléctrico total (o número neto de líneas de campo) a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie"* (*ver Compendio de Electricidad y Magnetismo - págs. 34/37*):

$$\boxed{\emptyset_E = \oint \vec{E}\,.d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}} \qquad (6)$$

- SEGUNDA ECUACIÓN: *"Ley de Gauss de los Campos Magnéticos"*

Esta ley de Gauss establece que *"el flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada (superficie gaussiana) es siempre cero"* (*ver Compendio de Electricidad y Magnetismo - pág. 177*):

$$\boxed{\emptyset_B = \oint \vec{B}\,.d\vec{A} = 0} \qquad (7)$$

El hecho de que aparezca un cero en el segundo miembro de la ecuación *(7)* pero no en el segundo miembro de la ecuación *(6)*, quiere decir que en magnetismo no existe el equivalente de la carga libre q como en electricidad. Un imán permanente o un solenoide son *dipolos magnéticos*, pero no hay "fuentes" ni "sumideros" de $\vec{B}$; es decir, *no hay polos magnéticos libres o aislados*.

- TERCERA ECUACIÓN: *"Ley de Ampere-Maxwell"*

Esta es la *Ley de Ampere Generalizada* que incluye la *Corriente de Desplazamiento de Maxwell*, que hemos visto en páginas anteriores:

$$\boxed{\oint \vec{B}\,.d\vec{l} = \mu_0\,(i_C + \varepsilon_0\,\frac{d\emptyset_E}{dt})_{enc}} \qquad (8)$$

- CUARTA ECUACIÓN: *"Ley de la Inducción de Faraday"*

La ley de la inducción electromagnética de Faraday establece que *"la f.e.m. inducida en una espira cerrada es igual a la velocidad de variación del flujo magnético que la atraviesa, cambiada de signo"* (ver Compendio de Electricidad y Magnetismo - págs. 188/190):

$$e = -\frac{d\emptyset_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\,.d\vec{A}$$

Además, otra definición establece que *"la f.e.m. de un circuito es igual a la integral curvilínea de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de dicho circuito"* (ver Compendio de Electricidad y Magnetismo - pág. 117):

$$e = \oint \vec{E}\;d\vec{l}$$

Si combinamos esta expresión con la ley de Faraday antes indicada, se obtiene:

$$\boxed{\oint \vec{E}\;d\vec{l} = -\frac{d\emptyset_B}{dt}} \qquad (9)$$

que es la *forma usual de la ley de Faraday*.

Esta forma es válida sólo si el *trayecto* alrededor del cual se efectúa la integración es *constante*. Si hay un flujo magnético variable, la integral de la ecuación no es cero, lo que indica que el campo $\vec{E}$ así originado *no es conservativo*.

Los campos eléctricos inducidos no están relacionados con cargas, sino con un flujo magnético cambiante. Aún cuando ambas clases de campos eléctricos ejercen fuerzas sobre las cargas, hay una diferencia entre ellos. La manifestación más simple de esta diferencia es que las líneas de E relacionadas con un flujo magnético variable pueden formar curvas cerradas; en cambio, las líneas de E relacionadas con cargas no pueden formar curvas cerradas, sino que siempre tienen que salir de una carga positiva y terminar en una negativa.

La ecuación que define la diferencia de potencial entre dos puntos a y b es:

$V_b - V_a = {}^{W_{ab}}/_{q_o} = -\int_a^b \vec{E}\,d\vec{l}$ (donde q_o es la carga transportada y W_{ab} es el trabajo realizado). Para que *el potencial tenga un significado útil, esta integral (y también W_{ab}) debe tener el mismo valor para cualquier trayectoria que una a con b. Un caso especial ocurre cuando a y b son el mismo punto: la trayectoria que los une constituye ahora un circuito cerrado y* $\oint \vec{E}\, d\vec{l} = 0$.

Cuando hay un flujo magnético cambiante, $\oint \vec{E}\, d\vec{l}$ *no puede ser cero sino que su valor es, de acuerdo con la ley de Faraday,* $-d\phi_B/dt$.

Los campos eléctricos relacionados con cargas estacionarias son conservativos, mientras que los asociados con campos magnéticos cambiantes son no conservativos. El potencial eléctrico, que se puede definir sólo para una fuerza conservativa, no tiene ningún significado para campos eléctricos inducidos.

- ## *Conclusiones*

Existe una notable *simetría* en las cuatro ecuaciones de Maxwell. En el espacio vacío, donde no hay cargas, las primeras dos ecuaciones *[(6) y (7)]* tienen *idéntica forma*, una con E y la otra con B. Cuando se comparan las otras dos ecuaciones, la *(8)* afirma que *un flujo eléctrico cambiante origina un campo magnético* y la *(9)* que *un flujo magnético cambiante origina un campo eléctrico*; además, en el espacio vacío, donde no hay corriente de conducción ($i_c = 0$), estas dos ecuaciones *tienen la misma forma (salvo una constante numérica y un signo negativo) con los papeles de E y B intercambiados*.

Las ecuaciones *(8)* y *(9)* se pueden escribir de una forma diferente pero equivalente, introduciendo las definiciones de flujo eléctrico y magnético: $\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ y $\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, respectivamente. En el espacio vacío, donde no hay ni cargas ni corrientes de conducción ($i_c = 0$ y $Q_{enc} = 0$), se tiene:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \tag{10}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{11}$$

En estas expresiones se advierte una vez más la simetría entre los papeles de los campos E y B.

El rasgo más notable de estas ecuaciones es que *un campo que varía con el tiempo, de una u otra clase, induce un campo de la otra clase en regiones próximas del espacio*. Maxwell reconoció que estas relaciones predecían la existencia de *perturbaciones electromagnéticas* consistentes en *campos eléctricos y magnéticos que varían con el tiempo y que viajan o se propagan de una región a otra del espacio*, aunque no haya materia interpuesta. Estas perturbaciones, llamadas *ondas electromagnéticas*, constituyen la base física de la luz, las ondas de radio y televisión, el infrarrojo, el ultravioleta, los rayos X y el resto del espectro electromagnético.

Una vez que se conocen los campos eléctricos y magnéticos en un punto en el espacio, *la fuerza que actúa sobre una partícula de carga q* se calcula a partir de la expresión:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (12)$$

La misma se conoce como *Ley de Lorenz*. Las Ecuaciones de Maxwell, junto con esta ley de fuerza, describen por completo todas las interacciones electromagnéticas clásicas en un vacío.

Ejercicio Nº 1: Se está cargando un capacitor de placas paralelas con dieléctrico de aire como en la *figura (3)*. Las placas circulares tienen un radio de 4 *cm* y en un instante determinado la corriente de conducción en los alambres es de 0,28 *A*. a) ¿Cuál es la densidad de corriente de desplazamiento en el espacio de aire entre las placas? b) ¿Con qué velocidad cambia el campo eléctrico entre las placas? c) ¿Cuál es el campo magnético inducido entre las placas a las distancias de 2 cm y 1 cm del eje?

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \times 10^{-12}\ C^2/N.m^2$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ Wb/A.m$

a) $$J_D = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{i_c}{\varepsilon_0\ A} = \frac{i_c}{A} = \frac{0{,}28\ A}{\pi(0{,}04\ m)^2} = 55{,}7\ A/m^2$$

b) $$\frac{dE}{dt} = \frac{J_D}{\varepsilon_0} = \frac{55{,}7\ A/m^2}{\varepsilon_0} = 6{,}29 \times 10^{12}\ V/m.s$$

c₁) $$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}\ i_D = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{0{,}02\ m}{(0{,}04\ m)^2}(0{,}28\ A) = 7 \times 10^{-7}\ T$$

c₂) $$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2}\ i_D = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{0{,}01\ m}{(0{,}04\ m)^2}(0{,}28\ A) = 3{,}5 \times 10^{-7}\ T$$

Ejercicio Nº 2: Suponga que las placas paralelas de la *figura (3)* tienen un área de 3 cm^2 y están separadas por una lámina de dieléctrico de 2,5 *mm* de espesor que ocupa totalmente el volumen entre las placas. Esta lámina tiene una constante dieléctrica de 4,7. En cierto instante, la diferencia de potencial entre las placas es de 120 *V* y la corriente de conducción es igual a 6 *mA*. En ese instante, determinar: a) la carga *q* en cada placa; b) la velocidad de cambio de la carga en las placas; c) la corriente de desplazamiento en el dieléctrico.

a) $$q = C\,v = \left(\frac{\varepsilon\,A}{d}\right) v = \frac{(4{,}7\,\varepsilon_0)(3\times10^{-4}\,m^2)(120\,V)}{2{,}5\times10^{-3}\,m} = 5{,}99\times10^{-10}\ C$$

b) $$\frac{dq}{dt} = i_c = 6\times10^{-3}\,A$$

c) $$J_D = \varepsilon\frac{dE}{dt} = \varepsilon\frac{i_c}{\varepsilon\,A} = \frac{i_c}{A} = \frac{i_D}{A} \quad\Rightarrow\quad i_D = i_c = 6\times10^{-3}\,A$$

Ejercicio Nº 3: En la *figura (3)* las placas del capacitor se hallan en un vacío y tienen un área de 5 cm^2 con una separación de 2 *mm*. La corriente de carga tiene un valor constante de 1,8 *mA*. En el instante t = 0 la carga en las placas es igual a cero. Calcular: a) la carga en las placas y el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las mismas, cuando t = 0,5 μs ; b) la razón de cambio respecto al tiempo del campo eléctrico entre las placas *(¿varía dE/dt?)*; c) la densidad de corriente de desplazamiento *(¿cómo son entre sí i_C e i_D?)*.

a) $$q = i_c t = (1{,}8\times10^{-3}\,A)\,(0{,}5\times10^{-6}\,s) = 0{,}9\times10^{-9}\,C$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{A\,\varepsilon_0} = \frac{0{,}9\times10^{-9}\,C}{(5\times10^{-4}\,m^2)\,\varepsilon_0} = 2{,}03\times10^{5}\ V/m$$

$$V = E\,d = (2{,}03\times10^{5}\ V/m)(2\times10^{-3}\,m) = 406\,V$$

b) $$\frac{dE}{dt} = \frac{i_c}{A\,\varepsilon_0} = \frac{(1{,}8\times10^{-3}\,A)}{(5\times10^{-4}\,m^2)\,\varepsilon_0} = 4{,}07\times10^{11}\ V/m.s \quad\Rightarrow\quad es\ constante\ en\ el\ tiempo$$

c) $$J_D = \varepsilon_0\frac{dE}{dt} = \varepsilon_0(4{,}07\times10^{11}\ V/m.s) = 3{,}6\ A/m^2$$

$$i_D = J_D\,A = (3{,}6\ A/m^2)(5\times10^{-4}\,m^2) = 1{,}8\ \times10^{-3}\,A \quad\Rightarrow\quad i_C\ e\ i_D\ son\ iguales$$